UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci18fran

7330
1

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

---

MM. HERMITE, *président*.

BERTRAND.

DARBOUX.

TISSERAND.

J. TANNERY.

N..., *secrétaire*.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

20549 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XVIII. — ANNÉE 1894.**

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



179862
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

QA
1
B8
v.29

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## PREMIÈRE PARTIE.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GINO LORIA. — LE SCIENZE EZATTE NELL' ANTICA GRECIA. Libro I : *Geometri greci precursori di Euclide.* 168 p. in-4°. Modena. 1893.

Si l'Italie possède en M. Favaro un adepte de l'histoire des Mathématiques dont les publications ont depuis longtemps commencé à honorer sa patrie, l'œuvre spéciale à laquelle le nouvel éditeur de Galilée a surtout consacré ses efforts ne lui a pas permis de rédiger pour l'impression les leçons professées par lui à l'Université de Padoue. Il manquait donc, au delà des Alpes, un ouvrage d'exposition générale résumant les progrès réalisés pendant ce siècle dans l'étude des Mathématiques anciennes. M. Loria, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Gênes, après s'être signalé par quelques essais particuliers sur ce terrain, s'est proposé de combler cette lacune et il nous donne aujourd'hui la première partie d'une histoire générale des Sciences exactes dans l'antiquité, dont l'ensemble comprendra cinq livres et figurera d'ailleurs dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Lettres et Arts de Modène.*

Cette première Partie est consacrée à la Géométrie avant Euclide; les questions relatives à l'Arithmétique sont réservées pour le Livre V, de même que les recherches de Mathématiques inci-

demment faites par les astronomes et les géodètes grecs pour le Livre IV. Mais si le cadre est ainsi restreint dans un sens, il se trouve élargi de l'autre, parce que l'auteur a su relier d'une façon très heureuse l'histoire de la Géométrie grecque pendant cette période à celle de l'évolution de la pensée philosophique depuis Thalès jusqu'à Socrate et Platon.

L'énoncé des titres des Chapitres [I. Aperçu général sur la Géométrie grecque avant Euclide (questions relatives aux sources, etc.). II. Thalès et l'École ionienne. III. Pythagore et l'École italique. IV. Éléates, atomistes, sophistes (Zénon d'Élée, Œnopide, Anaxagore, Démocrite, Hippias). V. Pythagorisants (Hippocrate de Chios, Antiphon, Bryson, Archytas). VI. De Socrate à Euclide (Platon, les géomètres de l'Académie, Eudoxe de Cnide, Ménechme, Aristée, Dinostrate)] suffit pour indiquer le plan général du Livre que complètent deux appendices, l'un sur les recherches géométriques accomplies par les Égyptiens et les Babyloniens, l'autre sur la divination par Viviani des *Lieux solides* d'Aristée.

J'ai moi-même déjà trop entretenu de ces matières les lecteurs du *Bulletin* pour analyser dans le détail la façon dont M. Loria les a exposées ; mais je ne puis que souhaiter que pour les quatre Livres qui lui restent à publier et dont les sujets ont été moins approfondis par autrui, il satisfasse, aussi complètement que pour le premier, aux conditions de la tâche qu'il a entreprise. Il possède toutes les qualités d'un véritable historien, et en première ligne la clarté, le sens critique et la circonspection. S'il s'est enquis avec un soin minutieux de ce qui avait déjà été publié sur l'histoire des Mathématiques anciennes, il n'en remonte pas moins aux sources, ainsi qu'il est essentiel de le faire ; s'il adopte en général les vues et interprétations nouvelles ([1]), ce n'est pas sans les avoir contrôlées et sans signaler avec soin ce qu'elles peuvent offrir parfois d'hypothétique et de controversable.

Les quelques remarques critiques que je vais ajouter prouveront suffisamment que je ne trouverais pas aisément un reproche sérieux à lui adresser :

([1]) Il a en particulier largement utilisé les deux Ouvrages que j'ai publiés sur cette période : *Pour l'histoire de la Science grecque*, Alcan, 1887. *La Géométrie grecque*; Gauthier-Villars, 1887.

Page 14, Note 2. « Il est vrai que Diogène Laërce parle, comme précurseur de Thalès en Grèce, d'un Euphorbe de Phrygie; mais la vie et les œuvres de ce personnage nous sont tout à fait inconnues. »

Euphorbe de Phrygie est simplement le nom sous lequel le poète Callimaque avait désigné Pythagore en parlant de ses travaux mathématiques; on sait en effet que Pythagore, suivant la légende, aurait prétendu se souvenir avoir vécu antérieurement sous la forme d'Euphorbe, le Troyen qui dans l'*Iliade* porte le premier coup mortel à Patrocle.

Page 18, Note 1 : C'est à tort que le nom de *saros* est donné à la période écliptique connue par les Babyloniens; le témoignage de Suidas à cet égard, le seul que l'on puisse invoquer, repose sur une méprise évidente. Le *sare* babylonien est exclusivement l'unité de troisième ordre dans la numération sexagésimale, c'est-à-dire $60^2$.

Page 41, Note 2 : *pentaedro* a été imprimé par inadvertance au lieu de *tetraedro;* de même, page 156, ligne 7, *Diodoro* pour *Democrito*.

Page 43, Note 4 : Aux significations diverses du mot γνώμων aurait dû être ajoutée celle que les Grecs ont donnée à ce terme en Arithmétique et que nous pouvons définir comme représentant la *différence finie* d'une fonction entière pour un accroissement égal à l'unité de la variable (ne prenant que des valeurs entières).

Page 53, Note 1 : Les citations de Parménide qu'on trouve dans Proclus sur Euclide ne se rapportent pas au philosophe Éléate, mais bien au dialogue platonicien qui porte son nom.

Page 101 : Le témoignage de Cicéron n'est nullement suffisant pour faire croire que Platon ait été entendre à Cyrène les leçons du mathématicien Théodore, alors que Platon lui-même nous représente ce géomètre comme enseignant à Athènes. Il est également douteux que Platon ait été en relations personnelles avec Philolaos, etc.

Page 161 et suiv. : M. Loria a analysé la divination de Viviani sur les *Lieux solides* d'Aristée et cherché à déterminer jusqu'à quel point elle pouvait être considérée comme satisfaisante. J'admets avec lui qu'il n'y a guère que les problèmes traités dans le second

livre de Viviani qui aient pu figurer dans l'ouvrage du géomètre grec, et je regarde d'ailleurs comme assez probable qu'au moins une partie de ces problèmes ont été traités par Aristée (¹). Mais je crois qu'on peut aller plus loin dans la restitution de ces *Lieux solides;* il me paraît en effet nécessaire d'admettre que le problème à trois et quatre droites était traité plus ou moins complètement, et en formait comme le couronnement. Autrement ce que dit Apollonius dans ses *Coniques,* au sujet de ce problème qu'il n'a pas d'ailleurs traité lui-même, me paraît inexplicable. Je crois également que l'on peut prouver par Pappus qu'Aristée avait traité les problèmes déterminant les coniques comme lieux d'après les propriétés des foyers et des directrices, que notamment il connaissait le foyer de la parabole, dont Apollonius ne parle pas, et qu'il est impossible que les anciens aient ignoré avant Anthémius. Il me semble donc que l'Ouvrage d'Aristée devait surtout traiter des coniques comme lieux des points dont les distances, soit à des points fixes, soit à des droites fixes, sont en certaines relations. D'autre part, les *Lieux plans* d'Apollonius sont, comme sujet, suffisamment restitués pour que la généralisation des problèmes qui y sont traités puisse fournir des indications sur quelques autres questions qu'Aristée aura également pu aborder.

PAUL TANNERY.

---

W.-W. ROUSE BALL. AN ESSAY ON NEWTON'S PRINCIPIA, x-175 p. In-16. London. Macmillan and C°; 1893.

L'histoire des *Principes* de Newton a été traitée par David Brewster dans ses *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir Isaac Newton* (Edimbourg, 2ᵉ édition; 1860) et par Rigaud dans son *Historical essay on the first publications of Sir Isaac Newton's Principia* (Oxford, 1888). Ces Ouvrages sont

(¹) Ils rentrent dans l'énoncé général suivant : « Trouver le lieu d'un point tel que le carré de la perpendiculaire abaissée de ce point sur une droite fixe limitée soit une fonction du second degré des segments de cette droite déterminés par le pied de la perpendiculaire. »

désormais difficiles à se procurer et M. Rouse Ball, fellow de l'Université de Cambridge, qui avait formé, mais malheureusement semble au moins ajourner le projet de donner une édition critique des *Principes*, a eu l'idée de reprendre la question de leur histoire, et de réunir à nouveau les principaux documents qui la concernent. Il déclare d'ailleurs ne pas avoir augmenté sensiblement le nombre de ceux déjà connus, si ce n'est par une série de lettres échangées entre Newton, d'une part, Hooke et Halley, de l'autre.

Son introduction (*Chapitre I*) donne des indications sur les collections de papiers mathématiques à consulter dans l'objet (à la Royal Society; à Cambridge; Collection Portsmouth et Bibliothèque du collège de la Trinité; à Sherborn Castle : Collection Macclesfield), en dehors des trois éditions parues du vivant de Newton, en 1637, 1713 et 1726.

*Chapitre II.* — Les premières recherches de Newton sur la gravitation remontent à 1666; il eut, dès cette époque, l'idée que la force qui retient la Lune dans son orbite est la même que la pesanteur; il en conclut, dans l'hypothèse de l'orbite circulaire, que cette force devait varier en raison inverse du carré des distances; essayant de vérifier son idée par le calcul, il trouva, comme on sait, une discordance. Supposa-t-il qu'une autre force devait intervenir ou s'expliqua-t-il cette discordance par les causes d'erreurs qui entachaient évidemment ses calculs, le point reste obscur. Le plus curieux est sans doute que, se trouvant à ce moment dans le Lincolnshire et dépourvu de livres, il ait pris pour la valeur du rayon terrestre une estimation sensiblement différente de celles qui étaient les plus courantes, et que, de retour à Cambridge, il n'ait pas repris ses calculs avec une donnée plus généralement admise, qui aurait fait disparaître presque complètement la discordance reconnue par lui.

*Chapitre III.* — En 1677, Newton avait l'occasion, dans une discussion avec Wren, d'exposer ses idées sur l'extension de la gravitation à la sphère de la Lune et sur la variation de la force attractive en raison inverse du carré de la distance. Mais ce ne

fut qu'en 1679 qu'il fut provoqué par Hooke à aborder plus complètement le problème.

Invité par la Royal Society à reprendre avec Newton la correspondance antérieurement confiée à Oldenburgh, Hooke obtint en premier lieu de l'illustre mathématicien l'idée de démontrer la rotation de la Terre en observant la déviation des graves dans leur chute. Ce fut à cette occasion qu'il lui posa le problème de déterminer la force centripète correspondant au mouvement des planètes tel qu'il est défini par les lois de Képler. Newton établit alors que la loi des aires suppose précisément une force centripète; que le mouvement elliptique, si la force centripète est dirigée vers le foyer, suppose la variation de cette force en raison inverse du carré des distances. Il ne publia pas pour le moment les résultats qu'il avait obtenus.

*Chapitre IV.* — En janvier 1684, Halley avait déduit, de la troisième loi de Képler et dans l'hypothèse des orbites circulaires, la variation de la force en raison inverse du carré des distances. Il trouva que Wren et Hooke partageaient depuis plus ou moins longtemps cette opinion; le second prétendit que ce principe suffisait pour expliquer les lois des mouvements célestes, mais ne put rien préciser. En août, Halley, visitant Newton à Cambridge, apprit ses découvertes et en demanda communication; Newton, n'ayant pas immédiatement retrouvé ses papiers, ne fit l'envoi qu'en novembre 1684; à cette occasion, il reprit ses recherches et rédigea des leçons *De motu corporum* pour en faire l'objet de son cours de l'année. Le manuscrit de ces leçons existe et peut être considéré comme une esquisse du commencement du premier Livre des *Principes*.

Après avoir reçu la communication de Newton, Halley fit un nouveau voyage à Cambridge pour s'entendre avec lui sur la publicité à donner, vit le manuscrit *De motu*, en rendit compte à la Royal Society, et annonça qu'il avait obtenu la promesse que Newton enverrait, pour être inscrite sur les registres, une rédaction de ses découvertes. Cet envoi fut fait en février 1684, et comprit onze *Propositiones de motu*, avec démonstrations géométriques. M. Rouse Ball donne *in extenso* cet écrit, dont l'importance historique est capitale.

*Chapitre V*. — Halley avait également insisté auprès de Newton pour qu'il fît de ces découvertes l'objet d'un volume. La rédaction en prit environ un an et demi, et Newton fit également son cours de 1685, dont on possède le manuscrit, sur le sujet des *Principes*. La Royal Society se chargea de l'impression, mais en réalité, comme elle n'était pas en fonds, ce fut Halley qui supporta les frais et il paraît ne pas être rentré dans ses déboursés. Sa générosité est d'autant plus remarquable que sa situation pécuniaire n'était pas très brillante. D'un autre côté, il surveilla l'impression, qui marcha lentement (ce qui permit à Newton d'étendre singulièrement son programme primitif) et enfin défendit vigoureusement l'auteur contre les réclamations de priorité soulevées par Hooke.

Le *Chapitre VI* contient une analyse détaillée des *Principes*. Le *Chapitre VII* donne quelques détails sur le succès mérité de l'Ouvrage; sur l'occasion que Newton eut de donner des explications à divers philosophes, comme Locke et Bentley, qui, sans connaître suffisamment les Mathématiques, désiraient se rendre compte du sujet; sur les nouvelles recherches qu'il entreprit dans le même ordre d'idées, en particulier sur la théorie de la Lune.

Dès 1691, l'édition princeps était épuisée. Newton fut un moment disposé à autoriser Fatio de Duilliers à se charger de la réimpression. Il songea ensuite, vers 1694, à la diriger lui-même et recueillit dans ce but de nouvelles données astronomiques, en vue d'additions importantes qu'il méditait. Mais les fonctions publiques qu'il avait acceptées lui firent abandonner son projet. Le soin de la nouvelle édition, pour laquelle il avait d'abord pensé à Gregory, fut, après la mort de celui-ci, confié à Bentley qui n'était pas compétent, mais devait se faire aider par Cotes. Bentley fit d'ailleurs là une spéculation commerciale, qui lui fut très profitable, tandis que Cotes, pour sa peine, ne reçut que douze exemplaires de l'Ouvrage, et que Newton paya quelques corrections de la dernière heure. La troisième édition fut procurée par Pemberton, à qui Newton en abandonna également les profits, en outre d'une allocation de 200 guinées.

Les différences sérieuses entre chacune de ces deux éditions et la première sont indiquées avec soin, ainsi que la liste des éditions parues depuis la mort de Newton.

Le *Chapitre VIII* contient, comme pièces justificatives, la série de lettres dont j'ai parlé, et dont la plupart sont inédites.

Cette analyse montre que le volume de M. Rouse Ball renferme tout ce que l'on peut désirer savoir sur l'histoire des *Principes;* c'est d'ailleurs l'œuvre d'un esprit clair, judicieux et méthodique.

PAUL TANNERY.

---

# MÉLANGES.

## SUR LES SURFACES MINIMA;

PAR M. E. CARVALLO.

M. Hermann Grassmann, fils de l'éminent géomètre berlinois du même nom, a publié récemment une Dissertation inaugurale pour le Doctorat qui a pour titre *Application de l'*AUSDEHNUNGSLEHRE *à la théorie des courbes et des surfaces* (¹). L'Ausdehnungslehre (²) est cette méthode de Grassmann dont j'ai exposé les principes et fait valoir les avantages (³). La *Dissertation* du nouveau Docteur allemand est intéressante. Écrite dans un style remarquablement clair, elle fait bien ressortir la supériorité de la méthode de Grassmann.

L'auteur établit entre autres l'équation différentielle des surfaces minima et en déduit cette propriété fondamentale que *la somme des courbures d'une surface minima est nulle en tous ses points.* C'est, de tout l'opuscule, la seule démonstration qui ne laisse pas le sentiment d'une propriété intuitive. La démonstration exposée dans le Livre de M. Darboux (⁴), malgré sa simplicité, ne m'a pas donné plus de satisfaction à cet égard. Je pro-

(¹) Halle, 1893.

(²) *Die Ausdehnungslehre;* Berlin, 1862.

(³) Exposition d'un Mémoire de M. F. Caspary : *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV 1887. *Théorie des déterminants*, 3ᵉ série, t. X; mai et août 1891. *La méthode de Grassmann* (*Nouv. Ann.*, 2ᵉ série, t. XI; 1892).

(⁴) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Chap. II, p. 281.

pose la suivante. Elle est si intuitive qu'elle peut être présentée, soit par le calcul, soit par la Géométrie.

Considérons une portion de surface ($\Sigma$) limitée par un contour donné (C). Faisons subir à ($\Sigma$) une petite déformation, tout en laissant le contour (C) invariable. Elle devient ($\Sigma'$). Proposons-nous de calculer la variation de l'aire quand on passe de ($\Sigma$) à ($\Sigma'$).

Soit $x$ le vecteur d'un point de ($\Sigma$), dépendant de deux paramètres quelconques $u$ et $v$. L'élément de la surface ($\Sigma$) a pour côtés deux vecteurs élémentaires $\frac{\partial x}{\partial u}du$ et $\frac{\partial x}{\partial v}dv$. Si à ces deux vecteurs élémentaires je joins le vecteur normal $\nu$, égal à l'unité de longueur, j'aurai un parallélépipède dont le volume mesure aussi l'élément $dS$ de la surface. Si donc je désigne, avec Grassmann, par le symbole $\left[\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]$ le déterminant formé par les composantes rectangulaires des trois vecteurs qu'il contient, j'aurai, pour l'élément de la surface,

$$dS = \left[\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv.$$

L'aire de la portion de surface ($\Sigma$) limitée par la courbe (C) sera donc

$$S = \int\int\left[\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments compris dans l'intérieur de la courbe (C).

Si je désigne par la caractéristique $\Delta$ les variations dues à la déformation de la surface ($\Sigma$), j'aurai, pour la mesure de la surface voisine ($\Sigma'$),

$$\begin{aligned}S+\Delta S &= \int\int\left[(\nu+\Delta\nu)\frac{\partial(x+\Delta x)}{\partial u}\frac{\partial(x+\Delta x)}{\partial v}\right]du\,dv\\ &= \int\int\left[\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv + \int\int\left[\Delta\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv\\ &\quad+\int\int\left[\nu\frac{\partial\Delta x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv+\int\int\left[\nu\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\Delta x}{\partial v}\right]du\,dv+\ldots.\end{aligned}$$

Je dois égaler à zéro la partie principale de l'accroissement $\Delta S$. Or le premier terme du développement représente S. Les trois termes suivants contiennent la *partie principale* de l'accroisse-

ment $\Delta S$, la partie suivante, non écrite, ne contenant que des termes d'ordre supérieur au premier par rapport aux déformations.

Si donc je désigne par la caractéristique $\delta$ les parties principales des déformations $\Delta$, j'obtiens

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta S = & \iint \left[ \delta\nu \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] du\, dv \\ & + \iint \left[ \nu \frac{\partial \delta x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] du\, dv + \iint \left[ \nu \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \delta x}{\partial v} \right] du\, dv. \end{aligned} \right.$$

Or l'élément $\delta\nu$, accroissement de la normale unité $\nu$, est parallèle au plan tangent $\left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right]$ à la surface $(\Sigma)$.

Le volume du parallélépipède infiniment aplati $\left[ \delta\nu \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right]$ est donc nul :

$$(2)\quad \left[ \delta\nu \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0,$$

et le premier terme de $\delta S$ disparaît.

Pour interpréter le second terme, j'emprunte au Livre de M. Darboux la définition suivante de la déformation de la surface $(\Sigma)$.

La normale en un point M de $(\Sigma)$ rencontre $(\Sigma')$ en un point M'. Désignons par $\lambda$ la longueur MM'. La surface $(\Sigma')$ sera définie si l'on donne $\lambda$ en fonction de $u$ et $v$. Le point $x + \Delta x$ de $(\Sigma')$, correspondant à $x$, sera déterminé par la formule vectorielle

$$x + \Delta x = x + \lambda\nu,$$

d'où l'on tire

$$(3)\quad \delta x = \lambda\nu, \qquad \frac{\partial \delta x}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u}\nu + \lambda \frac{\partial \nu}{\partial u}.$$

Si je porte cette expression dans le deuxième terme de l'expression (1) de $\delta S$, il vient

$$\left[ \nu \frac{\partial \delta x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left[ \nu\nu \frac{\partial x}{\partial v} \right] + \lambda \left[ \nu \frac{\partial \nu}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right].$$

Le premier des deux termes du second membre est nul

$$(4)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left[ \nu\nu \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0.$$

car le déterminant représenté par le crochet est nul comme ayant les deux premières lignes identiques (leurs éléments sont les cosinus directeurs de la normale $\nu$). On a donc

$$(5)\qquad \int\int\left[\nu\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv = -\int\int\lambda\left[\nu\,\frac{\partial \nu}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv.$$

En faisant la même transformation pour la troisième intégrale de (1), on obtient pour $\delta S$ l'expression

$$\delta S = -\int\int\lambda\left[\nu\,\frac{\partial \nu}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \nu\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial \nu}{\partial v}\right]du\,dv.$$

Or $\lambda$ est une fonction arbitraire de $u$ et $v$. Cette intégrale devant être nulle, quelle que soit la fonction $\lambda$, chaque élément doit être nul, ce qui donne

$$(6)\qquad \left[\nu\,\frac{\partial \nu}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right] + \left[\nu\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial \nu}{\partial v}\right] = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des surfaces dites *minima*. Il faudrait en outre écrire que les termes en $\lambda^2$, dans le développement de $\Delta S$, conservent le signe $+$ quel que soit $\lambda$, pour être assuré que l'aire de $(\Sigma)$ est plus petite que l'aire de toute surface voisine $(\Sigma')$.

L'équation (6) s'interprète facilement, de façon à fournir la propriété fondamentale des surfaces minima. Pour cela, supposons, avec M. Darboux, que les paramètres $u$ et $v$, demeurés jusqu'ici arbitraires, représentent les paramètres des lignes de courbure de la surface. Alors, si l'on désigne par R et R′ les deux rayons de courbure de la surface, au point $x$, les formules d'Olinde Rodrigues donnent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial u} &= -\frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial u},\\ \frac{\partial \nu}{\partial v} &= -\frac{1}{R'}\,\frac{\partial x}{\partial u}.\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (7), il vient

$$(8)\qquad \left[\nu\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right]\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = 0.$$

Le premier facteur est différent de zéro : c'est le quotient par

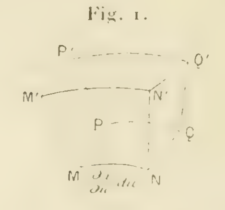
$du\,dv$ de l'élément d'aire $dS$. Le second facteur doit donc être nul et *l'équation différentielle des surfaces minima exprime que la somme des courbures est nulle.*

Ma démonstration est-elle plus simple que les deux que j'ai citées au début? Cela peut être contesté, l'évaluation de la simplicité étant variable avec les notions et les formules les plus familières à chacun. Mais une chose est incontestable, c'est que tous les termes de ma démonstration analytique ont une interprétation si simple que cette démonstration peut aussi bien être présentée sous une forme purement géométrique. C'est le caractère de supériorité de la méthode de Grassmann de fournir des démonstrations qui sont à la fois analytiques et géométriques.

Interprétons donc les formules; le lecteur reconnaîtra que tous les faits qu'elles expriment sont intuitifs.

La formule (1) signifie que la partie principale du changement de l'élément de surface $MNPQ = dS$ (*fig.* 1) se compose de

Fig. 1.




3 parties dues, respectivement, au changement d'orientation de son plan $\delta\nu$ et au changement de chacun de ses côtés $\frac{\partial\,\delta x}{\partial u}du$ et $\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}dv$.

L'équation (2) signifie que la première cause ne modifie pas l'aire de l'élément de surface.

Les formules (3) signifient que la déformation du côté $\frac{\partial x}{\partial u}du$ est due à deux causes, la variation de la fonction $\lambda$ le long de ce côté, et le changement d'orientation de la normale $\nu$.

La formule (4) signifie que la variation $N_1N_2 = \nu\frac{\partial\lambda}{\partial u}du$ due à $\lambda$ est sans influence sur l'aire de l'élément $dS$ (*fig.* 2).

La formule (5) s'interprète ainsi : $N_1N_3 = \frac{\partial\nu}{\partial u}du$ (*fig.* 3) est l'élément d'arc intercepté, sur la sphère de rayon 1, entre la nor-

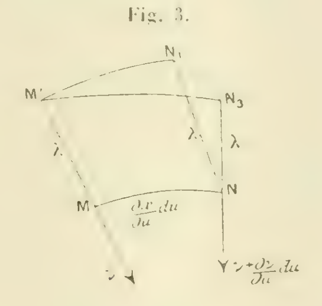
male au point $x$ et la normale au point $x + \frac{\partial x}{\partial u} du$; $\lambda \frac{\partial \nu}{\partial u} du$ est alors l'accroissement géométrique de l'arc $\lambda \frac{\partial x}{\partial u} du = \mathrm{MN}$, qui est dû au changement d'orientation de la normale $\nu$.

Fig. 2.




L'équation (6) égale à zéro la variation de l'élément d'aire due à cette déformation et à celle de l'autre côté de l'élément.

Fig. 3.



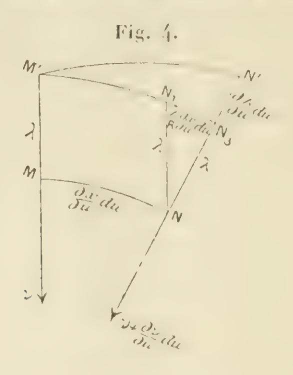

Pour avoir une interprétation simple de cette formule (6), on a pris pour élément de surface la maille MNPQ du réseau de courbure, ce qui est exprimé par les équations (7). La première de ces équations signifie que le changement du côté $\mathrm{MN} = \frac{\partial x}{\partial u} du$, pour la déformation $\lambda$ (*fig.* 4), se réduit à un allongement, dans le sens $\frac{\partial x}{\partial u}$, égal à $\mathrm{N_1 N_3} = \frac{\lambda}{\mathrm{R}} \frac{\partial x}{\partial u} du$. Le coefficient de dilatation de cet allongement est $\frac{\lambda}{\mathrm{R}}$.

L'équation (8) égale à zéro l'accroissement d'aire ainsi réduit à

$$\lambda\, \mathrm{MNPQ} \left( \frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R'}} \right).$$

Toutes ces interprétations se lisent sur les formules. D'autre part, les faits qu'elles contiennent se voient facilement par des considérations de Géométrie infinitésimale. La raison de la propriété fondamentale des surfaces minima est rendue intuitive et

Fig. 4.



peut être expliquée en langage ordinaire. Dans la déformation d'une surface dont les deux courbures sont égales et de sens contraire, l'un des côtés de la maille du réseau de courbure se dilate autant que l'autre se contracte et cette compensation laisse sa surface invariable. Si les courbures sont inégales, cette compensation n'a plus lieu exactement. Si les deux courbures sont de même sens, les deux côtés de la maille se dilatent, ou tous deux se contractent à la fois, de façon que la surface de la maille augmente ou diminue.

---

## SUR UN FRAGMENT INÉDIT DES MÉTRIQUES DE HÉRON D'ALEXANDRIE;

Par M. Paul TANNERY.

Dans son commentaire sur la *Mesure du cercle* d'Archimède, Eutocius s'exprime comme suit (éd. Heiberg, p. 270, l. 1-5) : « Comment on doit prendre la racine approximative d'un nombre donné, cela a été dit par Héron dans ses *Métriques,* de même que par Pappus, par Théon et par divers autres commentateurs de la grande *Composition* de Claude Ptolémée ».

Des auteurs ainsi allégués par Eutocius, on ne possédait jusqu'à

présent que Théon d'Alexandrie; il ne traite d'ailleurs que de l'extraction de la racine carrée des nombres sexagésimaux, ce qui ne répond nullement à la question qui se pose au sujet des calculs de la *Mesure du cercle* : Quelles méthodes étaient enseignées chez les anciens pour la détermination des fractions complétant approximativement la partie entière d'une racine incommensurable (¹)?

Cette question n'était jusqu'à présent traitée que par conjecture. Les plus anciens textes grecs publiés sur la matière ne remontent pas au delà du XIVe siècle (²).

Il en était cependant un que renferment des manuscrits souvent étudiés, qui semble faire partie de la série des écrits que vise Eutocius et qui donne précisément le passage des *Métriques* de Héron auquel fait allusion le commentateur d'Archimède.

Ce texte est celui des *Prolégomènes à la syntaxe de Ptolémée,* anonymes dans certains manuscrits, attribués dans d'autres à Pappus ou même à Diophante. En réalité, c'est une compilation faite surtout d'après Pappus et Théon d'Alexandrie, par un auteur postérieur à Syrianus (³) (Ve siècle de notre ère), mais qui n'est pas chrétien (⁴) et ne peut guère, par suite, avoir vécu après Eutocius.

Il est d'ailleurs possible de former une conjecture plus précise au sujet de cet auteur. Dans le précieux manuscrit de la Bibliothèque Nationale grec n° 2390 du XIIe siècle, dont la première main semble reproduire fidèlement un *codex* beaucoup plus ancien, les *Prolégomènes* sont immédiatement suivis d'une série d'observations astronomiques faites à Alexandrie, datées de 498 à 509 et commençant par les mots : « J'ai vu, moi Héliodore ».

---

(¹) Cette question est au reste essentiellement différente de celle de savoir comment dans un calcul donné, chez Archimède ou chez tel autre auteur, la fraction complémentaire a été déterminée.

(²) Barlaam et Nicolas Rhabdas. *Voir,* pour ce dernier, ma publication dans les *Notices et extraits des Manuscrits,* XXXII, 1886.

(³) Il attribue à ce philosophe, le maître de Proclus, d'avoir inventé, pour faciliter la division d'une fraction sexagésimale simple par une autre, par exemple de $120'''$ par $240^{\text{IV}}$, de substituer au dividende et au diviseur leurs quotients par un facteur commun. On ne peut voir là qu'une preuve singulière des lacunes que présentait, dans l'antiquité, l'enseignement classique du calcul.

(⁴) Ainsi il qualifie Ptolémée de *divin.*

En marge, se trouve la mention : « J'ai copié ceci sur l'exemplaire du philosophe » ([1]).

Il n'est pas douteux que cet Héliodore ne soit le fils d'Hermias et le frère d'Ammonius, qui avait suivi avec lui à Athènes les leçons de Proclus et qui, vers le commencement du VIe siècle, professait à Alexandrie, où il eut Eutocius pour disciple. Si, comme il semble bien, c'est de l'exemplaire de la Syntaxe appartenant à Héliodore que dérive notre manuscrit 2390, on peut lui attribuer les *Prolégomènes*, qui, en tout cas, sont dus à quelqu'un du même temps et de la même école, et qu'Eutocius a très probablement connu.

Jusqu'ici on n'a publié du texte des *Prolégomènes* que le début et la partie concernant la théorie des isopérimètres (dans l'édition de Pappus de Hultsch, vol. III, préf. XVII-XXI, 1139-1165) ainsi qu'un fragment sur la multiplication et la division des nombres sexagésimaux ([2]). C'est de la partie inédite qui fait suite que je tire le passage dont je donne ci-après la traduction (Ms. gr. 2390, fol. 9 verso, 2e colonne).

« Nous montrerons donc comment il faut prendre la racine carrée des nombres donnés. Proposons-nous de le montrer à la fois suivant ce qui se trouve dans les *Métriques* de Héron pour la mesure du triangle en général, et suivant ce qu'en a dit le philosophe Théon dans son commentaire. Héron, en effet, rencontre un certain nombre, 720, dont il prend la racine pour trouver l'aire du triangle d'après la méthode générale. Voici ce qu'il dit :

« Puisque 720 n'a pas de racine rationnelle, nous prendrons
» comme suit la racine avec une différence minime. Puisque le
» carré le plus voisin de 720 est 729, dont la racine est 27,
» divisez 720 par 27, il vient $26\frac{2}{3}$. Ajoutez-y 27, il vient $53\frac{2}{3}$, prenez
» la moitié, qui est $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi la racine de 720 sera à très peu
» près $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$; car, en multipliant ce nombre par lui-même, on a

(1) Cette série d'observations est celle que Boulliau a fait connaître sous le nom de *Thius*, parce qu'elles en comprennent une faite à Athènes et de date antérieure (475), qui porte la mention : τοῦ θείου τήρησις, ce qui signifie : *Observation du divin* (c'est-à-dire de Proclus).

(2) *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum*, primum edidit et notis illustravit C. Henry. Halle, Schmidt, 1879. Cette publication est très fautive et à peu près inutilisable.

» $720\frac{1}{36}$. Si nous voulons que la différence soit encore moindre » que la fraction $\frac{1}{36}$, nous prenons $720\frac{1}{36}$, et faisant la même chose, » nous trouverons que la différence tombe beaucoup au-dessous » de $\frac{1}{36}$ ».

» Voilà ce que dit Héron ».

Avec les notations modernes, soient : $A = a^2 + r$ un nombre non carré parfait, $a$ une valeur approchée de la racine, $r$ positif ou négatif, Héron enseigne de prendre pour $\sqrt{A}$ la nouvelle valeur approchée

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = a + \frac{r}{2a},$$

puis

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

C'est identiquement le procédé de Barlaam et de Rhabdas, dont l'antiquité est ainsi démontrée. Bien plus, on peut dire que ce fut le seul procédé classique chez les Grecs, quels que soient les artifices spéciaux qui aient pu être employés pour l'approximation effective de la racine dans tel ou tel cas particulier.

Le fragment dont nous avons donné la traduction provoque une autre remarque.

Dans les écrits géométriques qui nous ont été conservés sous le nom de *Héron*, le procédé d'extraction de la racine carrée est toujours supposé connu. Celui de ces écrits qui paraît le plus authentique, la *Geometria*, donne (p. 110-111 de l'édition de Hultsch) $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ pour racine approximative de 720 et comme aire d'un triangle faisant partie d'un trapèze et dont les côtés sont les nombres 7.8.9 (périmètre $2p = 24$). Cette aire est obtenue par la formule

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

et il est clair que c'est l'application de cette formule que notre auteur entend par *méthode générale pour la mesure du triangle* (καθολικὴ μέτρησις τοῦ τριγώνου). Or, dans la *Geometria*, nous trouvons précisément cette expression comme titre pour les problèmes où cette formule est employée (p. 71). Mais nous ne la rencontrons là que pour deux triangles dont l'aire est rationnelle, le scalène 13, 14, 15, et le rectangle 5, 12, 13.

D'autre part, dans la *Geometria*, la première racine approchée qui se présente n'est pas celle de 720, comme cela devait être dans les *Métriques*.

On ne peut guère supposer cependant que Héron ait rédigé deux Ouvrages distincts traitant de la même façon les mêmes sujets. Il s'ensuit que la *Geometria* ne peut tout au plus valoir que comme un extrait incomplet des *Métriques*.

## SUR UNE APPLICATION D'UN THÉORÈME DE M. HADAMARD;

Par M. Émile BOREL.

Voici comment M. Hadamard obtient le théorème dont il s'agit (1). Étant donnée une série, ayant pour rayon de convergence $\rho$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

supposons que, en la multipliant par un polynome

$$P(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_p x^p,$$

on obtienne une série

$$B(x) = P(x)\,A(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

ayant pour rayon de convergence $\rho'$. On a

$$b_{m+p} = a_{m+p} + A_1 a_{m+p-1} + \ldots + A_p a_m.$$

On en conclut, en supposant $q > p$, que le déterminant défini par l'égalité

$$D_{m,q} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+q} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots\ldots & \ldots & a_{m+q+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m+q} & a_{m+q+1} & \ldots\ldots & \ldots & a_{m+2q} \end{vmatrix}$$

(1) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement en série de Taylor*, § 15-19 (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892).

est égal à

$$\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p-1} & b_{m+p} & \ldots & b_{m+q} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p} & b_{m+p+1} & \ldots & b_{m+q+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m+q} & \ldots\ldots & \ldots & a_{m+q+p-1} & b_{m+q+p} & \ldots & b_{m+2q} \end{vmatrix}.$$

Or, la série $A(x)$ ayant pour rayon de convergence $\rho$ et la série $B(x)$, $\rho'$, le module de ce second déterminant, et par suite le module de $D_{m,q}$, est visiblement inférieur à

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^p \rho'^{q-p}}\right)^m,$$

$\varepsilon$ désignant un nombre positif que l'on pourra supposer aussi petit que l'on veut, pourvu que l'on prenne $m$ suffisamment grand. C'est là le résultat obtenu par M. Hadamard, qui en a fait de très intéressantes applications.

Je me place dans le cas particulier où les $a$ étant des nombres entiers (que je suppose réels, pour plus de netteté, mais rien ne serait changé s'ils étaient complexes), la fonction $A(x)$ n'a pas d'autres singularités que $p$ pôles à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho' > 1$. Déterminons alors un nombre $q$ vérifiant la relation

$$\rho^p \rho'^{q-p} > 1.$$

En prenant pour $P(x)$ le polynôme qui admet pour zéros les $p$ pôles dont on vient de parler, on voit que $D_{m,q}$ tend vers zéro lorsque $m$ augmente indéfiniment. Mais c'est un nombre entier; donc pour $m$ suffisamment grand, on a nécessairement

$$D_{m,q} = 0.$$

Désignons par $k$ *le plus petit* nombre tel que, pour $m$ suffisamment grand, on ait $D_{m,k} = 0$. Le nombre $k$ est au plus égal à $q$ et par hypothèse la relation

(1) $$m > m'$$

entraîne

(2) $$D_{m,k} = 0.$$

Je dis que l'on ne peut avoir en même temps

$$(3) \qquad D_{m,k-1} = 0.$$

En effet, l'identité

$$D_{m,k-1} D_{m+2,k-1} - D^2_{m+1,k-1} = D_{m,k} D_{m+2,k-2}$$

montre que les relations (2), (3) [et, par suite (1) et (3)] entraîneraient

$$D_{m+1,k-1} = 0.$$

On montrerait de même, en raisonnant de proche en proche, que l'on a quel que soit $h$

$$D_{m+h,k-1} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $k$. La relation (1) entraîne donc l'égalité (2) et l'inégalité

$$D_{m,k-1} \neq 0.$$

On voit dès lors immédiatement que l'on peut déterminer des nombres (visiblement rationnels) $u_1$, $u_2$, $u_3$, ..., $u_k$, tels que la relation

$$(\alpha) \qquad a_{m+k} = u_1 a_{m+k-1} + u_2 a_{m+k-2} + \ldots + u_k a_m$$

soit une conséquence de la relation (1); car si l'on écrit toutes les relations analogues à ($\alpha$), en donnant à $m$ successivement les valeurs $m'$, $m'+1$, $m'+2$, $m'+3$, ..., les valeurs des $u$ qui vérifient $k$ équations consécutives quelconques vérifient nécessairement la suivante.

Les relations ($\alpha$) montrent que $A(x)$ peut être considéré comme le quotient de deux polynomes à coefficients entiers. Donc : *Si une série à coefficients entiers, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, représente une fonction n'admettant sur le cercle de rayon un et à son intérieur aucune autre singularité que des pôles, elle est égale au quotient de deux polynomes à coefficients entiers* [1].

[1] On peut, en effet, trouver alors un nombre $\rho' > 1$ tel qu'il n'y ait que des pôles à l'intérieur du cercle de rayon $\rho'$.

En excluant ce dernier cas, on voit que :

*Une fonction méromorphe ne peut pas être représentée par une série de Taylor à coefficients entiers.*

Si une série à coefficients entiers a une valeur incommensurable pour une valeur commensurable particulière de la variable, elle ne peut être égale au quotient de deux polynomes à coefficients entiers; dès lors on est certain que la fonction qu'elle représente a d'autres points singuliers que des pôles à l'intérieur du cercle de rayon un, ou sur ce cercle. Tel est le cas, en particulier, lorsque les coefficients de la série sont limités et ne se reproduisent pas périodiquement.

Il est facile de comprendre pourquoi on ne peut trouver de théorèmes analogues, où n'interviendraient que les singularités comprises *à l'intérieur du cercle de rayon un*. En effet, si dans une série quelconque on remplace tous les coefficients par leur partie entière, ce qui revient à retrancher une série ayant un rayon de convergence au moins égal à un, on n'altère en aucune façon ces singularités. Donc, à leur égard, l'hypothèse que les coefficients sont entiers n'a rien de spécial.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Forsyth (A.-R.) — *A treatise on the functions of a complex variable.* Roy.-8°. Cambridge University Press. 21 sh.

Goldbreck (E.). — *Descartes' mathematisches Wissenschaftsideal.* Dissert. Gr. in-8°, 42 p. Berlin, Mayer und Müller. 1 m.

Güntsche (R.). — *Beitrag zur Integration der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. In-4°. 32 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

Lachlan (E.). — *An elementary treatise on modern pure Geometry.* In-8°. 292 p. London, Macmillan. 9 sh.

Laplace. — *Œuvres complètes de Laplace,* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. T. IX. In-4°, 489 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 20 fr.

Meyer (M.). — *Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der*

*linearen homogenen Differentialgleichungen 4. Ordnung mit Hilfe von Differentialinvarianten.* Dissert. Gr. in-8°, 46 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 20 pf.

Sauvage (P.). — *Les lieux géométriques en Géométrie élémentaire.* In-8°, vi-113 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 3 fr.

Ball (W.-W.-R.) — *A short history of Mathematics.* 2e édit., post.-8°, 530 p. London, Macmillan. 10 sh.

Picard (E.). — *Traité d'Analyse.* T. II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann.* In-8°, xiii-513 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

Tannery (P.). — *Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne.* In-8°, viii-371 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Beaulard (F.). — *Sur la coexistence du pouvoir rotatoire et de la double réfraction dans le quartz.* In-4°, 161 p. Marseille, imp. Barlatier et Barthelet.

Foussereau (G.). — *Polarisation rotatoire : Réflexion et réfraction vitreuses. Réflexion métallique.* In-8°, vii-344 p. avec fig. Paris, Carré.

Mascart (E.). — *Traité d'Optique.* T. III. In-8°, 696 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 20 fr.

Casey (J.). — *A treatise on the analytical Geometry of the point, line, circle and conic sections.* 2e édit., post.-8°, 584 p. Dublin (London, Longmans.) 12 sh.

Rebière (A.). — *Mathématiques et Mathématiciens.* Pensées et curiosités recueillies. 2e édit. In-8°, ii-570 p. Paris, Nony et Cie.

Poincaré (H.). — *Théorie des tourbillons.* In-8° raisin, 216 p. avec fig. Paris, Carré. 6 fr.

Dodgson (C.-A.). — *Curiosa mathematica.* Part. 2 : *Pillow problems thought-out during sleepless nights.* Gr. in-8°. London, Macmillan. 2 sh.

Stolz (O.). — *Grundzüge der Differential und Integralrechnung.* I. Thl. : *Reelle Veränderliche u. Functionen.* Gr.-8°, x-460 p. avec 4 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

Clausius (R.). — *Théorie mécanique de la Chaleur.* 2e édit., traduit sur la 3e édit. de l'original allemand par F. Folie et E. Ronkar. T. II : *Théorie mécanique de l'Électricité, y compris l'application des principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur.* In-8°, 472 p. Mons, Manceaux. 10 fr.

Guyou (E.). — *Étude théorique et expérimentale des déviations des compas placés sous cuirasse.* In-8°, 49 p. Paris, Imp. nationale.

DEICHMANN (C.). — *Das Problem des Raumes in der griechischen Philosophie bis Aristoteles*, gr. in-8°, 103 p. Leipzig, Fock. 2 m. 50 p.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — *La Géométrie des masses*. In-8°, 16 p. Paris, Carré.

PEANO (G.). — *Lezioni di Analisi infinitesimale*. 2 vol. in-8°. Torino, Bocca. 15 l.

CLAPEYRON (E.). — *Ueber die bewegende Kraft der Wärme*. Deutsch herausgegeben von R. Mewes. Gr. in-8°, 48 p. Berlin, Friedländer und Sohn. 1 m. 60 pf.

NEUMANN (C.). — *Die Haupt- u. Brennpunkte eines Linien-Systemes. Elementare Darstellg. der durch Möbius, Gauss u. Bessel begründeten Theorie*. 2. Aufl. Gr. in-8°, VIII-42 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

ADAM (W.). — *Geometrische Analysis u. Synthesis. Eine Sammlg. von* 636 *planimetr. Konstruktions-Aufgaben mit rein geometr. Lösung*. 2. Aufl. Gr. in-8°, IV-291 p. Postdam, Stein. 4 m.

CHITTENDEN (J.-B.). — *A presentation of the theory of Hermite's form of Lamé's equation, with a determination of the explicit forms in terms of the* p *function for the case* n *equal to three*. Dissert. gr. in-8°. 85 p. Leipzig, Teubner. 2 m. 80 pf.

GRAVELIUS (H.). — *Lehrbruch der höheren Analysis. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten u. techn. Hochschulen*. 1. Bd : Lehrbuch der Differentialrechnung. Gr. in-8°, VIII-323 p. Berlin, Dümmler. 6 m.

HARKNESS (J.) and F. MORLEY. — *A treatise on the theory of functions*. In-8°, 510 p. London, Macmillan. 18 sh.

LAISANT (C.-A.). — *Recueil de problèmes de Mathématiques* (*Géométrie descriptive*). In-8°, 206 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 5 fr.

OBENRAUCH (F.-J.). — *Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-histor. Studie*. Progr. Gr. in-8°, 33 p. Brünn, Prof. Ferd. Jos. Obenrauch. 2 m.

SCHOENFLIES (A.). — *La Géométrie du mouvement*. Exposé synthétique. Traduit de l'allemand par Ch. Speckel; suivie de *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites*. In-8°, VII-293 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 6 fr. 50 c.

POINCARÉ (H.). — *Thermodynamik. Vorlesungen*. Red. v. J. Blondin. Autoris. deutsche Ausgabe von W. Jager u. E. Gumlich. Gr. in-8°, XVIII-298 p. avec 41 fig. Berlin, Springer. 10 m.

BALL (W.-W.-R.). — *An essay on Newton's Principia*. In-8°, 180 p. London, Macmillan. 6 sh.

GOURSAT (E.). — *Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen* 1. *Ordng*. Bearb. von C. Bourlet. Deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit ein. Begleitworte von S. Lie. Gr. in-8°, XII-416 p. Leipzig, Teubner. 10 m.

Klein (F.). — *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals.* Translated by Fr. Hardcastle. In-8°. London, Macmillan. 4 sh. 6 d.

Lie (S.). — *Theorie der Transformationsgruppen.* 3. u. letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von F. Engel bearb. Gr. in-8°, xxvii-830 p. Leipzig, Teubner. 26 m.

Müller (E.-R.). — *Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometr. Analyse.* 2. Thl. *Verwandlugs- u. Theilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.* Bearb. nach System Kleyer. Gr. in-8°, v-86 p. avec 54 fig. Stuttgart, Maier. 2 m.

Oltramarre (G.). — *Essai sur le calcul de généralisation.* Gr. in-8°, 132 p. (Autogr.) Genève. Stapelmohr. 5 m.

Rohn (K.-E.) u. Pappritz. — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (in 2 Bänden). 1. Bd. Gr. in-8°, xviii-381 p. avec fig. Leipzig, Veit et C°. 11 m.; rel. 12 m.

Scheffler (H.). — *Beleuchtung u. Beweis eines Satzes aus Legendre's Zahlentheorie.* Gr. in-8°, 40 p. Leipzig, Foerster. 1 m.

Schrön (L.). — *Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis* 108000. Taf. I. d. Gesammtwerkes in 3 Tafeln. Ungarische Ausgabe von J. Sztoczek. Lex.-8°, vi-4-18-202 p. Brunswick, Vieweg und Sohn. 2 m. 40 pf.

Fletcher (L.). — *Die optische Indicatrix. Eine geometr. Darstellung der Lichtbewegung in Krystallen.* Uebersetz von H. Ambronn und W. König. Gr. in-8°, ix-69 p. avec fig. Leipzig, Barth. 3 m.

Klimpert (R.). — *Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).* 2. Bd. 1. Hälfte. *Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss u. Widerstand.* Bearb. nach System Kleyer. Gr. in-8°, viii-228 p. avec fig. Stuttgart, Maier. 5 m.

Scheffler (H.). — *Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz.* Gr. in-8°, iv-xxi-585 p. avec 2 pl. et 2 gravures. Leipzig, Foerster. 9 m.

Ziwet (A.). — *An elementary treatise on theoretical mechanics.* Part 2, *Kinematics.* In-8°, London, Macmillan. 8 sh. 6 d.

Boltzmann (L.). — *Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität u. des Lichtes.* II. Thl. *Verhältniss zur Fernwirkungstheorie, specielle Fälle der Elektrostatik, stationären Strömung u. Induction.* Gr. in-8°, viii-166 p. avec fig. et 2 pl. Leipzig, Barth. 5 m.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Sir W. THOMSON (Lord KELVIN). — Conférences scientifiques et allocutions (Constitution de la matière); traduites et annotées par M. *P. Lugol*, avec des extraits de Mémoires récents de Sir W. Thomson et quelques Notes par M. *Brillouin*.

M. H. Poincaré, dans son *Électricité et Optique* (t. I), parle du « sentiment de malaise et même de défiance » qu'un lecteur français éprouve en ouvrant le Livre de Maxwell. En lisant les *Conférences et allocutions* de Sir W. Thomson, on est d'abord sous le charme d'un langage merveilleux de clarté et de vivacité, qui, sans le secours d'autre symbole que les mots usuels et les comparaisons familières, excelle à donner une idée juste sur quelques-uns des sujets les plus délicats de la Physique. Mais le livre achevé, quand on a soigneusement relu les nombreux extraits empruntés à diverses parties de l'œuvre de Thomson, que M. Brillouin a coordonnées en y joignant des Notes fort instructives, si l'on jette les yeux sur le sous-titre du volume : *Constitution de la matière;* et si l'on se demande comment Sir W. Thomson comprend en définitive la constitution de la matière, on éprouve quelque chose de ce sentiment de malaise dont parlait M. Poincaré. Les molécules matérielles sont-elles des gyrostats articulés? Sont-elles des solides perforés traversés par des circulations de liquides? ou bien des parallélépipèdes dont les arêtes sont formées par des renvois de sonnettes venant s'accrocher aux sommets? La réponse du lecteur qui a lu les *Conférences scientifiques* serait sans doute que la matière n'est pas l'une de ces choses plutôt qu'une autre; elle est, si l'on veut, tout cela en même temps.

Nous retrouvons dans ces conférences deux tendances qui paraissent s'exclure et qui se trouvent pourtant réunies dans le même esprit chez la plupart des savants anglais : un éclectisme, qui fait exposer l'une à la suite de l'autre deux théories contradictoires, et un objectivisme qui fait parler quelquefois d'hypothèses dépassant la science sur le même ton affirmatif que du contenu de la science même. Entre ces deux tendances, l'opposition

n'est qu'apparente : certains passages de Sir W. Thomson sont à cet égard bien significatifs; ils nous donnent la clef du sens que les physiciens anglais attachent à ces mots : *explication* d'un phénomène, *intelligence* d'un phénomène.

« Il me semble que le vrai sens de la question : « Comprenons- » nous, ou ne comprenons-nous pas un sujet particulier en Phy- » sique? » est : « Pouvons-nous faire un modèle mécanique » correspondant? » J'ai une extrême admiration pour le modèle mécanique de l'induction électromagnétique dû à Maxwell; il a créé un modèle capable d'exécuter toutes les opérations merveilleuses que l'électricité fait dans les courants induits.

» Je ne suis jamais satisfait, tant que je n'ai pas pu faire un modèle mécanique de l'objet; si je puis faire un modèle mécanique, je comprends; tant que je ne puis pas faire un modèle mécanique, je ne comprends pas, et c'est pour cela que je ne comprends pas *la* théorie électromagnétique de la lumière. Je crois fermement en *une* théorie électromagnétique de la lumière; quand nous comprendrons l'électricité, le magnétisme et la lumière, nous les verrons comme des parties d'un tout; mais je demande à comprendre la lumière le mieux possible sans introduire des choses que je comprends encore moins. Voilà pourquoi je m'adresse à la Dynamique pure. » (Ce vol., p. 299.)

Cette définition du mot *comprendre* ne saurait être admise sans provoquer des contestations. A vrai dire, il y a autant de définitions du mot *comprendre* qu'il y a d'esprits différents; et celle de Sir W. Thomson caractérise à merveille une tournure d'esprit fréquente chez les savants anglais ([1]). Mais pour bien des gens, comprendre, c'est autre chose : comprendre une idée, c'est la rattacher par un lien logique à des idées antérieurement acquises auxquelles l'esprit est déjà habitué; comprendre un phénomène physique, c'est saisir une liaison nécessaire entre ce phénomène et d'autres phénomènes, de telle sorte que la notion de ce phénomène ne constitue plus dans l'esprit une notion isolée.

---

([1]) *Voir*, sur ce sujet, P. Duhem, *L'École anglaise et les théories physiques* (*Revue des questions scientifiques*, 2e série, t. IV, p. 345).

Si l'on arrive à établir définitivement cette proposition qui résume *la* théorie électromagnétique : « La cause des sensations lumineuses est un phénomène électromagnétique d'un genre spécial », il me semble qu'on aura compris la lumière, aussi bien qu'on a compris le son quand on a prouvé que la cause des sensations auditives est un mouvement de la matière ordinaire qui satisfait à des conditions spéciales.

Si l'Optique devenait un Chapitre de l'électromagnétisme comme l'Acoustique est un Chapitre de l'élasticité, il resterait à comprendre l'électricité et le magnétisme, comme aussi bien il reste à comprendre la matière élastique, mais il ne resterait plus à comprendre la lumière. Se faire une image concrète d'un phénomène est souvent utile pour arriver à l'intelligence du phénomène : l'image concrète ne saurait ni remplacer, ni surtout constituer cette intelligence.

Pour prendre un exemple, comprendre le principe d'Huygens, sera-ce voir avec les yeux de son imagination de petites particules mobiles se heurter de manière à neutraliser leur mouvement dans une région déterminée de l'espace? ou bien sera-ce montrer qu'il n'y a rien dans l'énoncé du principe qui ne soit implicitement contenu dans la notion même de petit ébranlement d'un milieu élastique, en établissant, comme l'a fait Kirchhoff, qu'il constitue une propriété analytique inhérente aux fonctions qui vérifient l'équation des petits mouvements?

I. La première conférence traite de *l'attraction capillaire.* Lord Kelvin y indique en passant le tracé graphique de la méridienne d'une surface capillaire : une Note de M. Brillouin à la fin du Volume reprend et généralise le problème. Nous trouvons encore en Appendices la célèbre Note de Thomson sur l'équilibre d'une vapeur en présence d'une surface liquide courbe, et le Mémoire de Lord Rayleigh sur la mesure de la quantité d'huile nécessaire pour arrêter les mouvements du camphre sur l'eau.

Dans une Note très courte Sir W. Thomson donne un exemple d'une constitution de la matière solide qui permettrait d'expliquer la cohésion sans imaginer d'autres forces que la gravitation et d'autres lois que celle de Newton. En condensant toute la masse de deux petits cubes en contact, dans un très grand nombre de

barres carrées perpendiculaires à la face commune, de façon que chaque barre d'un groupe soit en contact parfait avec une barre de l'autre, on peut augmenter indéfiniment leur attraction : cette hypothèse laisse évidemment subsister bien des difficultés; elle est sommairement discutée par M. Brillouin.

II. La seconde Conférence a trait aux unités électriques; la XI[e] est une Conférence sur les mesures électriques, antérieure à la précédente. Ce sont des chefs-d'œuvre d'exposition. La résistance électromagnétique est une vitesse; la conductibilité électrostatique est une vitesse; ces énoncés par eux-mêmes assez obscurs, Sir W. Thomson excelle à les illustrer par ses images qui parlent aux yeux, du moulin à écureuil et de la sphère qui se dégonfle. Quoi de plus propre à faire bien saisir ce qu'est un système d'unités que cette hypothèse d'un explorateur perdu en un point de l'Univers et reconstituant une à une toutes les unités mécaniques à l'aide de mesures purement électriques? M. Brillouin indique en Note un moyen de restitution des unités purement thermodynamique, qui a l'avantage de ne pas supposer la permanence des propriétés du milieu qui propage la lumière et les perturbations électriques.

On rattache les unités électriques aux unités mécaniques en donnant arbitrairement des dimensions nulles et une valeur égale à l'unité au coefficient qui figure dans l'une des formules de Coulomb. Lord Kelvin indique ce que deviendraient les formules de Mécanique si l'on faisait dériver par le même procédé l'unité de masse des unités de longueur et de temps, en traitant la formule de la loi newtonienne de gravitation comme on traite en électricité les formules de Coulomb. Des notes de M. Lugol éclaircissent ces résultats. Peut-être y a-t-il lieu d'insister à cette occasion sur ce qu'il y a d'arbitraire à procéder ainsi, qu'il s'agisse d'électrostatique et de magnétisme ou de gravitation universelle. L'une des grandeurs électriques ou magnétiques reste une grandeur fondamentale, qu'il est impossible de réduire aux unités mécaniques sans faire intervenir les propriétés spécifiques d'un milieu. Ne peut-on pas dire aussi de la masse qu'elle est irréductible aux unités de longueur et de temps, parce qu'en somme, dans l'expression numérique de la loi de la gravitation universelle,

interviennent implicitement les propriétés spécifiques du milieu dans lequel se meuvent les corps célestes?

Dans une Note *Sur les dimensions des unités électriques*, M. Brillouin développe d'ailleurs les réserves nécessaires. Il insiste sur ce fait, qu'il existe une lacune, il manque une loi expérimentale pour qu'on puisse relier les grandeurs électriques et magnétiques aux grandeurs mécaniques : pour suppléer à cette loi qui manque, on introduit une hypothèse arbitraire : M. Brillouin donne un Tableau général des dimensions des grandeurs électriques et magnétiques, si l'on part d'un certain nombre d'hypothèses différentes sur les dimensions de la force électrique. Il ne retient pour les discuter que les systèmes qui satisfont à la condition de donner aux grandeurs électriques dirigées, et à celles-là seules, les dimensions de grandeurs mécaniques impliquant aussi l'idée de direction, et il indique ses préférences pour l'un d'eux qui fait de la quantité d'électricité un nombre abstrait, sans dimensions.

III. Sur le *démon distributeur de Maxwell*, sur *la doctrine de Maxwell-Boltzmann au sujet de la distribution de l'énergie cinétique*, Lord Kelvin donne, soit un simple exposé, soit une discussion critique : M. Brillouin rappelle à juste titre l'attention sur une définition de la *température*, trop peu connue, de M. Boussinesq; la température absolue d'un petit volume d'éther serait la demi-force vive qu'il possède sous l'unité de masse, et un corps serait dit à une certaine température absolue quand son état vibratoire n'est pas modifié par son introduction dans l'éther à la même température.

IV. *La grandeur des atomes*. — Ici, Sir W. Thomson commence par une définition très nette de l'*atome* physique; on est arrivé à l'atome quand on ne peut pas pousser la division plus loin sans faire perdre à la matière étudiée ses propriétés : « on ne peut diviser un morceau de verre en fragments d'un diamètre inférieur à $\frac{1}{100000}$ de centimètre sans le détruire et lui faire perdre la propriété de verre, de même qu'une brique « n'a pas les propriétés d'un mur de briques ». L'atome étant ainsi défini, on pourra fort bien arriver à des mesures différentes de sa grandeur suivant le

genre de phénomène auquel on s'adresse; si les divers ordres de considération conduisent au même ordre de grandeur, ce sera une présomption en faveur de l'existence d'une certaine réalité concrète répondant à la définition précédente. Les phénomènes d'électricité de contact se produisant entre le cuivre et le zinc amèneraient un dégagement de chaleur énorme qui fondrait un mélange de poudres des deux métaux si l'action électrique de contact ne cessait pas, quand la division est poussée au cent-millionième de centimètre. Une lame mince capillaire qui va se crever, s'amincit progressivement, en prenant l'échelle des colorations successives jusqu'au noir : l'examen de ces colorations permet de conclure que l'épaisseur minimum d'une pareille membrane est d'environ $\frac{1}{50}$ de longueur d'onde de la raie D; d'ailleurs, si la membrane, réduite à une épaisseur de $\frac{1}{100000000}$ de centimètre, conservait sa résistance à l'extension, le travail nécessaire pour augmenter un peu son étendue suffirait pour la réduire en vapeur. La théorie de la lumière nous amènerait à des conclusions du même genre : la théorie de la dispersion de Cauchy conduit à l'idée d'une hétérogénéité élémentaire de la matière et permet d'obtenir une évaluation approchée du nombre de molécules par longueur d'onde; on arrive ainsi à des nombres très faibles : douze molécules d'eau ou d'alcool, quatre de sulfure de carbone dans une longueur d'onde de la lumière du sodium. Enfin, la théorie cinétique des gaz donne $\frac{1}{100000}$ de centimètre pour le libre parcours moyen. On est conduit ainsi, pour les distances moyennes entre les centres de molécules voisines, à des nombres variant de $\frac{1}{5000000}$ à $\frac{1}{1000000000}$ de centimètre, dans les liquides ou les solides transparents.

V. *L'élasticité envisagée comme pouvant être un mode de mouvement.* — VI. *Acheminement vers une théorie cinétique de la matière.* — L'idée fondamentale de Thomson est qu'on peut réaliser des cas de stabilité et de raideur élastiques avec des corps en mouvement dépourvus eux-mêmes de rigidité.

Aux exemples classiques du cerceau et de la toupie, il en ajoute de nouveaux : une chaîne sans fin, flexible, tournant rapidement sur une poulie, se tient droite et raide un certain temps si on la fait sauter hors de la poulie; un disque de caoutchouc non tournant *acquiert la raideur du bord d'un chapeau à la Rubens;*

enfin, la belle expérience des anneaux de fumée dégagés d'une ouverture circulaire percée dans une boîte, et qui, sur le point d'éprouver un choc l'un contre l'autre, s'écartent et se mettent à vibrer comme une bande de caoutchouc. Avec des matériaux entièrement dépourvus d'élasticité, mais animés de mouvements, on peut donc constituer des systèmes résistant aux déformations : on peut, en particulier, se représenter aussi un milieu, soit à deux (p. 338), soit à trois dimensions (p. 349), possédant la propriété fondamentale de l'éther lumineux : une rigidité énorme contre tout déplacement entraînant une rotation, en même temps que la faculté de subir sans aucune rigidité les déformations sans rotation.

On trouvera dans les Notes additionnelles (II à VI) des développements sur ces diverses images qu'on peut se faire de la matière ordinaire ou de l'éther; l'une des conséquences les plus curieuses qu'en ait tirées Thomson est la *découverte* de la dispersion anomale, *découverte* entendue en ce sens que Thomson n'apprit que le phénomène était connu qu'après l'avoir aperçu dans ses formules.

M. Brillouin se range du côté de Thomson qui attribue la dissipation d'énergie lumineuse à laquelle est liée la dispersion à des chocs entre molécules, c'est-à-dire à l'introduction d'actions non linéaires entre les molécules, tandis qu'Helmholtz introduit simplement un terme de frottement proportionnel à la vitesse dans les équations du mouvement.

VII. *Les six portes de la connaissance.* — Le principal objet de la Conférence est de développer une idée de Thomas Reid sur la subdivision du sens du toucher en deux autres : le sens de rugosité et le sens de la température.

VIII. *La théorie ondulatoire de la lumière.* — Fort belle Conférence d'exposition, donnée en Amérique. On y remarquera, en passant, la protestation très vigoureuse contre la persistance des Anglais à se servir de leur vieux système de mesures.

IX et X. *Sur l'âge de la chaleur solaire* (IX) *et Sur la chaleur solaire* (X). — Ces deux Conférences sont consacrées sur-

tout à l'exposé de la *théorie météorique*, sous la forme que lui a donnée Helmholtz : la chaleur solaire a dû être engendrée par le choc de fragments de matière qui, placés d'abord très loin, se sont rejoints en vertu de leurs attractions mutuelles et ont formé la masse actuelle; *la contraction* due au refroidissement donne, grâce au travail accompli par la gravitation mutuelle de toutes les parties de la masse qui se contracte, cette vaste capacité d'emmagasinement de la chaleur grâce à laquelle le refroidissement a été et continue à être si lent. Lord Kelvin, d'accord avec Newcomb, ne pense pas que la lumière du Soleil ait brillé plus de 20 millions d'années dans le passé de l'histoire de la Terre, ni qu'on puisse compter pour l'avenir sur plus de 5 ou 6 millions d'années de lumière. Les notions de température du Soleil, de chaleur spécifique du Soleil, sont soigneusement précisées.

L'Ouvrage est, en somme, et par son contenu, et par la forme sous laquelle les problèmes sont présentés, d'un haut intérêt pour tous ceux qu'attire la *Philosophie naturelle,* et il faut remercier MM. Lugol et Brillouin d'avoir rendu plus accessible aux lecteurs français cette Partie, qui n'est pas la moins originale, de l'œuvre de Thomson. BERNARD BRUNHES.

---

# MÉLANGES.

## SUR LES TRIANGLES DE M. SCHWARZ;

PAR M. W. KAPTEYN.

Je me propose d'étudier les relations qui existent entre les éléments des triangles formés par des arcs de cercle qui coupent orthogonalement un cercle fondamental dont je suppose le rayon égal à l'unité. On sait que ces triangles de M. Schwarz jouent un rôle important dans la théorie des fonctions fuchsiennes et que M. Poincaré a obtenu quelques-unes des propriétés de ces triangles par des considérations de la Géométrie non-euclidienne. Nous allons, au contraire, nous servir exclusivement des considérations empruntées à la Géométrie ordinaire.

1. Soient $z$ une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan, $t$ une fonction imaginaire de cette variable, définie par la relation linéaire

$$(1) \qquad t = \frac{\alpha z + \beta}{\beta_0 z + \alpha_0},$$

où les constantes imaginaires $\alpha$ et $\beta$ et leurs conjuguées $\alpha_0$ et $\beta_0$ sont liées par l'équation

$$\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 = 1.$$

La substitution (1) n'altère point le cercle fondamental

$$zz_0 - 1 = 0,$$

et transforme tout cercle orthogonal au cercle fondamental

$$zz_0 + \theta z + \theta_0 z_0 - 1 = 0,$$

en un autre

$$tt_0 + \theta' t + \theta'_0 t_0 - 1 = 0,$$

qui est également orthogonal au cercle fondamental.

Il existe en général deux valeurs de $z$

$$(2) \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} + \dfrac{1}{2\beta_0}\sqrt{(\alpha + \alpha_0)^2 - 4}, \\ z_2 = \dfrac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} - \dfrac{1}{2\beta_0}\sqrt{(\alpha + \alpha_0)^2 - 4}, \end{cases}$$

qui sont égales aux valeurs correspondantes de $t$; ce sont ces points qu'on appelle *les points doubles de la substitution.*

Si $(\alpha + \alpha_0)^2 > 4$, les points doubles sont distincts; dans ce cas, on vérifie aisément que les points doubles sont situés sur le cercle fondamental et que la relation (1) peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{t - z_1}{t - z_2} = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

où le multiplicateur

$$K = \left[\frac{\alpha + \alpha_0 - \sqrt{(\alpha + \alpha_0)^2 - 4}}{2}\right]^2$$

prend une valeur réelle.

Si $(\alpha + \alpha_0)^2 < 4$, les points doubles sont encore distincts; dans ce cas, leurs positions sont inverses par rapport au cercle fondamental. En écrivant maintenant la relation (1) dans la forme (3), on obtient pour le multiplicateur

$$K = \frac{\alpha + \alpha_0 - i\sqrt{4 - (\alpha - \alpha_0)^2}}{\alpha + \alpha_0 + i\sqrt{4 - (\alpha + \alpha_0)^2}}$$

une valeur imaginaire dont le module est égal à l'unité.

Si $(\alpha + \alpha_0)^2 = 4$, les deux points doubles se confondent et la substitution peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \frac{1}{t - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + K,$$

où

$$z_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{2\beta_0} \quad \text{et} \quad K = \pm \beta_0;$$

on prendra le signe supérieur ou inférieur selon que $\alpha - \alpha_0 = 2$ ou $\alpha - \alpha_0 = -2$.

La substitution s'appelle respectivement dans les trois cas énumérés *hyperbolique*, *elliptique* ou *parabolique*.

Nous passons sous silence les cas où $(\alpha + \alpha_0)^2$ sont imaginaires ou négatifs parce que nous ne nous occuperons point de ces substitutions.

2. On pourra toujours trouver une substitution hyperbolique de la forme normale (1) telle que le centre du cercle fondamental ou l'origine des coordonnées soit le transformé d'un point quelconque situé à l'intérieur du cercle fondamental.

En effet, soit $re^{i\theta}$ (A) le point qu'on veut transformer dans l'origine, il suffira de prendre la substitution hyperbolique

$$(5) \qquad \frac{t - e^{i\theta}}{t + e^{i\theta}} = K\frac{z - e^{i\theta}}{z + e^{i\theta}}$$

et de déterminer le multiplicateur K par la condition que pour $z = re^{i\theta}$ on a $t = 0$. De cette manière, on obtient

$$K = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

En substituant cette valeur et en résolvant $t$, la substitution précédente s'écrit

$$(6)\qquad t = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,z - \dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,e^{i\theta}}{-\dfrac{re^{-i\theta}}{\sqrt{1-r^2}}\,z + \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}},$$

qui présente la forme normale (1).

Il est évident que la même substitution transformera en un diamètre du cercle fondamental un cercle quelconque passant par le point A.

Pour transformer un cercle donné passant par le point $A(re^{i\theta})$ dans un autre qui passe également par le point A et coupe le premier sous un angle donné $\varphi$, on prendra la substitution elliptique déterminée par les points doubles $A(re^{i\theta})$ et $A'\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)$ et le multiplicateur $e^{i\varphi}$. Cette substitution

$$(7)\qquad \frac{t - re^{i\theta}}{t - \dfrac{1}{r}e^{i\theta}} = e^{i\varphi}\,\frac{z - re^{i\theta}}{z - \dfrac{1}{r}e^{i\theta}},$$

qui fait tourner la tangente du premier cercle au point A par un angle $\varphi$ dans le sens positif (contraire aux aiguilles d'une montre), mise dans la forme normale (1), s'écrit

$$(8)\qquad t = \frac{\dfrac{\operatorname{sh}\left(u + \dfrac{i\varphi}{2}\right)}{\operatorname{sh} u}\,z - \dfrac{ie^{i\theta}\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh} u}}{\dfrac{ie^{-i\theta}\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh} u}\,z + \dfrac{\operatorname{sh}\left(u - \dfrac{i\varphi}{2}\right)}{\operatorname{sh} u}},$$

où $r$ est représenté par $e^{-u}$.

Un cas particulier de cette substitution se présente quand $u = \infty$; dans ce cas on obtient

$$(9)\qquad t = \frac{z e^{\frac{i\varphi}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}},$$

ce qui démontre qu'il y a toujours une substitution elliptique qui

permet de tourner un diamètre du cercle fondamental par un angle donné.

3. En appelant deux figures congruentes lorsqu'elles sont transformées l'une de l'autre par une substitution de la forme (1), et posant

$$z = re^{i\theta},$$

(10) $$L = 2\int \frac{\operatorname{mod} dr}{1 - r^2},$$

(11) $$S = 4\int\int \frac{r\,dr\,d\theta}{(1 - r^2)^2},$$

on vérifie aisément que deux arcs congruents ont même L, et deux aires congruentes ont même S. En effet, de la substitution (1) on déduit

$$1 - tt_0 = \frac{1 - zz_0}{(\beta_0 z + \alpha_0)(\beta z_0 + \alpha)}$$

et

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(\beta_0 z + \alpha_0)^2},$$

par suite,

$$1 - tt_0 = (1 - zz_0) \operatorname{mod} \frac{dt}{dz},$$

ou, en écrivant

$$t = \rho e^{i\omega},$$

$$\frac{\operatorname{mod} dt}{1 - \rho^2} = \frac{\operatorname{mod} dr}{1 - r^2},$$

ce qui prouve les théorèmes précédents que nous devons à M. Poincaré [1].

4. Calculons maintenant la L d'un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental.

Soient A et B les extrémités de l'arc et soient $a$ et $b$ les quantités imaginaires représentées par ces points; cela posé, la substitution (6) ou

$$t = \frac{z - a}{-a_0 z + 1}$$

transportera A à l'origine O des coordonnées et le point B dans

---

[1] *Acta Math.*, t. I, p. 202.

un point B′ qui représente la valeur imaginaire $b'$ déterminée par l'équation

$$b' = \frac{b - a}{-a_0 b + 1}.$$

D'après l'article précédent, la L de l'arc AB est égale à la L de la ligne droite OB′, transformée de l'arc donné. Or

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathrm{OB'}) = 2\int_0^{\operatorname{mod} b'} \frac{\operatorname{mod} dz}{1 - z^2} = \log \frac{1 + \operatorname{mod} b'}{1 - \operatorname{mod} b'},$$

par suite,

$$\operatorname{ch} \mathrm{L} = \frac{1 + \operatorname{mod}^2 b'}{1 - \operatorname{mod}^2 b'} = \frac{1 + b' b'_0}{1 - b' b'_0};$$

en remplaçant $b'$ et $b'_0$ par

$$\frac{b - a}{-a_0 b + 1} \quad \text{et} \quad \frac{b_0 - a_0}{-a b_0 + 1},$$

la formule précédente se réduit à

$$(12) \qquad \operatorname{ch} \mathrm{L} = \frac{(1 + a a_0)(1 + b b_0) - 2(a_0 b + a b_0)}{(1 - a a_0)(1 - b b_0)}.$$

5. Considérons à présent un triangle dont les côtés sont des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental et supposons que tous les sommets sont situés à l'intérieur du dernier cercle.

On sait que toute substitution de la forme (1) n'altère ni les angles, ni les L des côtés du triangle; il s'ensuit que les relations entre les angles et les L des côtés ne changeront point quand on transforme le triangle donné par une ou plusieurs substitutions de la forme (1). Cela posé, nous appliquerons d'abord une substitution de la forme (6) qui porte un des sommets à l'origine des coordonnées et par laquelle les deux côtés adjacents se transformeront en lignes droites. Ensuite, nous introduirons une seconde substitution de la forme (9) de telle sorte qu'un des côtés vienne coïncider avec l'axe réel. Soit ABC (*fig.* 1) le triangle donné après avoir subi les transformations dont nous avons parlé, et représentons par $a$ et $b$ la valeur imaginaire et la valeur réelle dont les affixes sont respectivement les sommets A et B.

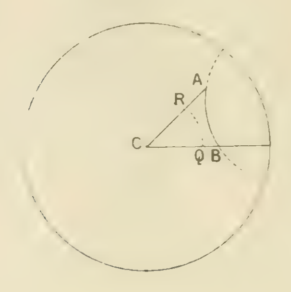
D'après la formule (12), on aura

$$\operatorname{ch} L(CB) = \frac{1 + b^2}{1 - b^2},$$

$$\operatorname{ch} L(CA) = \frac{1 + aa_0}{1 - aa_0},$$

$$\operatorname{ch} L(AB) = \frac{(1 + aa_0)(1 + b^2) - 2b(a + a_0)}{(1 - aa_0)(1 - b^2)}.$$

Fig. 1.




En écrivant, au lieu de la dernière de ces équations,

$$\operatorname{ch} L(AB) = \frac{(1 + aa_0)(1 + b^2) - 4b \bmod a \cos C}{(1 - aa_0)(1 - b^2)},$$

et, en remarquant que

$$\operatorname{sh} L(CB) = \frac{2b}{1 - b^2}, \qquad \operatorname{sh} L(CA) = \frac{2 \bmod a}{1 - aa_0},$$

cette dernière équation prend la forme

$$\operatorname{ch} L(AB) = \operatorname{ch} L(CB) \operatorname{ch} L(CA) - \operatorname{sh} L(CB) \operatorname{sh} L(CA) \cos C,$$

ou, en introduisant les abréviations,

$$L(AB) = (c), \qquad L(CB) = (a), \qquad L(CA) = (b),$$

(13) $$\operatorname{ch}(c) = \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b) \cos C.$$

Cette équation exprime la relation fondamentale existant entre les L des trois côtés et un angle de tout triangle dont les côtés sont orthogonaux au cercle fondamental et dont les sommets sont situés à l'intérieur de ce cercle.

6. *Relation entre les* L *de deux côtés et les angles opposés.* — Pour avoir une relation entre les L de deux côtés et les angles

opposés, on écrira

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(c)}{\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}\right)^2},$$

ou, en remplaçant $\operatorname{sh}^2(a)$ et $\operatorname{sh}^2(b)$ par les valeurs équivalentes

$$\operatorname{ch}^2(a) - 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2(b) - 1,$$

$$\frac{\sin C}{\operatorname{sh}(c)} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{ch}^2(b) - \operatorname{ch}^2(c) + 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)\operatorname{ch}(c)}}{\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(c)}.$$

La valeur de $\frac{\sin C}{\operatorname{sh}(c)}$ ne change pas quand on permute les lettres $a$, $b$, $c$; il en résulte la même valeur pour $\frac{\sin B}{\operatorname{sh}(b)}$ et pour $\frac{\sin A}{\operatorname{sh}(a)}$; par conséquent, on aura

$$(14) \qquad \frac{\sin A}{\operatorname{sh}(a)} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh}(b)} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh}(c)}.$$

7. *Relation entre cinq éléments.* — On obtient des relatio entre cinq éléments en posant, dans la formule

$$\operatorname{ch}(a) = \operatorname{ch}(b)\operatorname{ch}(c) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(c)\cos A,$$

la valeur

$$\operatorname{ch}(c) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\cos C;$$

il vient ainsi

$$\operatorname{ch}(a) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}^2(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(b)\cos C - \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(c)\cos A;$$

en faisant passer dans le premier membre le premier et le deuxième terme du second membre, on obtient

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)\cos C = \operatorname{ch}(c)\cos A.$$

Cette relation étant homogène par rapport à $\operatorname{sh}(a)$, $\operatorname{sh}(b)$ et $\operatorname{sh}(c)$, on peut remplacer ces quantités par les sinus proportionnels

$$\sin A, \quad \sin B, \quad \sin C,$$

et l'on obtient ainsi la nouvelle formule

$$(15) \qquad \operatorname{ch}(a)\sin B - \operatorname{ch}(b)\cos C \sin A = \cos A \sin C.$$

8. *Relation entre les* L *de deux côtés, l'angle compris par ces côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.* — En remplaçant dans

la formule

$$\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)\,\mathrm{ch}(c) - \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{sh}(c)\cos A,$$

ch($c$) par

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\cos C,$$

et sh($c$) par

$$\mathrm{sh}(a)\frac{\sin C}{\sin A},$$

on obtient

$$\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}^2(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(b)\cos C - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\sin C\cot A$$

ou

(16) $$\mathrm{coth}(a)\,\mathrm{sh}(b) - \cot A\sin C = \mathrm{ch}(b)\cos C.$$

9. *Relation entre un côté et les trois angles.* — En éliminant ch($b$) entre les deux équations

$$\mathrm{ch}(a)\sin B - \mathrm{ch}(b)\cos C\sin A = \cos A\sin C,$$
$$\mathrm{ch}(b)\sin A - \mathrm{ch}(a)\cos C\sin B = \cos B\sin C,$$

de la forme (15), on trouve

(17) $$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C\,\mathrm{ch}(a).$$

10. Des formules (13), (14), (16) et (17), on déduit aisément pour un triangle rectangle dans lequel $C = \frac{\pi}{2}$ les dix formules suivantes

$$\mathrm{ch}(c) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \cot A\cot B,$$
$$\mathrm{sh}(a) = \mathrm{sh}(c)\sin A,$$
$$\mathrm{sh}(b) = \mathrm{sh}(c)\sin B,$$
$$\mathrm{th}(a) = \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{tang}\,A = \mathrm{th}(c)\cos B,$$
$$\mathrm{th}(b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{tang}\,B = \mathrm{th}(c)\cos A,$$
$$\cos A = \mathrm{ch}(a)\sin B,$$
$$\cos B = \mathrm{ch}(b)\sin A.$$

11. Pour faire une application des dernières formules, je me propose de calculer les éléments d'un triangle rectangle dont le sommet A (*fig.* 2) situé à l'origine des coordonnées est donné et la L du côté opposé est équivalente à l'angle A. J'entends par cette équivalence que

$$(A) = \int_0^A \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\mathrm{tang}\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = (a).$$

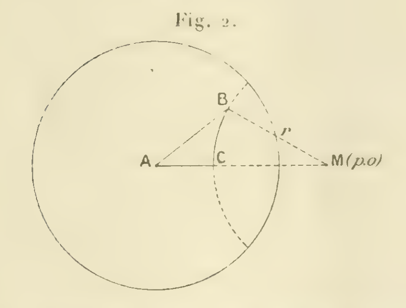
En posant $C = \frac{\pi}{2}$. On a, d'après les formules de l'article précédent,

$$\mathrm{sh}(c) = \frac{\sin A}{\mathrm{sh}(A)},$$

$$\sin B = \frac{\cos A}{\mathrm{ch}(A)},$$

$$\mathrm{sh}(b) = \frac{\mathrm{th}(A)}{\mathrm{tang}\, A}.$$

Fig. 2.




Ajoutons-y les expressions bien simples pour le rayon $r$ du cercle BC et pour la distance $p$ du centre de ce cercle à l'origine.

On a

$$(a) = 2\int \frac{ds}{1-\rho^2} = r\int_0^A \frac{d\theta}{p^2\cos^2\theta - 1} = \frac{1}{2}\log\frac{r+\mathrm{tang}\, A}{r-\mathrm{tang}\, A},$$

par suite,

$$r = \frac{\mathrm{tang}\, A}{\mathrm{th}(A)}.$$

En comparant cette formule avec

$$\mathrm{sh}(b) = \frac{\mathrm{th}(A)}{\mathrm{tang}\, A},$$

on obtient

$$r = \frac{1}{\mathrm{sh}(b)}$$

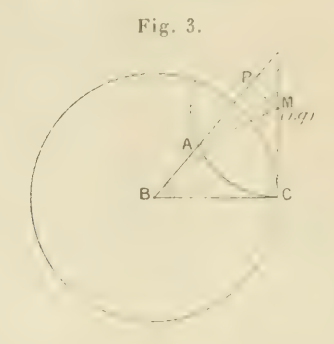
et

$$p = \sqrt{r^2+1} = \coth(b).$$

**12.** Quand un des sommets du triangle est situé sur la circonférence du cercle fondamental, il est évident que l'angle correspondant s'annule et que les L des côtés adjacents deviennent infinis.

Pour obtenir directement la relation qui existe dans ce cas entre les trois éléments restants, nous choisirons d'abord une substitution hyperbolique convenable permettant de transporter un des sommets B (*fig.* 3) à l'origine des coordonnées, ensuite nous

Fig. 3.




transformerons le triangle par une substitution elliptique tellement choisie que le côté qui mène de l'origine au sommet C, situé sur la circonférence du cercle fondamental, coïncide avec l'axe réel.

Soient

ABC le triangle après ces transformations;
$q$ l'ordonnée du centre M de l'arc AC;
MP la perpendiculaire abaissée de M sur le côté AB du triangle.

En admettant que le point A représente la quantité imaginaire $a$, la formule (12) donne

$$\mathrm{ch}(c) = \frac{1 + aa_0}{1 - aa_0}.$$

Pour obtenir la valeur de $a$ en fonction des angles A et B nous n'aurons qu'à déterminer les coordonnées du point A où le cercle

$$x^2 - 2x + y^2 - 2qy + 1 = 0$$

et la droite

$$y - x \operatorname{tang} B = 0$$

se rencontrent.

En remarquant que

$$q \cos A = \mathrm{MP} = (\operatorname{tang} B - q) \cos B,$$

on obtient aisément pour ces coordonnées

$$x = \frac{\cos B[1 + \cos(A + B)]}{\cos A + \cos B},$$

$$y = \frac{\sin B[1 + \cos(A + B)]}{\cos A + \cos B};$$

d'où

$$u = x - iy = \frac{1 + \cos(A + B)}{\cos A + \cos B} e^{-iB}$$

et

$$\mathrm{ch}(c) = \frac{1 + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Il est évident que cette relation se déduit aussi de la formule

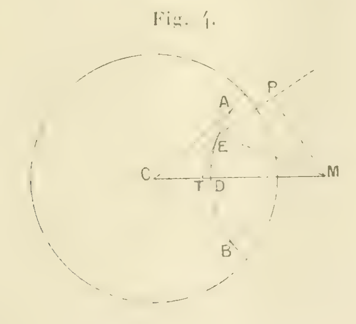
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \,\mathrm{ch}(c),$$

analogue à l'équation (17), en supposant $C = 0$.

**13.** Pour obtenir la S d'un triangle, je suppose le sommet C situé dans l'origine et le centre du côté opposé AB sur l'axe réel. Le triangle est ainsi divisé en deux parties ACD et BCD. Considérons d'abord la première partie.

Menons d'un point arbitraire E (*fig.* 4) de l'arc AD les rayons

Fig. 4.




EC, EM et la tangente ET et abaissons du centre M de cet arc la perpendiculaire MP sur CE. En posant $CE = \rho$, $EM = r$, $CM = p$, $\angle ECD = \omega$, $\angle CET = u$, on aura

$$MP = p \sin \omega = r \cos u;$$

d'où

$$p \cos \omega \, d\omega = -r \sin u \, du.$$

Or, en introduisant l'égalité connue

$$p^2 = r^2 + 1,$$

on tire du triangle ECM

$$1 - \rho^2 = 2\rho r \sin u,$$
$$1 + \rho^2 = 2\rho p \cos\omega.$$

A l'aide de ces équations, on obtient

$$(1 + \rho^2)\, d\omega = -(1 - \rho^2)\, du$$

ou

$$\frac{2\rho^2\, d\omega}{1 - \rho^2} = -(d\omega + du).$$

On a, par définition,

$$S_1 = 4 \int\int \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{(1 - \rho^2)^2} = 2 \int_0^{C_1} \frac{\rho^2\, d\omega}{1 - \rho^2},$$

$C_1$ représentant l'angle ACD; par conséquent, $D_1$ étant l'angle CDA et A l'angle CAD, on obtient

$$S_1 = \int_{C_1}^{0} (d\omega + du) = \pi - D_1 - C_1 - A.$$

De même la S de la seconde partie du triangle que nous représentons par $S_2$ se déduit des angles $D_2$, $C_2$, B de cette partie, par l'équation

$$S_2 = \pi - D_2 - C_2 - B.$$

En ajoutant les dernières équations et posant

$$C_1 + C_2 = C, \qquad D_1 + D_2 = \pi,$$

on trouve pour la S du triangle entier ABC

$$S = \pi - A - B - C \quad (^1).$$

14. Proposons-nous encore de déterminer la L d'un arc de cercle perpendiculaire à la fois sur deux côtés d'un triangle.

---

(1) POINCARÉ, *Acta math.*, t. I, p. 225.

Admettons que le triangle soit situé comme dans la *fig.* 1 et soit QR un arc de cercle décrit de l'origine avec un rayon arbitraire $CQ = p$.

La L de l'arc QR se détermine par l'équation

$$L = 2\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1-p^2}.$$

En posant

$$z = pe^{i\omega},$$

on a

$$dz = ipe^{i\omega}\,d\omega$$

et

$$\operatorname{mod} dz = p\,d\omega,$$

par suite,

$$L = \frac{2p}{1-p^2}\int_0^C d\omega = \operatorname{sh}(p)\,C$$

Comme le point Q est arbitraire, on pourra choisir ce point de telle sorte que

$$(p) = \log(1+\sqrt{2});$$

on obtient alors

$$L = C.$$

Pour obtenir la L d'un arc à la fois perpendiculaire sur deux côtés d'un triangle qui se coupent dans un point de la circonférence du cercle fondamental, nous supposerons ce sommet situé sur l'axe réel.

Soient M et N (*fig.* 5) les centres des arcs AC et BC, $r$ et $r'$ leurs rayons, les points de rencontre A′ B′ de ces arcs avec la circonférence du cercle fondamental représenteront les quantités imaginaires

$$\frac{1+ir}{1-ir} \quad \text{et} \quad \frac{1+ir'}{1-ir'}.$$

Si maintenant, dans les substitutions paraboliques

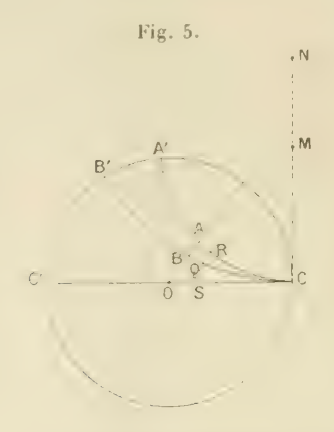
$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{i}{2r'},$$

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{i}{2r},$$

qui transforment respectivement le diamètre CC′ en CA′ et CB′, nous attribuons à $z$ la valeur $OS = b$, il est évident que les va-

leurs de $t$ dans ces deux équations font connaître les quantités imaginaires correspondantes aux points Q et R qui sont situés sur la circonférence qui coupe orthogonalement les arcs CB′ et CA′ et le diamètre aux points S et C.

Fig. 5.




Par conséquent, le point représentant la valeur de $t$ dans l'équation

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{b-1} - i\eta_1,$$

où $\eta_1$ est variable avec $t$, parcourra l'arc de cercle QR quand $\eta_1$ varie de $\frac{1}{2r'}$ à $\frac{1}{2r}$.

Cela posé, on obtient

$$t = \frac{b - i\eta_1(1-b)}{1 - i\eta_1(1-b)},$$

$$1 - tt_0 = \frac{1-b^2}{\operatorname{mod}^2[1 + i\eta_1(1-b)]},$$

$$dt = \frac{(1-b)^2\, i\, d\eta_1}{[1 + i\eta_1(1-b)]^2}$$

et

$$\operatorname{mod} dt = \frac{(1-b)^2\, d\eta_1}{\operatorname{mod}^2[1 + i\eta_1(1-b)]}.$$

La L cherchée de l'arc QR se présente donc sous la forme

$$L = 2\int \frac{\operatorname{mod} dt}{1 - tt_0} = \frac{2(1-b)}{1+b}\int_{\frac{1}{2r'}}^{\frac{1}{2r}} d\eta_1 = \frac{1-b}{1+b}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

ou, en introduisant la constante K de la substitution,

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{z-1} \qquad K = \frac{1}{z-1} - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

qui transforme l'arc CB' en CA'

$$L = 2iK\frac{1-b}{1+b}.$$

15. En terminant, je remarquerai encore qu'il y a une seconde espèce de triangles qu'on pourrait traiter de la même manière. Ce sont ceux qui sont formés par des arcs de cercle qui passent par les extrémités d'un diamètre du cercle fondamental.

En posant dans ce cas

$$\Lambda = 2\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1-r^2},$$

$$\Sigma = 4\int\int \frac{r\,dr\,d\theta}{(1-r^2)^2},$$

et en appelant deux figures congruentes quand elles sont les transformées l'une de l'autre par la substitution

$$t = \frac{\alpha z - \beta}{\beta_0 z + \alpha_0} \quad (\alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 = 1),$$

on verrait que deux arcs congruents ont même $\Lambda$ et deux aires congruentes même $\Sigma$. Les relations entre les $\Lambda$ des côtés et les angles d'un tel triangle sont parfaitement identiques avec les relations qui existent entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, tandis que la $\Sigma$ d'un tel triangle est égal à l'excès de la somme des angles sur $\pi$.

Tout cela s'explique aisément parce que ces triangles sont les projections stéréographiques des triangles sphériques.

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Le Vavasseur (R.). — *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables* F(α, β, β', γ, κ, γ). In-4°, 211 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Weierstrass (K.). — *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* Bearb. u. herausgeg. von H.-A. Schwarz. 2e édition, 1re Partie. Gr. in-4°, xiv-96 p. Berlin, Springer. 10 m.

Zeuthen (H.-G.). — *Forelaesning over Mathematikens historie. Oldtid og middelalder.* In-8°. Kopenhagen, Höst. 5 kr.

Ball (Sir R.-S.). — *In the High Heavens.* In-8°, 378 p. London, Isbister. 7 sh. 6 d.

Bertrand (J.) et Garcet (H.). — *Traité d'Algèbre.* 2e Partie. Nouv. édit. In-8°, 392 p. Paris, Hachette et Cie. 5 fr.

Goodwin (H.-B.). — *Problems in Navigation and nautical Astronomy.* IIe Partie, avec réponses et suggestions relatives à la solution. In-8°, 56 p. London. 2 sh. 6 d.

Guyou (E.) et Willotte (H.). — *Cours élémentaire d'Astronomie.* In-8°, vii-570 p. avec 170 fig. et 2 pl. Nancy, Berger-Levrault et Cie, 10 fr.

Klumpke (D.). — *Contribution à l'étude des anneaux de Saturne.* In-4°, 70 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Oltramare (C.). — *Essai sur le calcul de généralisation.* Gr. in-8°, 132 p. autogr. Genève, Georg et Co. 6 m.

Serret (J.-A.). — *Cours de Calcul différentiel et intégral.* 4e édit. 2 vol. in-8°. T. I : *Calcul différentiel,* xii-618 p.; t. II : *Calcul intégral,* xii-904 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 25 fr.

1re Part

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STEGEMANN. — GRUNDRISS DER DIFFERENTIAL-UND INTEGRAL-RECHNUNG. I. Theil : *Differential Rechnung*. 6e édition, refondue par *L. Kiepert*. 1 vol. in-8°, XIV-618 p. Hannover, Helwing, 1892.

Le succès de cet Ouvrage très élémentaire dont nous annoncions la cinquième édition, il y a peu d'années (¹), ne se ralentit pas : s'il continue de répondre évidemment aux besoins du public auquel il est destiné, c'est justice aussi que de reconnaître les soins que M. L. Kiepert prend, à chaque fois, pour l'améliorer et le compléter, tout en lui laissant son caractère : l'édition actuelle comporte environ 150 pages de plus que la précédente : l'exposition des principes a été remaniée dans le sens d'une plus grande rigueur et la partie géométrique a été renouvelée; on a introduit, en outre, une théorie élémentaire des déterminants.

BONCOMPAGNI (B.). — CATALOGO DEI LAVORI DI ENRICO NARDUCCI. In-4°, II-18 p. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche; 1893.

Enrico Narducci, qui vient de mourir le 11 avril 1893 à l'âge de 61 ans, fut de son vivant le bibliothécaire érudit et distingué de la Bibliothèque Alexandrine à Rome. Nos lecteurs n'ont sans doute pas oublié les articles qu'il nous avait donnés, ceux qu'il a publiés en si grand nombre dans le *Bullettino di bibliografia* du prince Boncompagni et dans plusieurs autres recueils. Nous nous empressons de nous associer à l'hommage que le prince Boncompagni veut rendre à celui qui fut son dévoué collaborateur et de signaler la publication précédente, dans laquelle on trouvera, à côté du catalogue des nombreux travaux publiés par Narducci, une courte notice sur sa vie et sa carrière.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIII, p. 48.

P. TANNERY. — Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne. 1 vol. in-8°, VIII-370 p. Paris. Gauthier-Villars et fils; 1893.

C'est une bonne fortune pour tous ceux qu'intéresse l'histoire des Sciences que l'apparition d'un Livre de M. P. Tannery, d'abord parce que des publications sur de telles matières sont rares, ensuite et surtout à cause du caractère absolument original des travaux de ce savant. Son érudition encyclopédique, qui lui permet d'entasser sur un point de recherche tous les documents capables d'éclairer la question, depuis les considérations tirées de l'étymologie d'un terme jusqu'aux connaissances scientifiques empruntées à tous les domaines; sa hardiesse dans la poursuite de conceptions nouvelles, dans le remaniement des opinions toutes faites; son sens philosophique profond, qui le porte sans cesse à élever bien haut la pensée du lecteur : tout cela fait d'un Livre de M. Tannery quelque chose qui ne ressemble à rien autre. La lecture n'en est pas toujours absolument facile, l'abondance des considérations de toutes sortes a parfois pour conséquence qu'il faut quelque effort pour ne pas perdre le fil des idées; mais du moins quand on a su goûter le charme de cette lecture, on a un peu la sensation qu'on a puisé, pour l'histoire de la Science, aux sources les plus cachées.

Ces réflexions que nous suggèrent aujourd'hui les *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne* font comprendre aussi toute la difficulté qu'il y aurait à donner de cet Ouvrage un compte rendu absolument fidèle. Nous nous contenterons d'en présenter un résumé sommaire, renvoyant au Livre lui-même tous ceux que ces questions intéressent.

La science du Ciel s'est successivement appelée chez les Hellènes *Astronomie*, *Astrologie*, puis *Mathématique*. Sous sa première appellation, elle a pour but primitif (Chap. I) la distribution des constellations (νέμω, je partage) et non point, comme nous sommes tentés de le croire aujourd'hui par suite de la déviation du sens de ce terme, la recherche des lois des astres. Les premiers astronomes grecs ont des visées purement pratiques : ils ne se préoccupent, en examinant les constellations, que de partager la nuit

en heures, l'année en saisons, de prédire le temps, de régler enfin l'année lunisolaire traditionnelle.

C'est à partir de l'École de Cyzique, fondée par Eudoxe de Cnide (Chap. II), que s'emploie le mot nouveau d'*Astrologie*, et que la science du Ciel prend un caractère rationnel (λόγος, raison). Elle devient alors une application des Mathématiques. Pour cela commencent à apparaître les postulats fondamentaux tirés de l'observation des phénomènes célestes, hypothèses cosmologiques aussi simples que possible, et se présentant comme bases de représentations mathématiques, destinées à expliquer les principaux phénomènes. La science qui se forme ne va guère d'ailleurs au delà de ce que nous appelons aujourd'hui Cosmographie élémentaire, pour cette double raison que la Mathématique n'a encore atteint qu'un développement très limité, et surtout que l'observation des faits n'a pas encore amassé une assez riche matière. Ce n'est pas que les astronomes de cette période, et Eudoxe en tête, n'aient pas cherché à observer, mais c'était moins alors pour accroître la liste des postulats que pour vérifier les points admis. En dehors du *gnomon* et du *polos*, qui remontent sûrement à l'*Astronomie* primitive, la *dioptre* et l'*arachné* semblent avoir été inventées ou tout au moins importées dans cette période.

La troisième phase que distingue M. Tannery (Chap. III) commence avec l'école d'Alexandrie, c'est celle des astronomes mathématiciens. Hipparque doit-il apparaître parmi eux comme ayant créé de toutes pièces l'œuvre que Ptolémée n'aura plus qu'à perfectionner? M. Tannery s'applique à réduire le rôle de ce génie à « des proportions plus humaines ». Déjà, à propos de l'Arachné, destinée à devenir l'Astrolabe, par la découverte de la projection stéréographique, l'auteur n'a pas hésité à attribuer l'honneur de cette découverte à Apollonius de Perga. C'est à lui encore qu'il fait remonter le théorème fondamental pour les relations entre les arcs d'une figure sphérique (théorème des transversales sur la sphère), tandis que, d'autre part, il nous convainc, par toutes sortes de raisons, de l'existence de tables de cordes antérieures à Hipparque. L'invention de la Trigonométrie cesse dès lors d'apparaître comme l'œuvre exclusive de l'astronome de Nicée. Conon de Samos l'avait déjà devancé dans l'utilisation des anciennes éclipses; l'étude des épicycles et excentriques semble remonter à Apollonius, et enfin,

si Hipparque a utilisé une sphère armillaire, dont l'organon de Ptolémée offrira une simplification, nul doute que cette sphère ne réalisât elle-même, non pas une invention toute neuve, mais un perfectionnement d'appareils dont l'ébauche remontait au moins à Archimède.

Le reste du Livre est consacré à une analyse minutieuse et méthodique de la Syntaxe, et présente une étude critique des emprunts faits par Ptolémée à ses précurseurs, et des rapprochements qu'on peut faire en particulier avec les *auteurs élémentaires* tels que Geminus, Cléomède, Théon de Smyrne.

Les Chapitres IV et V contiennent une discussion historique et critique des cinq premiers postulats astronomiques énoncés par Ptolémée. Les postulats relatifs à la sphéricité et au mouvement du monde, à sa grandeur infinie près de celle de la Terre, à la position de celle-ci au centre, et à son immobilité, sont soigneusement distingués, pour leur nature subjective, du postulat de la sphéricité de la Terre. A propos de celui-ci, M. Tannery discute les quelques approximations tentées par les anciens pour la mesure de la circonférence de la Terre, insistant principalement sur celle d'Ératosthène, dont l'exactitude dépasse les autres d'une façon surprenante. Le savant cyrénéen était d'ailleurs arrivé également, pour l'obliquité de l'écliptique, à une mesure que ni Hipparque ni Ptolémée ne modifièrent.

Le Chapitre VI traite du sixième postulat énoncé dans la Syntaxe relativement au mouvement général des planètes, et enfin, après quelques développements sur l'historique, de la distinction des cinq zones de la sphère céleste, sont brièvement résumés au Chapitre VII la fin du premier Livre et le onzième Livre de la Syntaxe. Ptolémée y expose seulement l'application de la Trigonométrie aux premiers problèmes traités déjà à leur manière par une série d'auteurs allant d'Euclide à Hypsidès, application évidemment due à Hipparque, déclare M. Tannery.

Les Chapitres suivants (VIII-XIII) sont consacrés aux théories de Ptolémée relatives au Soleil et à la Lune. Ptolémée se prononce en faveur de l'année tropique, de préférence à l'année sidérale, pour la véritable année solaire : c'était déjà le choix d'Hipparque, qui, quoi qu'en dise Ptolémée, n'a pas réellement mis en doute la fixité de la durée de l'année tropique (p. 147-151).

Les observations d'équinoxes et de solstices données par Ptolémée semblent d'ailleurs dirigées de façon à servir de vérification à la durée de l'année fixée par Hipparque, plutôt que de vouloir la corriger, de sorte qu'elles n'ajoutent pas d'intérêt véritable aux observations d'Hipparque. Les tables du Soleil de la Syntaxe sont en somme celles d'Hipparque, qui dépassent démesurément ce que l'on peut conjecturer des tables antérieures. Quant à la théorie de la Lune, si Hipparque a eu la gloire de diviser le problème des révolutions lunaires, et de donner deux périodes pour établir l'accord des révolutions synodiques avec la révolution d'anomalie, d'une part, et celle de latitude, d'autre part, s'il a atteint, pour ce problème (par une investigation dont Ptolémée ne donne qu'une idée imparfaite et que M. Tannery s'efforce de reconstruire ingénieusement), des résultats que Ptolémée n'a pu que malencontreusement modifier, il est probable qu'il n'a eu pour les tables de la Lune qu'à suivre les traces d'Apollonius de Perga.

Ptolémée complète les tables à l'aide de sa théorie géométrique de l'évection : Hipparque avait ébauché un mode de calcul de cette inégalité. La théorie des parallaxes du Soleil et de la Lune, sans doute ébauchée par Apollonius, avait été continuée par Hipparque : les modifications de Ptolémée ne réalisent pas le moindre progrès. D'une façon générale d'ailleurs, Ptolémée ne semble corriger son précurseur que pour aggraver les imperfections, la plupart du temps pressenties par Hipparque, et pour compliquer les difficultés par ses nouvelles combinaisons géométriques.

Dans les règles pour la prédiction des éclipses, il semble s'en être strictement tenu à celles données par Hipparque. Remarquons à ce propos l'opinion de M. Tannery, fondée sur un texte de Pline, que l'astronome de Nicée aurait eu déjà connaissance des effets de la réfraction atmosphérique.

L'œuvre propre de Ptolémée, d'après son témoignage, serait sa théorie des planètes (Chap. XIV). La combinaison de l'épicycle sur déférent excentrique, avec introduction de l'*équant*, et le renoncement au principe du mouvement circulaire uniforme (ce qui reste uniforme étant le mouvement angulaire dont le centre est l'équant) semblent à Ptolémée résoudre, à propos des planètes, le problème devant lequel avait reculé Hipparque. M. Tannery nous fait

sentir toutes les raisons qui auraient dû conduire, non pas à l'hypothèse héliocentrique (la conception d'Aristarque de Samos était venue trop tôt pour résoudre toutes les difficultés), mais à un système mixte analogue à celui de Tycho Brahé. L'ébauche d'un pareil système fut certainement tentée. Hipparque ne la jugea pas suffisante ; Ptolémée y substitua malheureusement ses hypothèses compliquées.

Enfin le Chapitre XV épuise l'étude critique de la Syntaxe à propos de la précession des équinoxes, dont la détermination n'est pas identiquement la même pour Ptolémée et pour Hipparque, et du catalogue des fixes.

Quelques appendices terminent l'Ouvrage de M. Tannery : I. Traduction de la Didascalie de Leptine. — II. Vie d'Eudoxe d'après Diogène Laërce, observations sur la vie d'Eudoxe. — III. Sur la Trigonométrie des Anciens. — IV. Sur la grande année de Josèphe. — V. Sur les opinions conjecturales des Anciens concernant les distances des planètes à la Terre. — VI. Traduction d'un Chapitre de Nasir Eddin Attûsi, par M. Carra de Vaux : ce sont autant de documents inappréciables pour l'Histoire de la Science.

Enfin, ce que nous n'avons pas dit dans ce court résumé, c'est le nombre incalculable de développements semés incidemment sur des points techniques, pour lesquels ce sont désormais des sources de premier ordre : ainsi sur l'organon de Ptolémée (Chap. III); sur la valeur des stades chez les Anciens (V); sur les dates de Ptolémée (VIII), etc.

L'impression que laisse la lecture de ce Livre si attachant, c'est bien d'abord, comme le dit M. Tannery dans sa préface, que les progrès réalisés par Ptolémée après Hipparque n'ont qu'une importance vraiment secondaire. Quant à Hipparque lui-même, nous n'avons pas de peine à suivre M. Tannery dans ses efforts pour rétablir entre lui et ses précurseurs une continuité historique dont nous sentons instinctivement le besoin. Mais il est un point peut-être où il semble que l'auteur aille un peu loin. Non seulement il veut faire partager aux illustres prédécesseurs d'Hipparque, Archimède, Apollonius de Perga surtout, la gloire des découvertes mathématiques utilisées par le grand astronome, ce qui est assez naturel, mais encore il déclare qu'Hipparque eût été incapable de faire œuvre de vrai géomètre, et l'argument le plus important à cet

égard aux yeux de M. Tannery est le témoignage suivant de Théon de Smyrne : « Hipparque, dit en substance celui-ci, a signalé comme digne de l'attention des mathématiciens l'explication possible de la marche du Soleil à l'aide de deux hypothèses différentes (épicycles concentrique et excentrique). Adraste, ajoute-t-il, a montré la raison géométrique de ce fait. » M. Tannery ne doute pas qu'Hipparque eût pu résoudre le problème; mais il voit une preuve de son insuffisance mathématique dans le peu d'intérêt que semble avoir présenté pour lui-même la recherche de cette explication, Mais est-il bien sûr qu'Hipparque se soit abstenu de cette recherche? Le passage de Théon ne pourrait-il pas prouver seulement qu'il ne l'a pas donnée, qu'il n'a pas jugé utile d'y insister, s'en remettant à tous ceux qu'intéressent les exercices de Géométrie pure du soin de la trouver aisément? Hipparque est d'ailleurs avant tout un astronome, cela est évident. La raison géométrique dont il recommande la recherche aux géomètres ne pouvait avoir pour lui qu'un intérêt fort restreint et il pourrait à la rigueur ne pas s'en être soucié outre mesure sans encourir le reproche d'insuffisance mathématique. Nous nous permettons de soumettre ces réflexions à M. Tannery; elles ne diminuent en rien d'ailleurs, est-il besoin de le dire, ni le mérite du Livre ni notre propre admiration.

---

## MÉLANGES.

### UN THÉORÈME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE, EXPRIMÉ EN FORME TRÈS GÉNÉRALE;

Par E. FEDOROFF,
Ingénieur des Mines à Saint-Pétersbourg.

Dans le Livre X des *Éléments d'Euclide* nous trouvons, en outre, le théorème suivant :

*Dans un même cercle sont inscrites la face triangulaire d'icosaèdre et la face pentagonale de dodécaèdre, tous deux corps inscrits dans une même sphère.*

En cette forme le théorème est très insuffisant. Il semble que la propriété indiquée n'appartienne qu'à deux corps géométriques individuels : icosaèdre et dodécaèdre ([1]).

Nous nous proposons de démontrer que le théorème est juste pour tous les polyèdres, qu'on peut simultanément circonscrire à une sphère et inscrire dans une autre sphère concentrique. Mais, pour plus de simplicité, nous devons faire usage de quelques définitions, données dans les *Éléments de la théorie des figures* de l'auteur ([2]).

1. Un polyèdre *typique* (pour une espèce) est celui que l'on peut circonscrire à une sphère.

*Note.* — En transportant dans la position parallèle chaque face d'un polyèdre typique (pourvu que la face ne disparaisse et ne coïncide pas avec la face parallèle, s'il en existe une), nous obtiendrons tous les polyèdres de la même *espèce*. Le polyèdre, circonscrit à la sphère, a parmi tous ces polyèdres une importance spéciale, et c'est la raison pourquoi on l'a nommé *typique* ([3]).

2. Le polyèdre *sous-typique* est celui qu'on peut inscrire dans une sphère.

*Note.* — Il existe des relations différentes entre des polyèdres typiques et des polyèdres sous-typiques correspondants : à chaque face d'une de ces figures correspond un sommet de l'autre et *vice versa;* à chaque arête qui joint les deux sommets d'un de ces

---

([1]) Nous trouvons la démonstration du théorème inutilement très compliquée.

([2]) Publiés en russe en 1885. Exposé détaillé de cet Ouvrage en allemand voir *Zeitschrift für Krystallographie*, t. XXI, p. 679).

([3]) D'après un théorème de Lindelöf (*Bulletin de l'Acad. imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, p. 257; 1870), un polyèdre pareil sous une étendue superficielle donnée renferme le plus grand volume de tous les polyèdres de la même espèce. Dans un travail nouveau (*La question sur les minima des surfaces dans la théorie de la symétrie*) nous avons indiqué le rôle important des polyèdres, et des surfaces en général, symétriques à ce point de vue.

corps correspond l'arète comme la droite d'intersection de deux faces correspondantes, de l'autre, etc. [1]).

Ces définitions permettent de donner au théorème dont il est question cette forme générale :

*Si un polyèdre typique circonscrit à une sphère $s_1$ peut s'inscrire dans une autre sphère concentrique $s_2$, le polyèdre sous-typique correspondant, inscrit dans la sphère $s_2$, sera circonscrit à la sphère $s_1$.*

Soient $t_1$ le point de tangence, $p_1$ un sommet d'une face du polyèdre typique donné et O le centre des sphères, $s_1$ inscrite et $s_2$ circonscrite à ce polyèdre; $t_1 p_1$ sera la droite d'intersection de la face considérée avec le plan de la figure. Menons la droite $Ot_1$

Fig. 1.

jusqu'à l'intersection avec la sphère $s_2$ dans le point $p_2$; joignons O avec $p_1$, et dans le point $t_2$ d'intersection $Op_1$ avec la sphère $s_1$ menons la tangente $t_2 p$.

Il est évident que cette droite passera par le point $p_2$. Mais la droite $t_2 p_2$ n'est autre chose que la droite d'intersection avec le plan de la figure d'une face du polyèdre sous-typique, correspondant au polyèdre typique donné. Ainsi, chaque face de ce polyèdre, correspondant à un sommet $p_1$ d'une face du polyèdre typique donné, passera nécessairement par le point $p_2$. Le point $p_2$ sera donc un sommet du polyèdre sous-typique correspondant.

---

[1] *Élém. de la th. de fig.*, p. 60. Les théorèmes analogues ont été démontrés par un géomètre illustre, M. C. Jordan (*Crelle Journ. für Mathematik*. B. 66, p. 29).

Et comme nous avons la même chose pour toutes les autres faces et sommets, le théorème est prouvé.

Dans une lettre, dont l'illustre géomètre M. Darboux avait honoré l'auteur, il se trouve une autre démonstration, très simple et élégante, du même théorème [1].

Ce théorème nous donne une nouvelle notion d'une grande importance, la notion des polyèdres *mésosphériques*, c'est-à-dire des polyèdres qu'on peut circonscrire à une sphère et inscrire dans une autre concentrique.

Pour se rendre compte de l'importance de cette nouvelle définition, il suffit de définir par analogie les polygones mésosphériques comme tels, qui peuvent être circonscrits à un cercle et inscrits dans un autre cercle concentrique. En se servant de cette définition, il est facile de prouver que les polygones mésosphériques sont les polygones réguliers de premier ordre ou d'ordres supérieurs.

Ainsi la notion des polyèdres mésosphériques est analogue à la notion des polygones réguliers sur le plan.

Le théorème que nous venons de prouver peut être formulé aussi bien de la manière suivante :

*Étant donné un polyèdre mésosphérique inscrit et circonscrit à deux sphères concentriques, il existe un autre polyèdre mésosphérique polaire, également inscrit et circonscrit à ces mêmes sphères.*

Ce théorème a de nombreuses applications, mais nous nous bornerons à présent avec les exemples les plus importants.

1. Tous les polyèdres réguliers ordinaires, qui s'arrangent par paires suivantes. (Cette application était déjà faite dans le Traité de MM. Rouché et de Comberousse.)

*a*. Les deux tétraèdres (inscrit et circonscrit) polaires.
*b*. Le cube et l'octaèdre.
*c*. Le dodécaèdre et l'icosaèdre.

---

[1] Le voilà : *Soit en effet* P *un polyèdre inscrit à une sphère s et circonscrit à une sphère concentrique* $s_1$. *Il existe une sphère s' par rapport à laquelle s et* $s_1$ *sont polaires réciproques. Par conséquent le polyèdre* P' *polaire réciproque de* P *par rapport à s' sera encore inscrit à s et circonscrit à* $s_1$.

2. Tous les polyèdres réguliers de l'ordre supérieur (les solides de Poinsot) (arrangés aussi par paires) :

*a*. Les deux octaèdres de deuxième ordre (inscrit et circonscrit).

*b*. Les deux dodécaèdres de troisième ordre polaires (du premier et du second genre).

*c*. Le dodécaèdre et l'icosaèdre de septième ordre.

3. Un polyèdre à quatre faces (triangulaires) se nomme *sphénoïde*. Celui dont toutes les quatre faces sont égales s'appelle un *sphénoèdre*. Il est facile de prouver que tous les sphénoèdres sont les polyèdres mésosphériques. Il en existe un nombre infini du second ordre, car n'importe quel triangle peut servir de face à un pareil polyèdre (et tous les polyèdres semblables font un individu indépendant au point de vue de la théorie des figures). Le tétraèdre (régulier) ne présente qu'un cas très particulier de ces figures.

4. Parmi toutes les séries des isoèdres typiques trigonaux, de même que tous les isogones sous-typiques trigonoédriques, il existe un membre mésosphérique ([1]).

Pour le démontrer, il suffit de joindre le centre de la sphère inscrite avec les sommets de l'isoèdre typique donné. Le nouveau polyèdre, dont les sommets sont les points d'intersection de ces droites avec la sphère, sera aussi un isoèdre typique, parce que les pyramides, ayant pour bases ses faces triangulaires et leurs sommets au centre de la sphère, sont toutes égales ou symétriques et leurs hauteurs, qui ne sont que les rayons de la sphère inscrite, sont aussi égales.

Tous les exemples donnés ne sont que des cas particuliers d'application du théorème prouvé. Au point où se trouve actuellement la théorie des figures il n'est pas encore possible de déduire tous les polyèdres mésosphériques. Il n'est pas difficile cependant de déduire tous les isogones et isoèdres mésosphériques; mais

---

([1]) *L'isoèdre trigonal* est un polyèdre avec les faces triangulaires égales ou symétriques; *l'isogone trigonoédrique* est un polyèdre avec les trigonoèdres (angles trièdres) égaux ou symétriques.

nous devons nous arrêter à ce point-là, parce que pour cette déduction il est nécessaire de faire usage de détails de la théorie de la symétrie, qu'on ne trouve actuellement qu'en Ouvrages publiés en russe.

---

## DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE RACINES PRIMITIVES MODULE PREMIER IMPAIR;

Par M. Joseph PEROTT.

Soit $p$ un nombre premier impair; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1), \\ s_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + (p-1)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{p-2} &= 1^{p-2} + 2^{p-2} + 3^{p-2} + \ldots + (p-1)^{p-2}. \end{aligned}$$

Je dis que toute expression telle que $s_k$ est nécessairement congrue à zéro ou à $p-1 \pmod{p}$. En effet, si dans

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (p-1)^k,$$

on remplace les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$$

par les nombres

$$h,\ 2h,\ 3h,\ \ldots,\ h(p-1),$$

la fonction $s_k$ se trouvera multipliée par $h^k$, mais ne changera guère de valeur $(\bmod p)$, car la suite

$$h,\ 2h,\ 3h,\ \ldots,\ h(p-1),$$

reproduit $(\bmod p)$ la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1,$$

sauf l'ordre. On a donc

$$s_k \equiv h^k s_k \pmod{p},$$

pour toute valeur de $h$ prise dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1.$$

Cela exige qu'on ait soit

$$s_k \equiv 0 \pmod{p},$$

soit

$$h^k \equiv 1 \pmod{p},$$

pour toute valeur de $h$ prise dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1,$$

ce qui donne

$$s_k \equiv p-1 \pmod{p}.$$

Je dis de plus que si, comme nous le supposons, $k < p-1$, la congruence

$$s_k \equiv p-1 \pmod{p}$$

ne peut avoir lieu. En effet, soit $t$ la plus petite valeur de $k$ telle que

$$s_t \equiv p-1 \pmod{p}$$

et, par suite,

$$h^t \equiv 1 \pmod{p},$$

pour toute valeur de $h$ prise dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ p-1,$$

on aura

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) &\equiv 0 \pmod{p},\\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (p-1)^2 &\equiv 0 \pmod{p},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots,\\
1^{t-1} + 2^{t-1} + 3^{t-1} + \ldots + (p-1)^{t-1} &\equiv 0 \pmod{p},\\
1^t + 2^t + 3^t + \ldots + (p-1)^t &\equiv p-1 \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Donc, en faisant la somme colonne par colonne

$$t \equiv p-1 \pmod{p}$$

puisque toutes les colonnes à gauche, sauf la première, donnent pour résultat une expression telle que

$$\frac{h(h^t-1)}{h-1},$$

où $1 < h < p$ et, par suite,

$$\frac{h(h^t-1)}{h-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Comme la congruence à laquelle on est arrivé

$$t \equiv p - 1 \pmod{p}$$

ne peut avoir lieu pour

$$0 < t < p - 1,$$

la supposition

$$s_t \equiv p - 1 \pmod{p}$$

est absurde.

Soit $m$ le plus petit commun multiple des exposants auxquels appartiennent les nombres

$$1, 2, 3, \ldots, p - 1,$$

on aura évidemment

$$s_m \equiv p - 1 \pmod{p},$$

et, par suite,

$$m > p - 2.$$

D'autre part, soit A un nombre appartenant à l'exposant $m$, la suite

$$A, A^2, \ldots, A^m$$

n'aura que des termes premiers à $p$ et incongrus entre eux et, par conséquent,

$$m \leq p - 1,$$

puisqu'il n'y a en tout que $p - 1$ restes

$$1, 2, 3, \ldots, p - 1,$$

à un desquels tout nombre premier à $p$ doit être congru $(\bmod p)$.

Il s'ensuit que

$$m = p - 1,$$

et que, par conséquent, A est une racine primitive.

## EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CESÀRO;

En relisant mon dernier article du *Bulletin* (1893, p. 321), je m'aperçois que la démonstration et l'énoncé même de mon *Théorème* peuvent donner lieu à des objections. Il aurait fallu dire,

avant tout, que les fonctions

$$\int_0^t \varphi(x, t)\,dt, \qquad \int_0^t \psi(x, t)\,dt$$

doivent être supposées telles, qu'en y faisant croître $x$ à l'infini, après avoir fixé arbitrairement $t$, elles restent finies. C'est ce qui arrive toujours dans les cas particuliers que j'ai considérés. Il faut remarquer, ensuite, que la *règle de l'Hospital* a été appliquée par rapport à la variable $t$. Aussi, pour bien comprendre certain passage, il est utile d'imaginer que, pour toute valeur finie de $t$, les fonctions $\varphi(x, t)$ et $\psi(x, t)$ tendent vers des limites finies $\varphi_1(t)$ et $\psi_1(t)$ lorsque $x$ croît indéfiniment. Sous les conditions énoncées précédemment, les intégrales

$$\int_0^t \varphi_1(t)\,dt, \qquad \int_0^t \psi_1(t)\,dt$$

ont un sens, pour toute valeur finie de $t$, mais elles croissent à l'infini avec $t$. On a donc

$$\lim_{t=\infty} \frac{\int_0^t \varphi_1(t)\,dt}{\int_0^t \psi_1(t)\,dt} = \lim_{t=\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\psi_1(t)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t=\infty}\lim_{x=\infty} \frac{\int_0^t \varphi(x, t)\,dt}{\int_0^t \psi(x, t)\,dt} = \lim_{t=\infty}\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)},$$

ou, enfin, en échangeant, entre eux, dans les deux membres, les deux *passages à la limite*,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_0^\infty \varphi(x, t)\,dt}{\int_0^\infty \psi(x, t)\,dt} = \lim_{x=\infty}\lim_{t=\infty} \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)}.$$

Mais, comme je l'ai dit dans mon Article, ce n'est pas là une *démonstration*. D'ailleurs une démonstration rigoureuse d'un théorème plus général va paraître dans *Mathesis*.

---

ERRATA A L'ARTICLE *Théorème d'Analyse*, PAR M. E. CESÀRO.

Ligne 8, *après* avec $x$, *lisez* : Supposons aussi qu'il n'en soit pas de même des intégrales

$$\int_0^a \varphi(x, t)\,dt, \qquad \int_0^a \psi(x, t)\,dt,$$

lorsque $a$ est fini.

Ligne 9, *au lieu de* aussi, *lisez* encore.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TISSERAND (F.). — *Traité de Mécanique céleste*, t. III : *Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*. In-4°, IX-427 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 22 fr.

PINKERTON (R.-H.). — *Hydrostatics and Pneumatics : the Mechanics of Fluids*. In-8°, 340 p. London, Blackie. 4 sh. 6 d.

BALL (Sir R.-S.). — *The Story of the Sun*. In-8°, 382 p. avec 11 planches et nombreuses figures. Londres, Cassell. 21 sh.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. I Bd. Von den ältesten Zeiten bis zum J. 1200 n. Chr. 2e édition. Gr. in-8°, VII-883 avec 114 fig. et 1 planche lithographique. Leipzig, Teubner. 22 m.

DIRICHLET (P.-G.-L.). — *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgeg. u. mit Zusatzen versehen von R. Dedekind. 4e édition, gr. in-8°, XVII-657 p., Brunswick, Vieweg et Sohn. 14 m.

DURÈGE (H.). — *Elemente der Theorie der Funktion eneiner Complexen veränderlichen Grösse*. Mit besond. Berücksichtgg. der Schöpfungen Riemann's bearb. 4e édition, gr. in-8°, X-300 p. Leipzig, Teubner. 6 m. 80 pf.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Paul APPELL, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — Traité de Mécanique rationnelle. Tome premier : *Statique. Dynamique du point.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893.

1. La réduction de la Mécanique à un petit nombre de principes a été, comme on sait, l'œuvre de Galilée, d'Huygens et surtout de Newton qui, dans sa *Philosophie naturelle,* formula explicitement pour la première fois les trois principes fondamentaux de l'inertie, des mouvements relatifs et de l'action et réaction. Ces trois principes suffisent à l'édification de la Mécanique; l'idée de force y naît de celle de mouvement, la composition des forces s'y ramène à la composition des vitesses. Tel n'est pas cependant le point de vue où se sont placés la plupart des maîtres qui ont enseigné ou écrit des Traités sur la Mécanique. La Statique est ordinairement présentée comme indépendante, et si la force est, au début, définie comme une cause de mouvement, on renonce au bénéfice de cette définition précise pour lui substituer une sorte de notion première, qui paraît tirée de la conscience que nous pouvons avoir de notre propre effort musculaire. Cette manière est évidemment opposée au but poursuivi par Galilée, Huygens et Newton.

L'opinion de Lagrange à cet égard serait curieuse à noter; malheureusement, si l'on se reporte à la *Mécanique analytique,* la consultation, naturellement très instructive, ne laisse pas cependant que d'être singulièrement contradictoire.

Dès les premières lignes de son grand Traité, Lagrange dit fort bien que (¹) : *C'est par la quantité de mouvement imprimé que la force doit s'estimer;* plus loin, parlant de la composition des forces concourantes, il nous dit (²) : *Il faut bien avouer qu'en séparant le principe de la composition des forces de celui de la composition des mouvements on lui fait perdre ses prin-*

---

(¹) *Mécanique analytique,* t. XI des *Œuvres complètes,* p. 1.

(²) *Ibid.*, p. 19.

*cipaux avantages, l'évidence et la simplicité.* Mais, quelques pages auparavant, après avoir rapporté du principe du levier les démonstrations purement statiques d'Archimède, de Stevin, d'Huygens et indiqué quelques perfectionnements à apporter dans ces démonstrations, Lagrange écrivait, en comparant le principe du levier à celui de la composition des forces concourantes [1] : *On ne peut cependant s'empêcher de reconnaître que le principe du levier a seul l'avantage d'être fondé sur la nature de l'équilibre considéré en lui-même et comme un état indépendant du mouvement; d'ailleurs il y a une différence essentielle dans la manière d'estimer les puissances qui se font équilibre dans ces deux principes; de sorte que si l'on n'était parvenu à les lier par les résultats, on aurait pu douter avec raison s'il était permis de substituer au principe du levier celui qui résulte de la considération étrangère des mouvements composés.*

En rapprochant ces divers passages, nous voyons que Lagrange n'a pas pris parti dans la réduction systématique de la notion de force à celle de mouvement.

Il l'accepte pour la composition des forces concourantes, et l'écarte à l'occasion du levier. Il ne faut point s'en étonner : dans son Traité rénovateur, Lagrange a eu en but une unité d'une autre sorte, d'ordre moins spéculatif, d'ordre pratique, une unité de *méthode* qui lui permet, suivant sa propre expression : *de réduire la théorie de cette science et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent à des formules générales dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème* [2].

L'unité des principes philosophiques qui servent de raison à la Mécanique paraît lui importer moins. Et cependant peut-on dire que la question n'ait pas existé pour Lagrange, quand on lit la fin de l'avant-dernier passage que j'ai cité; quand on le voit mettre le doigt sur le plus grave inconvénient qui résulte de ce que j'appelle *l'indépendance de la Statique,* à savoir, cette dualité de la notion de force en Mécanique, notion qui n'est plus

---

(1) *Mécanique analytique,* p. 17.
(2) Avertissement de la *Mécanique analytique.*

la même en Dynamique et en Statique, lorsque l'on veut faire de celle-ci une science indépendante.

A côté de cet inconvénient d'ordre tout philosophique en surgissent d'autres secondaires. C'est ainsi, comme le fait observer Lagrange, que la règle du parallélogramme des forces devient d'une démonstration difficile en dehors de la considération du mouvement. Depuis le premier essai de démonstration purement statique par Bernoulli, de nombreuses démonstrations, conçues dans le même sens, ont été produites; celle de Poisson est une des plus célèbres. Dans une Note placée à la fin de la *Mécanique* de Despeyrous, M. G. Darboux a analysé les difficultés inhérentes à ces démonstrations et énuméré les postulata mécaniques qu'elles exigent. La question se pose alors de savoir s'il vaut mieux admettre ces postulata au titre de principes spéciaux à la Statique, ou bien les déduire, ainsi qu'on le peut, des trois principes fondamentaux de Newton. Il n'y a pas d'inconvénient, à notre avis, à admettre les postulata dans l'enseignement élémentaire pour arriver à la Statique indépendante, telle que Poinsot l'a fixée dans son livre immortel; la Statique ainsi construite devient une sorte de prolongement de la *Géométrie* d'Euclide et, jointe aux notions de Cinématique récemment introduites dans le programme des lycées, constitue un beau complément de l'enseignement géométrique. Mais il en va tout autrement dans un grand Traité qui a en vue l'enseignement de la Mécanique. Là les choses doivent être présentées sous leur vrai jour, avec le caractère philosophique que permet de leur attribuer l'esprit de critique qui semble être l'esprit de notre époque.

2. A côté de cette question des principes et de la définition de la force se place une question non moins grave, une question de méthode.

Certains, désireux de cette unité créée par Lagrange, la poussant à l'excès, n'acceptent rien que de l'Analyse; d'autres, au contraire, plus soucieux des faits que des formules, qui n'en sont que le reflet, pensent que chaque problème doit être étudié en lui-même, avec toutes les ressources qu'offrent les conditions particulières dans lesquelles il se trouve posé; à ceux-ci, Poinsot peut servir de modèle. Mais, si l'exagération des analystes purs les porte à se

complaire dans les formules, au détriment des faits eux-mêmes, d'un autre côté, l'abandon des méthodes générales a le grave inconvénient de faire de la Mécanique un ensemble de problèmes sans liens logiques entre eux, à lui faire perdre, en un mot, l'unité de méthode qui est le propre de toute science.

Du reste, c'est bien à tort que l'on ne veut voir parfois dans l'œuvre de Lagrange qu'une grande méthode analytique. Le principe des vitesses virtuelles n'aboutit pas forcément à de grandes formules ; dans bien des cas il conduit à une solution directe, d'où les faits jaillissent pleins de clarté.

La méthode analytique a son champ d'applications propre ; ailleurs d'autres procédés doivent lui être préférés.

C'est dans cet esprit qu'a été écrit le Traité de Poisson, le plus célèbre, sinon le premier, qui ait été composé dans ce genre. Depuis cet excellent Ouvrage, un peu vieilli, mais où le sens physique de la Mécanique était bien affirmé, l'enseignement français de la Mécanique a élaboré un progrès incessant, soit par les nombreux traités qui ont été publiés, soit par les cours de nos Facultés, avec des maîtres comme Despeyrous, Darboux, Tannery, Tisserand, Appell. De fortes traditions se sont établies, certaines théories se sont développées ; il appartenait à M. Appell de donner au public mathématicien une complète et en même temps très personnelle synthèse des résultats de tous ces efforts.

3. Depuis le commencement de ce siècle le fonds de la Mécanique s'est accru d'un grand nombre de faits d'ordre purement géométrique ou analytique, intéressants par eux-mêmes, et très dignes de l'attention des géomètres, mais qui ne tiennent à la Mécanique que par l'usage qu'on y en fait.

Lorsque l'on veut soumettre à la Géométrie quelque ensemble de phénomènes, il n'est point rare de la prendre au dépourvu. Mais on la voit aussitôt construire de toute pièce ou par morceaux le cadre régulier destiné à contenir les faits, et, tout en restant elle-même, se plier, avec toute la souplesse qu'elle peut déployer, aux exigences qui lui sont imposées. C'est ainsi, dit-on, que se sont formées toutes les doctrines géométriques ; chacune est née en vue d'une application. La Mécanique nous offre, à cet égard, les exemples les plus mémorables, et, depuis que les principes en ont

été nettement posés, on ne peut mesurer tout ce que cette science, d'essence purement physique, a apporté à l'Analyse et à la Géométrie, comme fruit de ses exigences.

Plusieurs de ces théories, que j'appellerai, si l'on veut, *parasites* (parasites au point de vue de la Mécanique) ont passé dans le domaine de la Géométrie et de l'Analyse, font partie de leur enseignement; elles ont été détachées de la Mécanique. Mais non pas toutes. Plusieurs encombrent encore cette science et occupent dans son enseignement une place que l'on aimerait mieux réserver à des questions plus mécaniques. Espérons que des traditions finiront par se créer à cet endroit. L'enseignement élémentaire comporte déjà quelques notions de la Géométrie du déplacement; souhaitons que la théorie géométrique des moments et des segments pénètre un jour dans nos programmes de Mathématiques spéciales, comme un complément naturel de la théorie de la droite et du plan en Géométrie analytique. Ce morceau de Géométrie remplacerait avec avantage dans le programme telle doctrine abstraite qui conviendrait à des esprits plus mûrs que ceux des jeunes élèves.

4. Certains, je ne l'ignore pas, hésitent à séparer ce chapitre de la Géométrie de l'exposition des propriétés statiques ou cinématiques auxquelles il s'applique. Mais pourquoi ôter à la Géométrie une doctrine qui lui appartient bien, et à laquelle elle offre elle-même des applications étrangères à la Mécanique? En outre, les propriétés des segments que la Statique utilise ne sont pas tout à fait les mêmes que celles dont se sert la Cinématique. Par exemple, les axes de moment nul constituent en Cinématique l'ensemble important des normales aux trajectoires; en Statique, ce sont les axes autour desquels le corps serait en équilibre s'il était réduit à y tourner; ces axes n'ont qu'un rôle effacé dans la *Statique* de Poinsot. Même remarque pour les couples de droites conjuguées rectangulaires. Sans grand intérêt en Statique, ces droites ont en Cinématique une double et importante interprétation; ce sont les tangentes aux trajectoires des points et les caractéristiques des plans entraînés dans le mouvement du corps solide. Le développement normal de la Statique ne fait donc appel qu'à un

nombre limité de propriétés des segments, propriétés dont il faut plus tard compléter l'étude en Cinématique avec un autre langage. Il est incontestablement plus simple et plus logique de développer à part la théorie des segments pour l'appliquer ensuite à la Statique et à la Cinématique. Ainsi procède M. Appell. Le premier Chapitre de son livre nous offre le développement des propriétés des segments et de leurs systèmes. Dans la définition du moment M. Appell a introduit la considération du moment de deux segments qui a le grand avantage de grouper deux éléments importants : les moments par rapport aux axes et les tétraèdres introduits par Chasles dans la Statique.

Dans la théorie des systèmes de segments, un couple apparaît comme un système de segments dont la résultante de translation est nulle. Cette définition, identique au fond à celle de Poinsot, a sur elle l'avantage d'être moins étroite et de faire mieux comprendre certaines applications. Par exemple, tout contour fermé doué d'un sens de parcours donne lieu à un couple; la projection du moment linéaire de ce couple sur un axe représente le double de l'aire de la projection du contour sur un plan normal à l'axe. D'un autre côté, cette façon de définir le couple rend intuitifs les théorèmes dont Poinsot a donné de si élégantes démonstrations. Les fervents de Poinsot pourraient les regretter; mais M. Appell n'a voulu laisser place à aucun regret dans son livre, et une brève digression est consacrée à la théorie élémentaire des couples d'après Poinsot.

La théorie des segments a été fort développée par Möbius d'abord, et puis par Ball en Angleterre, qui a consacré un volume à la dynamique du corps solide. Dans le cas où les segments sont des forces, les systèmes de segments constituent les *torseurs* de Ball, appelés aussi *dynames* par Plücker.

Dans le second Chapitre sont exposés les éléments de Cinématique indispensables à la Dynamique. La théorie des vecteurs y joue naturellement son rôle. Le théorème de Coriolis s'y trouve établi par l'analyse.

5. Ces deux premiers Chapitres ne sont qu'une sorte de préliminaire; avec le troisième, qui traite des principes et des notions

de force et de masse, nous entrons dans la Mécanique proprement dite. Le soin avec lequel M. Appell a traité la matière mérite que l'on s'y arrête longuement.

Nous y trouvons, avant tout, le souci de cette unité que nous avons définie au début. Une force est la cause qui fait qu'un point matériel n'est pas animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Telle est la définition de la force tirée du principe de l'inertie.

Le principe des mouvements relatifs conduit à la notion de résultante. On montre, tout d'abord, que si deux forces agissent sur un point matériel et tendent à lui imprimer séparément deux accélérations J, J', l'effet des deux forces agissant ensemble est de provoquer une accélération J'' égale à la somme géométrique de J et de J'; il y a une force unique capable à elle seule d'imprimer cette accélération J''; cette force unique, c'est, par définition, la résultante des forces considérées. On admet, il est vrai, qu'il existe une force provoquant à elle seule l'accélération J''; mais est-ce bien là un postulatum? Cela ne résulte-t-il pas de la définition de la force?

On admet aussi que les considérations précédentes sont indépendantes du point matériel sur lequel agissent les forces, et que la résultante serait la même si le point matériel changeait. Mais la vérité, c'est que les trois principes tels qu'on les annonce ordinairement n'indiquent point qu'il y ait lieu de distinguer plusieurs sortes de points matériels. En un mot, l'idée de masse résulte d'un principe qui semble étranger aux trois principes fondamentaux.

Examinons cependant en détail l'énoncé courant du principe de l'action et réaction. On y voit deux choses : d'abord, si un point matériel M agit sur un autre M', cette action est dirigée suivant la droite MM' : il faut entendre par là que l'accélération qui résulte pour M' de cette action est dirigée suivant la droite MM'. En second lieu, le point M' exerce aussi une action opposée, appelée *réaction*, sur le point M, ce qui signifie que M subit une accélération opposée à celle que subit le point M'. Mais le principe énonce quelque chose de plus ; il dit, en effet, que l'action est égale à la réaction. Jusqu'ici rien que de compréhensible ; mais maintenant cette notion de l'égalité de l'action et de la réaction, comment l'expliquer? Les forces ne se sont jusqu'ici traduites pour nous que par les accélé-

rations qu'elles impriment; voudra-t-elle dire que l'accélération subie par M égale l'accélération subie par M'? Évidemment non. Si les accélérations ne sont pas égales, leur rapport a-t-il quelque propriété remarquable d'après l'égalité de l'action et de la réaction? On voit bien que la place de la notion de masse est ici marquée; cette notion se rattache par là au troisième principe, qui par ce moyen conduit à la comparaison des forces et à leur mesure.

Mais cette manière est assez peu répandue, et M. Appell lui a préféré une autre méthode dont il a puisé le principe dans un livre de M. Ossian Bonnet, livre trop peu connu, publié en 1858, qui n'a que quelques pages, mais dont la portée philosophique est incontestable, comme tout ce qu'a écrit cet illustre géomètre. Dans une Note placée à la fin du Volume, M. Appell introduit une modification à la méthode précédente, en démontrant avec beaucoup de simplicité et d'élégance qu'une force constante imprime à un point mobile une accélération constante.

Des esprits qui s'attachent plutôt aux conséquences des principes et à leurs applications qu'à leurs origines s'étonneront sans doute de ce que l'on s'attarde autant pour écrire les équations de l'équilibre ou la formule fondamentale de la Dynamique $\overline{F} = m\,\overline{J}$. Étonnons-nous de notre côté de ce que l'on insiste généralement si peu sur cette question si philosophique et si nécessaire à une haute intelligence de la Mécanique et remercions M. Appell pour le beau Chapitre qu'il lui a consacré.

6. La notion de force acquise, celle du travail des forces, la théorie des fonctions de forces en sont des corollaires naturels. Tel est l'objet du quatrième Chapitre. M. Appell ne manque pas de faire observer que l'existence d'une fonction de forces n'implique pas que le travail accompli soit une fonction des positions limites. Encore faut-il que la fonction des forcees soit uniforme et continue dans la portion d'espace que l'on envisage.

7. Avec le Chapitre V s'ouvre la Statique par l'équilibre du point matériel libre ou gêné et du solide invariable; à côté des questions classiques, où la théorie des vecteurs trouve un vaste champ d'application, l'auteur a placé des développements du plus

haut intérêt, suivant en cela un plan général que l'on retrouvera dans toutes les parties de ce livre et qui lui donne une véritable portée scientifique. Signalons ici, par exemple, les conditions pour que, suivant trois, quatre, cinq ou six droites, on puisse placer des forces se faisant équilibre.

Le cas de six droites est particulièrement intéressant; il a occupé Sylvester et Chasles en 1861 et, à son sujet, Chasles introduisit pour la première fois les complexes linéaires dans la Statique. Nous trouvons un peu plus loin plusieurs paragraphes sur les propriétés de l'équilibre qui se présentent, lorsque, sans changer la grandeur et la direction des forces et leurs points d'application dans un corps, on soumet ce corps à un déplacement.

Les recherches de Möbius, le beau théorème de Minding, les propriétés des axes d'équilibre et de l'équilibre astatique y sont évoqués en leurs traits essentiels.

La Statique des systèmes déformables occupe le Chapitre VI. On y trouvera avec grands détails la théorie des polygones funiculaires; quelques notions sur les figures réciproques et leurs applications en Statique graphique. A propos de l'équilibre des fils, l'auteur entreprend l'étude de l'intégrale définie

$$\int \varphi(x, y, z)\, ds,$$

question de pure Analyse, qui trouve en Mécanique de fréquentes et importantes applications. Témoin la théorie de l'équilibre des fils où elle a conduit MM. Thomson et Tait à une formule et à un théorème importants que l'auteur ne manque pas de faire connaître. L'emploi de ce théorème permet de traiter certaines questions avec la plus grande simplicité, celles notamment qui, dans l'équilibre des fils, concernent les conditions aux limites. L'étude de cette même intégrale définie se prête au développement de la théorie de la réfraction; M. Appell traite cette question dans une digression de quelques pages.

8. On voit, par ce qui précède, que l'auteur n'a pas fait du principe des vitesses virtuelles le point de départ uniforme de toutes les questions de la Statique. Il y a en effet tout avantage, cela ne se discute plus, à traiter directement et par leurs moyens propres les problèmes de l'équilibre du point matériel, du corps

solide, des fils; ces questions gagnent en clarté à être étudiées en elles-mêmes, et cette étude directe est de beaucoup la plus propre à faire saisir l'esprit véritable de la Mécanique, à préparer les intelligences aux applications nombreuses qu'elle trouve dans d'autres branches de la Science, en Physique notamment.

Le principe des vitesses virtuelles peut être envisagé à un double point de vue : d'abord il a son champ d'application propre, où il s'exerce avec avantage préférablement à d'autres méthodes; mais l'erreur est de croire que ce champ comprend toute la Mécanique. Dans bien des cas, il doit se borner à un rôle dominateur sans doute, mais de nature abstraite, et céder le pas à une méthode plus claire et plus complète.

Il conserve toujours ce haut caractère philosophique que lui a donné Lagrange et sa place est marquée à la fin de la Statique pour en synthétiser les lois.

Ce principe fait l'objet du Chapitre VIII. La démonstration classique que l'auteur a adoptée consiste, comme on sait, à vérifier le principe dans un certain nombre de cas de liaisons. Pour les autres cas où la notion des forces de liaisons, celle de frottement ne sont plus susceptibles d'une définition physique et directe, on retourne en quelque sorte l'ordre des choses. On admet le principe et il servira alors à définir les forces de liaisons et l'absence de frottement. En somme, on admet le principe, sauf à vérifier qu'il s'accorde avec les cas que l'on a pu traiter directement. Il est bon cependant d'observer que les cas où le principe est indémontrable offrent toujours un caractère abstrait qui les rend intéressants pour les seuls géomètres.

Je n'insiste pas sur les nombreuses applications données par M. Appell, et où le principe des vitesses virtuelles fournit la solution la plus simple et la plus élégante sans entraîner à aucun calcul. Ces exemples sont traités avec un souci des détails qui marque assez quels soins consciencieux ont présidé à leur choix.

9. Le Chapitre VIII, qui termine la Statique, traite une question un peu dédaignée dans l'enseignement classique, bien que son importance soit des plus hautes dans la réalité. La Mécanique du frottement est en effet très différente de celle où l'on néglige les résistances passives. Les grandes formes analytiques de la Mécanique

disparaissent; les problèmes de mouvement sur les surfaces ne dépendent plus du seul $ds^2$; les conditions d'équilibre s'y expriment par des inégalités. En quelques paragraphes très lumineux, M. Appell définit les trois frottements de glissement, de roulement et de pivotement, et donne quelques exemples.

10. Les développements auxquels donne lieu la Dynamique du point matériel occupent les six derniers Chapitres du Volume. On y retrouvera partout, dans l'exposé des questions classiques, cette clarté et ce soin des détails qui font le principal mérite d'un Ouvrage didactique. Il me suffira d'attirer l'attention sur les développements surajoutés par l'auteur, et sur la bonne pensée qu'il a eue d'introduire les équations de Lagrange dès le début au lieu de les cantonner à la fin de tout l'ensemble de l'Ouvrage. Ces équations ont leur rôle dans le mouvement du point matériel, elles s'appliquent notamment avec élégance à l'étude du mouvement d'un point matériel sur une courbe ou sur une surface variables avec le temps. On verra l'heureux usage que M. Appell a su faire de ces équations dans les nombreux exemples qu'il a traités.

Pour ce qui est des questions particulières, nous signalerons d'intéressants paragraphes sur les courbes tautochrones; à propos des forces centrales, les belles recherches auxquelles sont attachés les noms de MM. Bertrand, Darboux et de Halphen. Le mouvement des planètes est l'objet d'une étude approfondie; l'équation si importante qui porte le nom de Képler occupe une place honorable; l'auteur a indiqué l'usage des fonctions de Bessel dans la résolution de cette équation. Un peu plus loin est traitée la célèbre question du pendule avec toutes les questions géométriques qui s'y rattachent et qui ont trouvé dans la théorie des tautochrones et des brachistochrones une double extension.

Le Volume se termine par l'exposition du principe de d'Alembert, du principe d'Hamilton et de celui de la moindre action dans le cas du point matériel. On place ordinairement ces principes dans la Dynamique des systèmes. En les donnant d'abord dans la Dynamique du point matériel, l'auteur a atteint un double but : d'abord, familiariser de bonne heure les étudiants avec ces principes, qui dans certains cas fournissent avec une grande facilité la solution des problèmes; en second lieu, présenter ces prin-

cipes dans un milieu où ils possèdent des propriétés particulières dont l'interprétation géométrique est incontestablement plus aisée que dans le cas général où elle exige parfois le secours de conceptions abstraites telles que la Géométrie à $n$ dimensions ou une conception extra-euclidienne de la notion de distance.

M. Appell nous promet deux autres Volumes. Le public attendra avec impatience et acceptera avec faveur, nous n'en doutons pas, la publication intégrale d'un Ouvrage qui marquera une ère dans l'enseignement de la Mécanique. G. Koenigs.

---

MÉRAY (Ch.). — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Première Partie : *Principes généraux.* 1 vol. in-8°; xxxiv-404 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.

M. Méray est à coup sûr un des mathématiciens qui honorent notre pays; la publication d'un grand ouvrage de lui sur l'Analyse infinitésimale ne peut manquer d'être accueillie avec faveur et avec intérêt par le monde savant, et les lecteurs seront heureux de retrouver, cette fois avec les développements et les compléments qu'ils souhaitaient, les idées systématiques émises par l'auteur dans son *Précis d'Analyse infinitésimale.* M. Méray a consacré de longs et fructueux efforts à édifier sa théorie des fonctions; il a apporté, sur des points essentiels et difficiles, d'importantes contributions; c'est avec une fierté légitime qu'il reproduit, en tête de ses *Leçons nouvelles,* les titres et les dates de ses nombreuses publications. Depuis 1868, M. Méray était en possession de ses idées fondamentales sur le rôle essentiel que doivent jouer, dans la théorie des fonctions, les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives des variables. Ces idées, depuis 1869, ont été le fond et la substance de son enseignement [1].

---

[1] Sur un point de moindre importance, relatif à la théorie des nombres irrationnels, je n'avais pas songé, dans la préface de mon *Introduction à la théorie des fonctions,* à citer le premier travail de M. Méray. C'est de la façon la plus aimable pour moi que M. Méray rappelle sa publication, et je ne saurais que l'en remercier.

Elles sont aujourd'hui dominantes, et M. Méray a le droit de s'en réjouir, si même il n'a pas été le seul à en assurer le triomphe : on sait assez qu'elles ont été développées ailleurs par un géomètre illustre qui s'est acquis une gloire incontestée, non seulement dans l'organisation de la théorie générale, mais aussi par les progrès considérables qu'il a réalisés dans l'étude approfondie de ces fonctions particulières, pour lesquelles il semble que la théorie générale soit faite.

Chez M. Méray, l'idée du développement en série de Taylor est en quelque sorte primordiale et exclusive : pour lui, en dehors d'un pareil développement, il n'y a point de fonction. C'est un point sur lequel il revient continuellement et avec quelque passion. Il fait bon marché de tout le reste. Les fonctions analytiques, comme on dit aujourd'hui, suffisent à tout et se suffisent à elles-mêmes. En dehors d'elles, les règles générales ne s'appliquent pas ou s'appliquent mal et l'on ne trouvera rien qui soit vraiment utile, vraiment intéressant. On doit donc, dans l'enseignement, tout sacrifier aux fonctions analytiques. Que leur rôle soit actuellement prépondérant, personne ne pense à le contester; qu'elles puissent suffire d'ici longtemps, le plus souvent, aux applications des Mathématiques, à la Mécanique, à l'Astronomie, à la Physique, on n'en saurait douter non plus, et le passé nous répond de l'avenir.

Cependant, n'y a-t-il pas quelque excès à vouloir bannir toute autre spéculation? Pour ce qui est de la science pure, il convient peut-être de la laisser se constituer librement, suivant le génie propre de ceux qui en ont la curiosité. En fait, quoique l'Analyse ait la prétention d'être la science de l'*a priori*, c'est en quelque sorte d'une façon contingente et, en tout cas, impossible à prévoir, que les questions se posent et que les solutions se découvrent; c'est l'observation seule et l'expérience qui montrent l'importance et la valeur des idées qu'on y introduit. Le développement d'une fonction en série de puissances entières est après tout un mode particulier d'existence de cette fonction : comment justifier *a priori* le caractère primordial de ce mode d'existence? C'est l'expérience seule qui a révélé son importance. M. Méray a réalisé cette expérience, c'est un service éminent; mais d'autres expériences, qui ne se grouperont pas autour des mêmes lois,

ne sont-elles pas légitimes, et, par exemple, les séries entières elles-mêmes ne posent-elles pas, sur le cercle de convergence, la question des développements en série trigonométrique? N'y a-t-il pas là un mode d'existence d'une nature tout autre, et ce mode d'existence n'intervient-il pas, lui aussi, dans les applications aux problèmes posés par les sciences de la nature?

Pour ce qui est de ces applications, il s'agit d'arriver, par les moyens les plus simples pour notre intelligence, à des solutions aussi approchées que possible. A la vérité, il y a des gens qui croient que la *chose en soi* est une fonction analytique; mais je n'ai heureusement aucune raison pour prêter cette opinion à M. Méray; il est encore permis de penser que nous n'atteindrons jamais la *chose en soi*, et que le progrès des sciences de la réalité consiste dans la constitution de schémas qui s'adaptent de mieux en mieux à la façon dont nous nous représentons les choses; la valeur de ces schémas, toute relative à nous, est double : elle est dans l'exactitude avec laquelle ils réalisent cette représentation et dans leur simplicité. Les fonctions analytiques se présentent actuellement comme ayant une simplicité incomparable, et c'est ce qui fait leur importance; j'ai entendu dire, il est vrai, que cette simplicité tenait à ce que notre cerveau était lui-même composé de fonctions analytiques. Je n'attribue pas non plus cette opinion à M. Méray; il est encore permis de suspendre son jugement sur ce sujet, et les esprits timorés peuvent, sans absurdité, craindre que, après avoir étudié des fonctions analytiques simples, on en rencontre de fort compliquées, qui ne s'adaptent aux choses que difficilement, avec de grands efforts : s'il arrivait qu'il en fût ainsi, et si d'autres fonctions nous fournissaient des formules plus simples, on n'hésiterait sans doute pas à les adopter, quelle que fût leur origine. C'est la future histoire des progrès de la science qui seule pourrait nous dire ce qui en est et personne ne sait l'histoire future de ces progrès. Quoi qu'il en soit, ceux qui ont une foi robuste sont aussi ceux qui contribuent le mieux à ces progrès, et l'on serait mal venu à reprocher la sienne à M. Méray, d'autant que la religion des fonctions analytiques n'est pas près d'être épuisée : tout au plus peut-on regretter qu'il mette tant d'ardeur à décourager et à poursuivre les hérétiques. Il y a longtemps qu'on a dit que les hérésies étaient nécessaires.

Sa doctrine, en tout cas, se tient fort bien; elle est pure de tout mélange; l'idée de nombre lui suffit, et M. Méray a grand soin d'écarter toute considération étrangère; il convient de dire un peu plus : tout en fondant uniquement, comme il fait, l'Analyse sur cette seule idée, on peut avoir hâte de faire intervenir ces fonctions particulières qui ont une représentation géométrique simple, et s'aider, sans le dire, de cette représentation; cette marche détournée n'est pas la sienne : il écarte tout ce qui est *transcendant;* il ne veut point d'autre clarté que la clarté de l'Algèbre élémentaire, qui, sans doute, est incomparable. S'il parle des variables imaginaires, il bannit l'*argument*, dont il n'a que faire, et qui sent sa Géométrie. Voici un volume de quatre cents pages qui commence à la notion de nombre entier, qui se termine par des propositions générales sur les équations aux dérivées partielles; l'auteur n'y a parlé d'aucune fonction particulière; on n'y rencontre ni la fonction exponentielle, ni les fonctions circulaires. Cela est trop particulier, et viendra plus tard, comme une application infime des théorèmes généraux : il ne faut pas troubler l'ordre et l'enchaînement de ces théorèmes qui se déroulent majestueusement. Nous ne toucherons terre que plus tard; nous restons ici dans la sérénité des principes. J'insiste sur ce goût de M. Méray pour les généralités, car il est vraiment caractéristique. C'est toujours à l'idée générale qu'il court, il ne s'attarde jamais à particulariser; si une proposition et une démonstration s'appliquent à des systèmes de fonctions et de variables, c'est à ce système de fonctions et de variables qu'il s'attaquera de suite, sans traîner sur le cas d'une fonction et d'une variable. Il s'exprime d'ailleurs très exactement quand il dit que l'intelligence de son ouvrage « n'exige presque pas autre chose que la pratique du calcul algébrique élémentaire, avec la connaissance approfondie des équations simultanées du premier degré » : le *presque pas autre chose,* c'est la force d'abstraction nécessaire pour rester longtemps dans la région des principes généraux, et ce n'est pas rien, si claire que soit cette région, et si lumineux que soit le chemin par lequel M. Méray nous y conduit.

Il faut s'habituer peu à peu à cette région élevée, à l'air subtil qu'on y respire, et ne vouloir y monter que lentement. A coup sûr, M. Méray ne conseillerait à personne de commencer l'étude

de ses *Leçons* sans autre bagage que « la pratique du calcul algébrique élémentaire et la connaissance approfondie des équations simultanées du premier degré », bien que, assurément, au point de vue de la pure logique, ce bagage soit suffisant. Comme pour les autres sciences, l'enseignement des Mathématiques doit procéder du particulier au général ; il faut étudier des types caractéristiques pour bien comprendre les lois de l'espèce, il faut voir le général en lui-même, mais aussi dans le particulier. Quelques géomètres vont plus loin : ils font consister l'Analyse entière dans l'étude approfondie des fonctions particulières, de leur mode d'existence, de leurs relations mutuelles, et n'accordent de valeur aux propositions générales qu'en tant qu'elles peuvent faciliter cette étude. Mais peu importe, puisque cette valeur-là, au moins, ne peut pas être contestée ; tout le monde, et M. Méray le premier, sera d'accord pour conseiller aux jeunes gens d'étudier les fonctions élémentaires les plus importantes, la fonction exponentielle et les fonctions circulaires, avant d'aborder les théories générales.

Cette étude, dans notre système d'enseignement, a sa place marquée dans la classe de Mathématiques spéciales : elle y est faite, mais en se plaçant à un point de vue qui est peut-être trop étroit. On n'y craint point d'user (quelques-uns disent d'abuser) des imaginaires en Géométrie ; pourquoi a-t-on tant de scrupules quand il s'agit d'Analyse, où, peut-être, les difficultés sont moindres ? On enseigne la série de Taylor, la série exponentielle pour les variables réelles, puis le calcul des nombres imaginaires, la formule de Moivre ; pourquoi laisser ignorer aux élèves le lien qui existe entre les fonctions circulaires et la fonction exponentielle ? Pourquoi, lorsqu'on n'a qu'un pas à faire, ne pas donner aux élèves quelques notions sur les séries entières, notions que l'on touche, pour ainsi dire, et que l'on n'a presque plus qu'à énoncer ? De cette façon, les élèves seraient préparés à suivre M. Méray sur les hauteurs où il prétend les conduire. Ce serait un très léger changement à nos habitudes, et qui semble bien désirable. Au reste, quelques professeurs l'ont déjà essayé, avec cette timidité dans l'innovation que leur impose le souci des examens, qui, trop souvent, n'est pas le même que le souci du meilleur enseignement théorique.

Quoi qu'il en soit, M. Méray reprend les choses au début : après

avoir rappelé la notion de nombre entier, il explique comment l'impossibilité de la division, conçue comme opération inverse de la multiplication, conduit à la notation des fractions, et comment l'impossibilité de la soustraction conduit à la notation des nombres négatifs. Il revient sommairement, de ce point de vue, sur les propositions fondamentales relatives au calcul des nombres fractionnaires et négatifs. Il introduit ensuite ce qu'il appelle les *variantes :* une variante $v_{m,n}, \ldots$ est une quantité qui est définie quand le système de ses indices $m, n, \ldots$ est déterminé ; ces indices sont habituellement des nombres entiers positifs.

Une variante est dite par lui *convergente* quand la différence $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ devient infiniment petite, les indices $m''$, $n''$, ..., $m'$, $n'$, ... étant infiniment grands. On sait que cette notion de convergence suffit à établir rigoureusement la notion de limite et celle de nombre irrationnel, ainsi que les propositions qui concernent le calcul de ces nombres. Les nombres imaginaires sont introduits comme un système de deux nombres réels; on peut considérer les variantes imaginaires comme des systèmes de deux variantes réelles. La notion de nombre a maintenant acquis toute l'extension nécessaire à la constitution de l'Analyse. Les séries, tant qu'on y regarde chaque terme comme une constante, n'apportent rien de plus que quelques règles commodes de calcul à la nòtion de variante.

Avec les séries entières [1], l'auteur entre dans le cœur de son sujet : il considère de suite les séries de cette sorte avec un nombre quelconque de variables, et il établit le théorème d'Abel relatif à leur mode de convergence. Une telle série, tant qu'on reste dans les cercles de convergence, peut, comme un simple polynome, être ordonnée suivant l'une ou l'autre des variables, etc.; la substitution, aux diverses variables, de sommes de quelques autres engendre une série encore entière par rapport à ces dernières variables, résultat analogue à la formule ordinaire du binome et de portée non moindre dans la théorie des fonctions; une série entière définit une fonction continue; un développement de ce

---

[1] L'expression de *série entière,* qui remplace avantageusement *série ordonnée suivant les puissances entières*, etc., a été introduite par M. Méray dans son *Précis.*

genre n'est possible que d'une seule façon, etc. Ces propositions, si capitales qu'elles soient, n'offrent aucune difficulté : une seule fait exception, c'est celle qui fournit une limite supérieure des modules des coefficients quand on a une limite supérieure du module de la fonction sur les cercles de convergence. Cette proposition, à la vérité, s'offre pour ainsi dire d'elle-même quand on veut faire appel à quelques considérations de Calcul intégral. Ces considérations-là, M. Méray, dans l'ordre qu'il a adopté, devait les rejeter, et la démonstration qu'il donne semble aussi naturelle que possible, en se plaçant à son point de vue ([1]). La théorie des séries entières étant ainsi établie dans ce qu'elle a d'essentiel, l'auteur définit les fonctions *olotropes* en un point $x_0, y_0, \ldots$, avec les *olomètres*, $\delta_x$, $\delta_y$, ..., c'est-à-dire développables en séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., convergentes dans des cercles de rayons $\delta_x$, $\delta_y$, ..., puis les fonctions olotropes dans des aires $S_x$, $S_y$, ....

Le mot *olotrope*, proposé par M. Méray en 1872, valait bien holomorphe ([2]), expression moins ancienne qui a fait meilleure fortune. En altérant, il est vrai, la signification donnée par Cauchy, on aurait pu conserver le mot *synectique*, qui a exactement la même extension. Ç'aurait été une économie. Quant à l'expression *indéfiniment* olotrope, elle me paraît moins prêter à l'ambiguïté que l'expression *transcendante entière*.

Cette notion acquise, celle de *dérivées* se présente immédiatement. L'auteur expose, ensuite, avec une grande clarté, la génération des fonctions par *prolongement*, *continuation*, ou, suivant sa terminologie, par *cheminement*. Il convient de signaler la façon dont l'auteur montre comment, dans une aire limitée par un contour simple, une *pseudo-fonction oloïde*, c'est-à-dire une suite de séries entières dont les cercles de convergence empiètent les uns sur les autres et qui se raccordent dans les parties communes à ces cercles (éléments ou *articles* de fonctions) constituent une véritable fonction *olotrope* dans cette aire, et aussi la façon dont il montre comment, lorsqu'une fonction est olotrope

([1]) Voir *Bulletin*, t. XV, p. 891.

([2]) Quant à la lettre initiale *h*, ses partisans et ses ennemis peuvent se jeter respectivement à la tête les mots *holocauste* et *olographe*.

dans une aire S, avec l'olomètre $\delta$, c'est-à-dire est développable en une série entière en $x - x_0$ avec un rayon de convergence au moins égal à $\delta$, le rayon de convergence est au moins égal à $R_0 + \delta$, en désignant par $R_0$ le rayon du plus grand cercle de centre $x_0$ qui soit contenu à l'intérieur de S. L'auteur, avant la publication de son *Précis*, était en possession de ces deux démonstrations, qui restent strictement dans l'ordre d'idées que j'ai essayé de caractériser plus haut. On sait que la seconde proposition est immédiate si l'on se place au point de vue de Cauchy et l'on voit ainsi que M. Méray s'était éloigné très tôt de ce point de vue.

Sous le nom de *calcul inverse des dérivées*, l'auteur traite des intégrales indéfinies, ou, plus généralement, de l'intégration d'un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots),$$

$$\frac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il s'agit, bien entendu, de l'existence de la fonction $u$, c'est-à-dire de son développement en série, mais nullement de son expression au moyen de fonctions élémentaires connues.

Jusqu'ici il n'a été question que de fonctions *isolées*, considérées chacune comme si nulle autre n'existait.

Le reste du Volume est consacré aux diverses théories générales qui impliquent la composition des fonctions. L'auteur développe d'abord l'ensemble des conséquences qui résultent de ce qu'une fonction composée $F(x, y, \ldots)$, déduite de la fonction composante $f(u, v, \ldots)$, en y remplaçant $u, v, \ldots$ par des fonctions olotropes de $x, y, \ldots$, est elle-même olotrope en $x, y, \ldots$ quand $f(u, v, \ldots)$ est olotrope en $u_1 v_1 \ldots$.

M. Méray commence ensuite l'étude des équations différentielles totales. Expliquons d'abord sa terminologie.

Un système d'équations différentielles est *immédiat* quand toutes les équations sont du premier ordre et fournissent immédiatement plus ou moins de dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de

ces fonctions inconnues et de leurs autres dérivées. Chaque premier membre est ainsi une dérivée de quelque fonction inconnue et cette dérivée ne figure dans aucun des seconds membres. Si le nombre des équations est égal à celui des dérivées des fonctions inconnues, les seconds membres ne contiennent plus de dérivées, et l'on a alors affaire à un système d'équations différentielles totales; si le nombre des équations est moindre que le nombre des fonctions inconnues, on a un système d'équations différentielles partielles. Le système d'équations différentielles totales est dit *passif* si les conditions d'intégrabilité sont vérifiées.

En désignant par $x$, $y$, ... les variables indépendantes et par $u$, $v$, ... les fonctions inconnues, puis par $S_x$, $S_y$, ..., $S_u$, $S_v$, ... des aires dans lesquelles les seconds membres, regardés comme des fonctions des variables $x$, $y$, ..., $u$, $v$, ..., sont olotropes, les intégrales *ordinaires* du système seront des fonctions $u$, $v$, ... de $x$, $y$, ... dont les valeurs, tant que les fonctions seront olotropes en $x$, $y$, ..., jointes aux valeurs de ces dernières variables, tomberont toujours dans les aires $S_u$, $S_v$, ..., $S_x$, $S_y$, ....

L'auteur, en supposant que le système soit passif et que les aires $S_x$, $S_y$, ..., $S_u$, $S_v$, ... soient limitées, montre que, si les valeurs arbitraires $x_0$, $y_0$, ..., $u_0$, $v_0$, ... appartiennent à ces aires, il existe des intégrales *ordinaires* se réduisant à $u_0$, $v_0$, ... quand $x$, $y$, ... prennent les valeurs $x_0$, $y_0$, ....

Cette démonstration repose uniquement sur l'examen des développements en série des intégrales cherchées, que fournissent les équations différentielles données; l'auteur n'a besoin d'y faire intervenir aucune équation différentielle auxiliaire; l'emploi d'une fonction *majorante* très simple lui fournit tout ce qu'il lui faut pour obtenir une limite inférieure des rayons de convergence.

Il montrera plus tard que ces intégrales sont aussi olotropes par rapport aux valeurs initiales. Il applique ensuite ce théorème fondamental à la preuve de l'existence des fonctions *implicites*.

Il passe ensuite aux systèmes d'équations différentielles partielles, et les suppose toujours immédiats, dans le sens qui a été donné plus haut à ce mot : maintenant, les seconds membres contiennent des dérivées qui ne figurent pas dans les premiers. Supposant les équations écrites dans un *quadrillage*, en sorte que les dérivées d'une même fonction soient toujours dans une même

colonne verticale, et que les dérivées prises par rapport à une même variable soient toujours dans une même ligne horizontale, il désigne sous le nom de variables *principales* d'une fonction inconnue celles par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans la ligne verticale relative à cette fonction, et sous le nom de variables *paramétriques* les autres variables indépendantes. Il va sans dire qu'une variable peut être paramétrique pour une fonction, principale pour une autre. Ceci posé, il réserve désormais le nom de système immédiat aux systèmes qui satisfont à la condition suivante : en désignant par $u$, $v$ deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée (paramétrique) de $v$ ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne ($u$) si quelque variable paramétrique de $u$ est principale pour $v$. Dès lors, en supposant l'existence d'intégrales ordinaires, la connaissance des déterminations initiales de toutes les intégrales (déterminations qui sont des fonctions des variables paramétriques) permet la reconstruction des développements de ces intégrales. Si le système est *passif*, on peut ainsi construire ces développements ; mais, dans le cas général, on ne peut pas affirmer leur convergence : celle-ci est assurée lorsque, d'une part, le système est *régulier*, c'est-à-dire quand les fonctions inconnues du système (immédiat) peuvent être rangées dans un ordre tel que toute variable qui est principale pour l'une le soit aussi pour toutes les précédentes, et lorsque, d'autre part, il est *linéaire*, c'est-à-dire quand les dérivées (paramétriques) des fonctions inconnues entrent toutes linéairement dans les seconds membres. Alors les développements hypothétiques des intégrales, sous des conditions que l'auteur précise avec soin, ont un groupe commun de rayons de convergence, non tous nuls ; en résumé, un pareil système possède des intégrales ordinaires qui restent localement olotropes tant que leurs déterminations initiales et les fonctions qui jouent le rôle de coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres demeurent elles-mêmes olotropes. Enfin, l'intégration de tout système immédiat, passif et régulier, peut être ramené à celle d'un autre jouissant de ces trois propriétés, et, de plus, linéaire. Au contraire, pour un système immédiat, passif, *irrégulier*, il peut être impossible de trouver des intégrales qui répondent à des déterminations initiales arbitraires. M. Méray en donne un exemple.

Après avoir ensuite expliqué rapidement la marche générale à suivre pour découvrir toutes les solutions *ordinaires, singulières* ou *exceptionnelles* d'un système donné quelconque d'équations différentielles et finies, l'auteur revient aux systèmes immédiats et passifs d'équations différentielles totales, pour faire une étude plus approfondie de leurs intégrales, en particulier au point de vue des constantes arbitraires, et des équations intégrales : il établit enfin l'existence des multiplicateurs intégrants.

Ajoutons que les Chapitres X et XII, relatifs aux développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales ou partielles, avaient fait la matière de deux Mémoires publiés avec le concours de M. Riquier, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

Je ne sais si ce rapide résumé aura pu donner au lecteur quelque idée de la parfaite homogénéité du livre de M. Méray, de l'ordre qui y règne, du caractère naturel et de la rigueur absolue des démonstrations. C'est le livre lui-même qu'il faut lire. Le terrain est maintenant singulièrement déblayé pour les monographies de fonctions et les applications diverses qui rempliront les volumes suivants, dont nous espérons que la publication ne se fera pas attendre. J. T.

---

DEDEKIND. — VORLESUNGEN UEBER ZAHLENTHEORIE VON P.-G. LEJEUNE-DIRICHLET. Vierte Aufgabe. 1 vol. in-8°. VIII-657 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1894.

Nous sommes heureux d'annoncer la quatrième édition des Leçons de Lejeune-Dirichlet sur la théorie des nombres. Ces leçons sont *classiques*, dans toute la force du mot; elles sont, à bien des égards, définitives, et M. Dedekind n'avait pas à toucher à la rédaction qu'il en avait donnée, il y a déjà bien des années; toutefois, il a pris grand soin de tenir à jour les renseignements bibliographiques, afin de permettre au lecteur de consulter les travaux dont quelques points ont été l'objet. Il n'est pas de livre qui puisse dispenser entièrement le lecteur de recourir aux travaux qui l'ont précédé, non plus qu'à ceux qui l'ont suivi. Les leçons de Dirichlet elles-mêmes n'empêcheront point qu'on lise

les *Disquisitiones* de Gauss, ni les recherches de Kronecker sur la loi de réciprocité, pour ne parler que de celles-là.

Mais, s'il a eu la piété de ne pas toucher à la partie de son Livre qui reproduit l'enseignement de Dirichlet, M. Dedekind a donné tous ses soins à améliorer et à compléter ce qui est son œuvre propre et, assurément, un de ses plus beaux titres de gloire, cette *Allgemeine Zahlentheorie*, où se trouvent développés, d'une façon systématique et rigoureuse, les concepts de *corps* et de *module* et qui aboutit, par la notion des *idéaux*, à la claire exposition de ces lois de la divisibilité des nombres algébriques dont l'ordre et l'unité étaient si profondément cachés ([1]). Dans cette belle exposition, M. Dedekind part de la notion de nombre dans toute sa généralité, et descend, par une suite de concepts abstraits, aux propriétés des nombres algébriques, qui sont son objet propre. On lui a reproché ce point de départ qui, dit-on, est étranger à l'Arithmétique. Quelle que soit la force de cette critique, il est juste de ne pas oublier que, dans d'autres écrits, M. Dedekind a su donner à la notion de nombre irrationnel toute la clarté dont elle paraît susceptible, et de reconnaître, tout au moins, la légitimité et la solidité de la construction qu'il a édifiée : elle subsistera sans doute, à côté d'autres constructions.

J. T.

---

([1]) Les lecteurs du *Bulletin* n'ont pas oublié le Mémoire (1re série, t. XI, et 2e série, t. I) où M. Dedekind a exposé d'une façon si intéressante l'historique de la question, la genèse de ses propres idées, et comment, en particulier, il avait été amené à compléter la conception géniale de Kummer.

# MÉLANGES.

## SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLES DANS UNE INTÉGRALE DOUBLE;

PAR M. E. GOURSAT.

La méthode que l'on emploie ordinairement dans les cours d'Analyse pour établir la formule du changement de variables dans une intégrale double est soumise à des objections dont la discussion est assez délicate. Voici une autre méthode que j'ai donnée dans mon cours à l'École Normale, pour obtenir cette formule.

Soient $Ox$, $Oy$ deux axes de coordonnées rectangulaires dans un plan P, A une portion finie de ce plan, limitée par un contour simple C, $F(x, y)$ une fonction continue des deux variables $x$ et $y$ à l'intérieur du contour C et sur ce contour lui-même. Divisons la région A en $n$ portions plus petites $a_1, a_2, \ldots, a_n$, d'une façon arbitraire, et soit $\omega_i$ l'aire de la portion $a_i$; prenons ensuite à l'intérieur de $a_i$ ou sur le contour de cette portion du plan un point de coordonnées $(x_i, y_i)$. La somme

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, F(x_i, y_i)$$

tend vers une limite parfaitement déterminée, lorsque le nombre $n$ augmente indéfiniment, de telle façon que chacune des régions $a_i$ devienne infiniment petite dans toutes ses dimensions. C'est cette limite qu'on appelle l'intégrale double

$$\int\int F(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à la portion A du plan [1].

Cela posé, soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v). \end{cases}$$

[1] On suppose acquise, dans cette définition, la notion de l'aire d'une courbe; cette notion n'exige que la considération d'intégrales simples (PICARD, *Traité d'Analyse*).

des formules de transformation, remplaçant le système de variables $(x, y)$ par un nouveau système de variables indépendantes $(u, v)$. Nous supposons : 1° que ces formules font correspondre d'une façon univoque une certaine portion B du plan $(u, v)$ à la région A du plan $(x, y)$, et que le contour C′ de B correspond aussi point par point au contour C de A; 2° que les fonctions $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre à l'intérieur de C′ et sur ce contour; 3° que le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ n'est *jamais négatif* dans la région B.

Lorsque le point $(x, y)$ décrit le contour C dans le sens direct, le point $(u, v)$ décrit le contour C′ dans un certain sens, que nous déterminerons tout à l'heure.

Appelons $\Omega$ et $\Omega'$ les aires des deux régions A et B; nous allons chercher une expression du rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$.

Pour cela, il suffit de faire usage de la formule de Green, qui s'établit directement et sans avoir recours à aucun changement de variable. Cette formule fondamentale est la suivante :

$$(2) \qquad \int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy,$$

l'intégrale curviligne étant prise le long du contour C dans le sens direct, et l'intégrale double étant étendue à la région A; dans cette région, P et Q sont des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées. L'aire $\Omega$ est représentée par l'intégrale curviligne

$$\Omega = \int x\,dy,$$

prise le long de C dans le sens direct. Si l'on fait dans cette intégrale le changement de variable défini par les formules (1), elle devient

$$\Omega = \int f(u, v) \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv\right\},$$

la nouvelle intégrale curviligne étant prise le long de C′ dans un sens convenable. On peut appliquer à cette dernière intégrale la

formule de Green; il suffit pour cela, après avoir remplacé $x$ et $y$ par $u$ et $v$, de poser

$$P = f(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad Q = f(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Il vient

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)},$$

et, par suite,

$$\Omega = \pm\int\int\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\,du\,dv,$$

l'intégrale double du second membre étant étendue à la région B. Tous les éléments de cette intégrale étant positifs, on doit prendre nécessairement le signe $+$, et nous voyons déjà que les deux contours C et C′ sont parcourus en même temps dans le sens positif. D'autre part, il est clair que la valeur de cette intégrale double est comprise entre $M\int\int du\,dv$ et $m\int\int du\,dv$, M et $m$ étant les limites supérieure et inférieure du déterminant fonctionnel dans la région considérée, c'est-à-dire entre $M\Omega'$ et $m\Omega'$. On peut donc trouver à l'intérieur de C′ un point $(\xi, \eta)$ tel que le rapport $\frac{\Omega}{\Omega'}$ ait la valeur que prend le déterminant $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ pour $u = \xi$, $v = \eta$, et on trouve finalement

$$\Omega = \Omega'\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]_{\xi, \eta}, \tag{3}$$

formule analogue à la formule des accroissements finis.

Imaginons maintenant que l'on partage la région B en $n$ régions plus petites $b_1, b_2, \ldots, b_n$; à cette division de B correspond une division de A en $n$ régions $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les régions qui se correspondent ayant le même indice. Soient $\omega_i$ l'aire de $a_i$ et $\omega'_i$ l'aire de $b_i$; appliquons la formule (3) à ces deux aires : on a

$$\omega_i = \omega'_i\left\{\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right\}_{u_i, v_i}$$

$(u_i, v_i)$ étant les coordonnées d'un point intérieur à la région $b_i$. A ce point $(u_i, v_i)$ correspond un point $(x_i, y_i)$ intérieur à $a_i$. On

à l'égalité

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} F\left\{f(u_i, v_i), \varphi(u_i, v_i)\right\} \left\{\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right\}_i \omega'_i;$$

si l'on fait croître indéfiniment le nombre $n$, de façon que toutes les régions partielles deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions, le premier membre de cette égalité a pour limite l'intégrale double $\int\int F(x, y)\,dx\,dy$, étendue à la région A du plan $(x, y)$, et le second membre a pour limite l'intégrale double $\int\int F(x, y)\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\,du\,dv$, étendue à la région B du plan $(u, v)$. On a donc

$$\int\int_{(A)} F(x, y)\,dx\,dy = \int\int_{(B)} F(x, y)\,\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\,du\,dv.$$

Si le déterminant fonctionnel n'était *jamais positif* dans B, il faudrait faire précéder du signe — la seconde intégrale.

On démontre de la même façon la formule du changement de variables pour les intégrales triples. La démonstration devient plus difficile à saisir lorsqu'il y a plus de trois variables.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

FABRY (L.). — *Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes.* In-4°, 219 p. Marseille, impr. Barlatier et Barthelet.

LAURENT (H.). — *Traité d'Algèbre,* t. III, 5e édition, in-8°, 215 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 4 fr.

MÉRAY (C.). — *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.* Ire partie : *Principes généraux.* In-8°, XXIII-405 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 13 fr.

MITTHEILUNGEN DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT IN HAMBURG. — 3 Bd.

4 Heft. Redig. von Jaerisch, Köpcke u. Schröder. Gr. in-8°. Leipzig. Teubner. 1 m.

Kirchhoff (G.). — *Vorlesungen über mathematische Physik.* 4. (Schluss-) Bd. *Vorlesungen über die Theorie der Wärme.* Herausgeg. von M. Planck. Gr. in-8°, x-210 p. avec 17 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

Hertz (H.). — *Electric Waves : being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity through Space.* Translated by D.-E. Jones. With a Preface by Lord Kelvin. In-8°, 286 p. Londres, Macmillan. 10 sh.

Antomari (X.). — *Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées. Mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions.* In-4°, 113 p. avec figures. Paris, Nony et Cie.

Descartes (R.). — *Die Geometrie.* Deutsch herausgegeben v. L. Schlesinger. Gr. in-8°, xi-116 p. avec 2 planches. Berlin, Mayer et Müller. 3 m. 60 pf.

L'Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant et Émile Lemoine. T. I, n° 1 (janvier 1894). In-8°, 16 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. Abonnement annuel (12 nos). Paris, 5 fr.; départements et Union postale, 6 fr.

1re Part

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L'Intermédiaire des Mathématiciens, rédigé par *C.-A. Laisant* et *Émile Lemoine*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.

Les fondateurs de ce nouveau journal sont bien connus des lecteurs du *Bulletin* : ce sont des esprits curieux, toujours en éveil, et qui n'ont pas peur des nouveautés. C'est bien à eux que pouvait venir l'idée de cet *Intermédiaire* pour lequel il semble que les souhaits de bienvenue soient inutiles, tant il a été bien accueilli partout et tant les belles questions, souvent posées par les maîtres de la Science, y affluent. Ces questions sont intéressantes par elles-mêmes, et par ceux qui les ont faites, par le jour qu'elles jettent sur les choses qui les préoccupent : elles donneront sans doute à quelques-uns l'occasion de quelque beau travail, et les psychologues, désireux de se renseigner sur les *états d'âme* des mathématiciens, y trouveront leur compte.

Tous nos lecteurs, sans doute, auront lu le premier numéro de cet *Intermédiaire* et voudront lire les suivants : ils ne chercheront sûrement dans ces quelques lignes ni une *annonce*, ni une *analyse*; ils nous permettront d'adresser en leur nom à MM. Laisant et Lemoine, ainsi qu'à leurs éditeurs, les remercîments auxquels ceux-ci ont droit pour le nouveau et original service qu'ils rendent à la Science en publiant l'*Intermédiaire des mathématiciens*.

J. T.

---

GALILÉE. — Le Opere di Galileo Galilei, edizione nationale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume III. Parte prima. 400 p. in-4°. Florence, Barbèra, 1892.

Le troisième Volume de la nouvelle édition des *Œuvres de Galilée* a été divisé en deux parties : la première comprend le *Sidereus Nuncius* et les écrits qui s'y rapportent; la seconde, réservée aux Observations astronomiques et aux Calculs concernant les satellites de Jupiter, sera publiée à part.

Galilée était arrivé à l'âge de quarante-six ans, sans que sa réputation eût dépassé celle que peut s'acquérir un professeur de Mathématiques distingué, dont les leçons ont un grand succès, mais qui n'a pas publié de travaux originaux, en dehors de quelques inventions ingénieuses qui semblent indiquer que son esprit est surtout orienté vers les applications de la Science. Tout à coup, il fait connaître dans un écrit d'une quarantaine de pages, dont l'*imprimatur* est du 1$^{er}$ mars 1610, qu'ayant appris qu'en Hollande on avait imaginé une lunette d'approche donnant des résultats merveilleux, il est parvenu, après plusieurs essais, à construire un pareil instrument donnant un grossissement de plus de 30 diamètres; qu'il l'a dirigé vers le ciel et que les observations qu'il a faites ainsi l'ont amené aux conclusions suivantes :

La Lune a peut-être des mers et une atmosphère propre, en tout cas des montagnes dont on peut évaluer la hauteur qui dépasse de beaucoup celle des montagnes de la Terre.

Les fixes ne sont pas grossies par la lunette comme le sont les planètes, mais on en voit un nombre beaucoup plus considérable qu'à l'œil nu et l'on reconnaît que la voie lactée et les nébuleuses (d'Orion et de la Crèche) sont des amas d'étoiles.

Enfin, Jupiter est accompagné de quatre satellites qui tournent autour de lui, de même que la Lune, dans l'hypothèse de Copernic, tourne autour du Soleil (¹).

Du coup, Galilée devient célèbre : tout le monde veut vérifier ces affirmations inouïes; le voilà un sujet d'admiration et d'envie.

Parmi les astronomes de profession, dont le jugement devait être attendu par les profanes, les trois principaux étaient Kepler à Prague (il venait précisément de publier l'année précédente les *Commentaires sur les mouvements de Mars*), Magini à Bologne, Clavius à Rome.

Kepler, à qui Galilée a envoyé un des premiers exemplaires du *Sidereus Nuncius*, répond, dès le mois de mai, par une *Disser-*

---

(¹) Les éditeurs ont reproduit en *fac-similé* un manuscrit de Galilée donnant une première ébauche du *Sidereus Nuncius;* cette reproduction est des plus intéressantes; l'écriture de Galilée est d'ailleurs passablement nette et facile à lire.

*tatio* imprimée. A une époque où il n'y avait pas de journaux scientifiques, cette *Dissertatio* représente une analyse critique : il ne faut pas y voir autre chose; elle est d'ailleurs aussi favorable qu'on peut l'attendre d'un astronome qui n'a pu observer encore lui-même les apparences annoncées, auquel sa position impose une certaine réserve et qui est d'ailleurs bien aise de trouver une occasion de rappeler ses propres travaux.

Il fait très justement ressortir que le principal mérite de Galilée dans la construction de sa lunette est peut-être moins d'avoir réalisé une combinaison de lentilles déjà indiquée par Porta (1), que d'avoir su trouver le moyen de mesurer exactement les petits angles.

Les découvertes sur la Lune et les fixes ne font, dit-il, que confirmer des opinions déjà émises, même dans l'antiquité; celle des satellites de Jupiter est beaucoup plus inattendue; leur existence serait d'ailleurs un puissant argument en faveur de l'hypothèse de Copernic; elle n'est enfin nullement incroyable et ne renverserait nullement les principes de l'Astrologie, comme certains pourraient être portés à le croire à première vue.

Du 1er août au 9 septembre 1610, Kepler put lui-même observer les satellites de Jupiter avec un des instruments envoyés par Galilée à l'Électeur de Cologne; il en rendit aussitôt témoignage par sa *Narratio* imprimée (Francfort, 1611), à laquelle sont jointes des épigrammes latines de l'Anglais Thomas Seggett. C'est dans un de ces vers que se trouve le célèbre mot *Vicisti, Galilæe*, attribué à Kepler.

En résumé, l'attitude du célèbre astronome de Prague dans toute cette question fut très nette et tout à fait digne de lui; il n'en fut pas de même pour Clavius et surtout pour Magini.

C'est de l'entourage de ce dernier que part la première attaque contre Galilée, la *Brevissima peregrinatio* de Martin Horky. L'auteur était un jeune Bohémien, qui avait obtenu des recom-

(1) On avait d'ailleurs déjà mis en usage, pour les observations astronomiques, des tubes munis d'une seule lentille; Kepler avoue n'avoir pas cru antérieurement aux effets annoncés par Porta, si l'on combine un verre concave avec un convexe, mais il déclare que ces effets sont bien d'accord avec les lois de l'Optique et que ses motifs de défiance tenaient à d'autres circonstances.

mandations de Kepler, et qui était venu étudier la Médecine et l'Astronomie à Bologne. Magini le logeait chez lui, et s'en servait comme copiste.

Il rédigea un curieux pamphlet qu'il fit imprimer à Modène, en juin 1610. Cet écrit, à la fois véhément et alambiqué, n'a aucune valeur scientifique; il s'attaque d'ailleurs à peu près exclusivement à l'existence des satellites de Jupiter, qu'il déclare être de pures illusions optiques, analogues aux parhélies; mais sa grande raison, c'est que s'il y a vraiment plus de sept astres errants, tous les axiomes de l'Astrologie tombent d'eux-mêmes. Ainsi, tandis que les partisans des doctrines d'Aristote restent encore sur la réserve, les astrologues, comme Kepler l'avait déjà prévu, se mettent en campagne contre les vérités nouvelles.

Galilée n'avait pas à répondre à une attaque aussi inconvenante dans la forme que puérile dans le fond. Un de ses élèves, l'Écossais Wodderborn, lança une *Confutatio* (Padoue, octobre 1610), appuyée surtout sur l'autorité de Kepler. D'autre part, Magini, fâché d'être maladroitement compromis, chassa Horky [1] de chez lui, s'excusa auprès de Galilée et concerta avec un de ses élèves, Giovanni-Antonio Roffeni, l'*Epistola apologetica* (Bologne, 1611), adressée au professeur de Padoue.

Il y est, entre autres choses, relevé que Horky avait purement et simplement copié les injures adressées par lui à Galilée de pamphlets dirigés contre Tycho Brahé par Raimarus Ursus.

La thèse de Horky n'en fut pas moins reprise, avec des arguments d'apparence plus sérieux et sous une forme plus modérée, par un jeune gentilhomme florentin, Francesco Sizzi, et il semble bien que Magini l'ait encouragé sous main à le faire, peut-être pour distraire Galilée de ses observations et pouvoir ainsi le devancer dans la publication des éphémérides des satellites de Jupiter.

Mais son calcul fut trompé; si Galilée lut la longue *Dianoia* de Sizzi (Venise, 1611), et inscrivit en marge quelques annotations

(1) Il retourna bientôt après en Bohême, où Kepler lui lava fortement la tête. Après une existence assez agitée, il finit par s'établir à Hambourg pour y pratiquer la Médecine et l'Astrologie.

reproduites par les éditeurs, il n'avait guère à s'en préoccuper davantage (¹).

Après les astrologues, les péripatéticiens commencent à s'agiter; le premier qui se prononce dans un écrit imprimé est un professeur de Philosophie au Collège Romain, La Galla. Sa *Disputatio* prolixe (*De Phænomenis in orbe Lunæ,* etc., Venise, 1612), également annotée par Galilée, est d'ailleurs très mesurée. L'auteur comble d'éloges l'illustre savant, et ne s'inscrit en faux ni contre ses observations, ni contre les déductions rigoureuses qui en sont tirées; mais il soutient que, si Galilée a présenté les apparences constatées sur la Lune comme si elles étaient dues à des inégalités de la surface de notre satellite, il n'a nullement eu l'intention d'affirmer l'existence réelle de ces inégalités, qui est incompatible avec la doctrine d'Aristote; les apparences doivent donc s'expliquer par des différences de nature dans les diverses parties de la surface de la Lune, qui réfléchissent inégalement la lumière du Soleil, mais cette surface doit nécessairement être sphérique.

La position que prend La Galla vis-à-vis de Galilée indique la nature de l'accueil fait aux nouvelles découvertes par le Collège Romain. Leur vérité et leur importance ne sont pas contestées, mais les conséquences à en tirer sont au moins réservées. C'est le sentiment qui perce dans le *Nuncius sidereus Collegii Romani* lu en présence de Galilée (mai 1611) par le P. de Maelcote et où il fut publiquement parlé pour la première fois des phases de Vénus et des apparences de Saturne, d'après les communications de Galilée à Clavius et les vérifications entreprises à Rome.

De la même date est une autre pièce, *De lunarium montium altitudine,* lue également en présence de Galilée dans une réunion scientifique à Mantoue. L'auteur de cette pièce, qui est inconnu, s'efforce en particulier de montrer un point faible dans les raisonnements de Galilée, lequel n'ayant reconnu aucune dentelure sur le limbe de la Lune, avait cherché à expliquer cette circonstance tout

(¹) Sizzi était réservé à une fin malheureuse; venu en France, il fut compromis dans la publication d'un pamphlet contre Luynes après la mort de Concini et fut supplicié.

en supposant que ce limbe n'était pas plus dépourvu de montagnes que le reste de la surface.

Les éditeurs ont enfin compris dans la partie aujourd'hui publiée du Volume III un écrit de la même époque, composé par Ludovico delle Colombe contre le mouvement de la Terre et annoté par Galilée. Cet écrit, dirigé en général contre les Coperniciens, fait allusion aux nouvelles découvertes, dans un sens analogue au traité de La Galla. Les remarques de Galilée sont particulièrement intéressantes en ce sens qu'elles montrent nettement qu'à cette époque il n'avait pas encore une notion exacte du principe de l'inertie. Il admet, en effet, que les mouvements que nous observons à la surface de la Terre sont *absolument* indépendants de la rotation diurne.

Le nouveau Volume est édité avec le même luxe et le même soin que les précédents, ce qui n'était pas sans présenter des difficultés particulières, car, s'il s'agissait de reproduire surtout des textes imprimés, ces textes étaient souvent défigurés par des fautes typographiques. Une douzaine de ces fautes ont échappé à la scrupuleuse attention des éditeurs, mais il sera aisé de les corriger.

Dans les annotations de Galilée sur la *Dianoia* de Sizzi, on a imprimé page 244, ligne 35, comme nom abrégé d'un auteur d'Optique : *Evel.* Il faut évidemment lire *Eucl* (*idis*).

Page 248, ligne 29 : *Sola experientia non potuit edocere;* je crois qu'on doit corriger *non* en *nos*. Le sens est : « L'expérience seule a pu nous apprendre que la vue ne trompe pas aux faibles distances (car on peut s'approcher des objets et vérifier qu'ils sont bien tels qu'on les voit); mais pour les distances stellaires, l'expérience ne peut prononcer; nous concluons seulement du moins au plus. A cet égard, la vision avec la lunette est tout à fait dans le même cas que la vision à l'œil nu. » PAUL TANNERY.

---

MORITZ CANTOR. — VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Erster Band. Zweite Auflage. 883 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1894.

Que treize ans après l'apparition du gros volume consacré par M. Cantor à l'histoire des Mathématiques depuis l'origine jus-

qu'en 1200 après J.-C., une nouvelle édition en soit devenue nécessaire, il y a là un succès de librairie évidemment dû au mérite d'un Ouvrage dont il serait superflu de faire à nouveau l'éloge, mais ce succès est d'autant plus remarquable qu'en réalité le nombre de ceux qui s'intéressent à l'histoire de la science est malheureusement très restreint; il me suffira de rappeler à ce sujet qu'un projet de traduction française de ce volume de M. Cantor n'a pu aboutir il y a dix ans, faute de trouver un éditeur qui consentît à se charger des risques de l'entreprise.

L'auteur a tout fait pour que sa nouvelle édition obtienne le même succès que la première; il y a, d'une part, apporté toutes les corrections de détail qui lui ont été signalées ou dont il a lui-même reconnu la nécessité (et quel est l'ouvrage d'érudition qui n'en réclame pas?); d'un autre côté, il a mis son histoire au courant des travaux les plus récents par des additions ou des modifications plus ou moins importantes.

Je crois intéressant de signaler rapidement les nouveautés ou les changements les plus considérables :

*Chap. I.* — Réfutation de l'opinion de M. Rodet, qui, dans un article du *Journal asiatique*, 1882, s'est refusé à voir des problèmes d'Algèbre dans les questions que traite le célèbre *Manuel d'Ahmès* (Papyrus Rhind-Eisenlohr). Notre compatriote s'était certainement placé à un point de vue trop étroit, d'autant qu'en fait les mathématiciens ne sont guère d'accord sur la limitation effective du champ de l'Algèbre.

*Chap. IV.* — Adhésion à l'opinion de Gow (1884), d'après laquelle le système des lettres numérales chez les Grecs a été combiné à Alexandrie, au plus tôt vers l'an 300 avant notre ère.

*Chap. VI.* — Le pythagoricien Thymaridas de Paros est replacé à l'époque antérieure de Platon; au sujet de cet arithméticien, dont les travaux ont eu une grande importance, mais sur lequel nous n'avons malheureusement que trop peu de renseignements, je remarquerai que, dans Martianus Capella, son nom a été corrompu en Thermacides, et que, d'après ce passage, on doit lui attribuer l'emploi du terme de *pythmen*, pour désigner les nombres

qui forment un rapport donné sous sa plus simple expression. M. Cantor admet, avec moi, que la polémique de Zénon d'Élée contre la pluralité était dirigée en particulier contre la conception du point chez les Pythagoriens et a eu la plus grande importance pour l'éclaircissement de cette notion fondamentale.

*Chap. XI.* — Additions sur les travaux mathématiques des platoniciens Philippe d'Oponte et Speusippe, du péripatéticien Dicéarque.

*Chap. XIII.* — M. Cantor admet maintenant, avec M. Zeuthen et moi, que la solution numérique des équations du second degré était connue des Grecs au temps d'Euclide. Il signale, d'après Heiberg, que la section elliptique du cylindre (droit) devait être connue à la même époque et portait peut-être le nom de *thyreos* (bouclier). Je crois, en ce qui me concerne, que le cylindre a dû être coupé avant le cône, et que les propriétés essentielles de sa section ont été reconnues dès avant Ménechme, probablement par Eudoxe. Les travaux de ce dernier auront été négligés à partir du moment où les mêmes propriétés auront été reconnues à la section normale du cône acutangle ; on sait que le nom d'*ellipse* n'est pas antérieur à Apollonius. Développements sur les travaux d'Autolycus de Pitane et les procédés d'arpentage indiqués dans l'*Optique* d'Euclide.

*Chap. XIV.* — Restitution à Archimède des théorèmes sur l'*arbelos*.

*Chap. XV.* — Indication d'un *Abacus in Græco* qui aurait existé en manuscrit à la bibliothèque de Saint-Marc à Venise, au XVIIIe siècle, et qui serait perdu aujourd'hui. Il me paraît douteux qu'il faille entendre sous cette désignation un Traité de calcul sur l'abaque (*abacus*, au moyen âge, signifiant souvent l'Arithmétique en général) (1).

(1) Vérification faite en comparant l'indication donnée par Montfaucon avec le catalogue de Zannetti, il me paraît certain qu'elle se rapporte au manuscrit grec 333 (XVe siècle), qui existe toujours à la Bibliothèque de Saint-Marc. Il débute par un *Tractatus in compendio scientiæ calculatoriæ*, qui est anonyme,

*Chap. XVI.* — D'après un fragment récemment découvert d'Anthémius de Tralles, Apollonius aurait écrit sur les miroirs incendiaires (περὶ πυρίων). Développements sur les traités perdus d'Apollonius de la *section en aire* et des *directions.*

*Chap. XVII.* — Kluge a cherché à démontrer que la rédaction du XV[e] livre des Éléments est due à trois écrivains différents, dont le dernier aurait été l'élève d'Isidore de Milet (l'oncle ou le neveu?). Détails sur le papyrus grec d'Akmîm publié par J. Baillet dans les *Mémoires de la Mission française au Caire,* 1892. Nouvelles indications concernant Michel Psellus et Nicolas Rhabdas.

*Chap. XVIII.* — M. Cantor, qui maintient toujours l'authenticité de la Géométrie attribuée à Boèce, reconnaît maintenant que l'*Architas* qui y est mentionné ne peut être que l'ancien pythagoricien; il suppose que Boèce a eu entre les mains des traductions latines d'écrits sous ce nom.

*Chap. XIX.* — Détails sur le fragment de l'ouvrage algébrique hindou trouvé à Bakshali (*Indian Antiquary,* 1888). Nouvelles conjectures sur l'origine de l'approximation $\pi = \sqrt{10}$ dans l'Inde.

*Chap. XXXIV.* — La fausse traduction du mot arabe *djibâ* par *sinus* ne paraît pas antérieure à Regiomontanus.

*Chap. XXXVI.* — Détails sur le Traité du quadrilatère de Nasir-Eddin, publié par Karatheodory Pacha en 1892.

*Chap. XXXIX.* — La date du plus ancien manuscrit de la Géométrie attribuée à Gerbert est fixée entre 1127 et 1160. Nouvelle défense de l'anthenticité de la *Regula de Abaco computi* de Gerbert. Sur Franco de Liège.

*Chap. XL.* — Un des plus anciens auteurs qui aient écrit sur

---

mais ne diffère pas de la première lettre de Rhabdas. C'est là l'*Abacus in Græco* de Montfaucon; il marque, comme contenues dans le même manuscrit, une *Gæodesia* (qui est celle de Héron) et des *Tabulæ persicæ* (d'Isaac Argyre), qui se retrouvent effectivement dans le *Marcianus,* 323.

le calcul avec les chiffres arabes (au XII[e] siècle) porte sur les manuscrits le nom d'*Ocreatus*, qu'on avait jusqu'à présent transcrit par la forme irlandaise O'Creat. M. Cantor remarque, d'après M. Wattenbach, que *ocreatus* est un mot latin qui signifie *botté*. (Il peut donc aussi représenter une forme telle que, par exemple, *Houzeau*). On ignore, en fait, si le personnage en question est français ou anglais.

Ces rapides indications suffisent, je l'espère, pour montrer l'intérêt que peut présenter la nouvelle édition de l'ouvrage de M. Cantor, même pour les lecteurs de la première. Je me crois toutefois obligé d'allonger ce compte rendu pour dire quelques mots de deux questions particulières, quoique j'y doive faire intervenir le *haïssable moi*.

Dans mon essai sur *la Géométrie grecque* (¹), j'ai traduit un passage de Jamblique : ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία. « La Géométrie fut appelée Tradition venant de Pythagore » entendant que ces derniers mots étaient le titre d'un ouvrage géométrique déterminé. M. Cantor (p. 144) déclare que ce passage est, de fait, à peu près incompréhensible et objecte que ma traduction ne serait légitime que si l'article ἡ se trouvait répété avant πρὸς. Je crois pouvoir affirmer précisément le contraire, parce que l'usage pour les articles, dans les phrases de ce genre, est absolument le même qu'en français, et que les Grecs n'avaient pas d'ailleurs l'habitude de faire précéder d'un article le titre de leurs livres. Avec l'article ἡ devant πρὸς, il faudrait donc traduire littéralement : « La Géométrie fut appelée la tradition de Pythagore », et ce serait de la science elle-même qu'il s'agirait, non de la première Géométrie publiée par les Pythagoriens. C'est là une interprétation dont je crois avoir suffisamment montré l'invraisemblance, pour ne pas insister davantage aujourd'hui sur ce point.

Parmi les autres citations que M. Cantor a bien voulu faire de mes travaux, il en est encore une où il croit devoir écarter comme « passablement en l'air » une conjecture que j'ai émise dans mes *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne*, p. 67, 68 (²),

(¹) Paris, Gauthier-Villars, 1887.
(²) Paris, Gauthier-Villars, 1893.

à savoir que la valeur $\pi = 3,1416$, que l'on trouve dans l'Inde, serait due à Apollonius de Perge. Je rappellerai tout d'abord que je n'ai émis cette conjecture que sous diverses réserves et ai plutôt cherché à poser une question qu'à la résoudre. Cependant nous savons pertinemment, comme M. Cantor ne manque pas de le signaler, qu'Apollonius avait donné de $\pi$ une valeur plus approchée que celle d'Archimède. Or, il est facile de vérifier que, si l'on applique le procédé d'Archimède, pour obtenir une plus grande approximation en poussant jusqu'au polygone régulier de 384 côtés, au lieu de celui de 96 auquel il s'est arrêté, on trouve deux décimales exactes de plus, à condition, bien entendu, de prendre pour $\sqrt{3}$ une valeur suffisamment approchée pour que le calcul ne devienne pas illusoire. On doit donc logiquement conclure que la valeur trouvée par Apollonius était au moins aussi approchée que 3,1416.

Si maintenant nous retrouvons cette valeur dans l'Inde et si précisément un auteur hindou nous dit qu'elle a été obtenue en employant le polygone de 384 côtés, la probabilité qu'elle ait été obtenue dans l'Inde est d'autant moins grande que les connaissances trigonométriques paraissent, dans ce pays, avoir été empruntées aux Grecs en même temps que les connaissances astronomiques, comme M. Cantor le prouve surabondamment. Il me semble donc que l'on revient naturellement à la question que j'ai posée. A quel Grec peut être due cette approximation, si ce n'est à Apollonius? PAUL TANNERY.

---

# MÉLANGES.

## LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE AVANT LEIBNIZ;

PAR M. GINO LORIA.

« Leibniz a énoncé, il y a deux siècles, le projet de créer une écriture universelle, dans laquelle toutes les idées composées fussent exprimées au moyen de signes conventionnels des idées simples, selon des règles fixes. Il dit : Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura hæc universalis æque erat facilis

quam communis, et quæ possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio (*Dissertatio de arte combinatoria,* Lipsiæ, 1666, n° 90).

» A la solution de ce problème a contribué d'abord le développement de l'écriture algébrique, qui s'est beaucoup perfectionnée après Leibniz. Au moyen des signes +, —, =, >, etc., des parenthèses et des lettres de l'alphabet, elle permet d'écrire en symboles quelques propositions. Mais, ce qui a le plus contribué à la solution du problème, c'est la nouvelle et importante science qu'on appelle *Logique mathématique,* et qui étudie les propriétés formelles des opérations et des relations de logique. Cette science a été cultivée, dans notre siècle, par Boole, Cayley, Clifford, Delbœuf, de Morgan, Ellis, Frège, Grassmann, Günther, Halsted Jevons, Liard, Macfarlane, Mac Coll, Nagy, Peirce, Poretzky, Venn et par beaucoup d'autres dont on trouvera le nom dans le Livre de M. Schröder, *Algebre des Logik,* Ouvrage qui contient tout ce qu'on a publié sur cette branche des Mathématiques.

» Par la combinaison des signes d'Algèbre et de Logique, on peut exprimer en symboles des propositions toujours plus longues et plus complètes, et le résultat auquel on est arrivé dans ces dernières années est qu'on peut représenter toutes les relations de Logique avec peu de signes ayant une signification précise, et assujettis à des règles bien déterminées. En conséquence, en introduisant des signes pour indiquer les idées de l'Algèbre ou de la Géométrie, on peut énoncer en symboles les propositions de ces sciences. Maintenant, une Société de mathématiciens publie un formulaire qui se propose de contenir toutes les propositions connues sur certains sujets de Mathématique. Ce formulaire, écrit entièrement en symboles, est publié par la *Rivista di Matematica.* »

On voit, d'après ces lignes que nous avons empruntées à l'*Introduction au Formulaire de Mathématique* que vient de publier M. Peano dans sa qualité de directeur de la *Rivista di Matematica* (¹), qu'un groupe de mathématiciens s'est proposé de rédiger une sorte de grande encyclopédie, une espèce de reperto-

(¹) *Notations de Logique mathématique,* par G. Peano. Turin; 1894.

rium où l'on trouvera énoncés en symboles logiques les définitions et les théorèmes plus importants qui se rapportent aux différentes sciences exactes. Je ne veux pas discuter ici en détail ce projet: les critiques pourront remarquer qu'avant d'employer une nouvelle langue pour exposer l'ensemble d'une science, il faut s'être assuré d'avance que la grande majorité des savants la connaît, la trouve bonne et est disposée à l'employer, toutes choses qu'on n'a pas encore fait par rapport à la Logique mathématique; mais à cette remarque on peut répondre qu'après s'être convaincu qu'une langue est propre à exprimer complètement un certain ordre d'idées (et telle est sans discussion la Logique mathématique appliquée aux sciences exactes), pour en accroître la diffusion il n'y a rien de mieux que de l'employer. Mais, je le répète, mon but actuel n'est pas d'essayer de déterminer la valeur de la méthode dont M. Peano s'est fait un des avocats les plus actifs; je veux, au contraire, seulement faire remarquer — ce qui semble avoir échappé même à M. Schröder — que l'entreprise que j'ai signalée a été essayée, il y a deux cent cinquante années (c'est-à-dire avant Leibniz), par le mathématicien français Pierre Hérigone [1]. En effet, non seulement il s'est proposé de réunir un grand nombre de recherches mathématiques détachées en les exposant d'une manière uniforme, mais il a découvert une méthode pour exposer les raisonnements mathématiques, plus courte que l'ordinaire, intelligible pour tout le monde et qui, à

---

[1] Le titre complet de l'Ouvrage auquel nous nous rapportons est : *Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus per notas reales et vniversales, citra usum cuiuscunque idiomatis, intellectu faciles. Cours mathématique demonstré d'une novvelle, briefve et claire methode, par Notes reelles et uniuerselles, qui peuuent estre entendues facilement sans l'usage d'aucune langue. A Pietro Herigons mathematico. Parisiis*, MDCXLIV.

Sur la vie de l'auteur, je ne peux donner aucun renseignement : même les dates extrêmes sont inconnues à tous les historiens auxquels j'ai eu recours.

Il n'est peut-être pas hors de propos de remarquer ici que, même dans les Œuvres de Carnot, on peut trouver des traces certaines d'une symbolique analogue à celle de Hérigone (voir *Géométrie de position*, p. 485, où on lit la distinction entre « formule technique » et « formule algébrique » *De la corrélation des figures en Géométrie*, p. 51 et ailleurs); mais il semble que Carnot n'a pas eu le courage de l'employer régulièrement. D'ailleurs, c'est mon opinion que des citations analogues pourraient être multipliées par quiconque ait le bonheur d'être en possession d'une érudition plus vaste que la mienne.

l'instar de la Logique mathématique moderne, permet, à tout moment, de vérifier qu'on n'emploie que des définitions déjà exposées, des axiomes déjà acceptés, des propositions déjà démontrées. Certainement, Hérigone n'a pas la grandeur des idées, la génialité des aperçus philosophiques de Leibniz; toutefois, il connaît très bien la valeur de ses procédés, comme on le voit par les lignes suivantes de la préface à son Ouvrage :

« ... J'ay inuenté vne nouuelle methode de faire les demonstrations, briefue et intelligible, sans l'vsage d'aucune langue. Qu'elle soit briefue et intelligible sans l'vsage d'aucune langue, il appert à l'ouuerture du liure. Qu'elle soit bien intelligible, il sera manifeste à ceux qui auront l'intelligence de mes Notes, et qui auront entendu quelques démonstrations faites par le moyen d'icelles. Il n'y a point de doute aussi qu'elle ne soit plus intelligible que la méthode ordinaire, veu qu'en ceste méthode on n'affirme rien qu'il ne soit confirmé par quelque citation : ce que les autres autheurs n'obseruent pas exactement, mais chacun mesurant la necessité des citations, par ce qui leur est manifeste, ou obscur, vsent de beaucoup de consequences sans citations qui néantmoins seroient nécessaires à ceux qui sont moins aduancez. Joint aussi qu'en la méthode ordinaire on se sert de beaucoup de mots et d'axiomes sans les auoir premièrement expliquez, mais en ceste méthode on ne dit rien qui n'aye esté expliqué et concédé aux premices : mesme aux démonstrations, qui sont quelques peu longues, on cite par lettres grecques, ce qui a esté démonstré en la suite de la démonstration. Et parce que chaque conséquence dépend immediatement de la proposition citée, la demonstration s'entretient depuis son commencement, iusques à la conclusion, par vne suite continuë de consequences legitimes, necessaires et immediates, contenuës chacune en une petite ligne, lesquelles se peuuent resoudre facilement en syllogismes, à cause qu'en la proposition citée, et en celle qui correspond à la citation, se trouuent toutes les parties du syllogisme .... La distinction de la proposition en ses membres, sçauoir en l'hypothèse, l'explication du requis, la construction, ou preparation du requis, et la demonstration soulage aussi la memoire, et sert grandement à l'intelligence de la demonstration. »

Le fondement de la méthode d'Hérigone est, comme celui de

la Logique mathématique, l'emploi d'un certain nombre de symboles pour désigner des conceptions abstraites; mais il ne faut pas chercher dans son *Cours*, pas même un premier essai de réduire au *minimum* le nombre de symboles nécessaires pour exposer toute une branche de Mathématiques, réduction dans laquelle se trouve un haut problème philosophique dont notre auteur semble n'avoir pas même supposé l'existence, et dont au contraire s'occupent continuellement les logiciens mathématiciens de notre époque; il introduit, au contraire, autant de symboles qu'il lui semble bon. Par exemple, il écrit le mot *est*, mais il introduit en même temps l'abréviation *snt* pour écrire *sont*, il a un symbole pour *angle quelconque* ($<$) et un pour *angle droit* (|_); un pour *carré* (□) et un pour *parallélogramme quelconque* (◊), comme il en a un pour *triangle* ($\Delta$). Il se sert du signe — pour dire *droite* et du signe = pour désigner deux droites parallèles; il lui faut, en conséquence, un nouveau symbole pour exprimer l'égalité : il choisit, à cet effet, l'étrange notation 2|2, tandis que, par 3|2 et 2|3, il représente *plus grand que* et *plus petit que;* la croix (+) a, pour Herigone, la même signification que pour nous tandis que par *commun add.* il représente l'opération d'ajouter une même chose aux deux membres d'une équation et, par $\pi$ la préposition *à* et par |_| le mot *ou*.

Par ce système de notations, qui forme en même temps une tachygraphie et une pasigraphie, Hérigone a réussi à exposer, en peu d'espace, une matière très considérable. Qu'il suffise de dire que le Tome I de son *Cours* (qui, comme on sait, est écrit en deux langues : latin et français) embrasse, dans un millier de petites pages in-8°, où on n'a pas fait économie d'espace, une introduction, les treize Livres des *Eléments* d'Euclide, suivis des deux autres Livres sur les polyèdres réguliers qu'à tort on considérait comme une continuation du célèbre *Traité* euclidien, et d'un long *Appendice* sur la Géométrie des plans; ensuite les *Dates* d'Euclide et cinq Livres d'Apollonius Pergeus du *Lieu résolu*, d'après les restitutions de Snellius (*Problèmes des sections*), de Marinus Ghetaldus (*Inclinaisons*) et de Viète (*Attouchements*); enfin la doctrine de la section des angles.

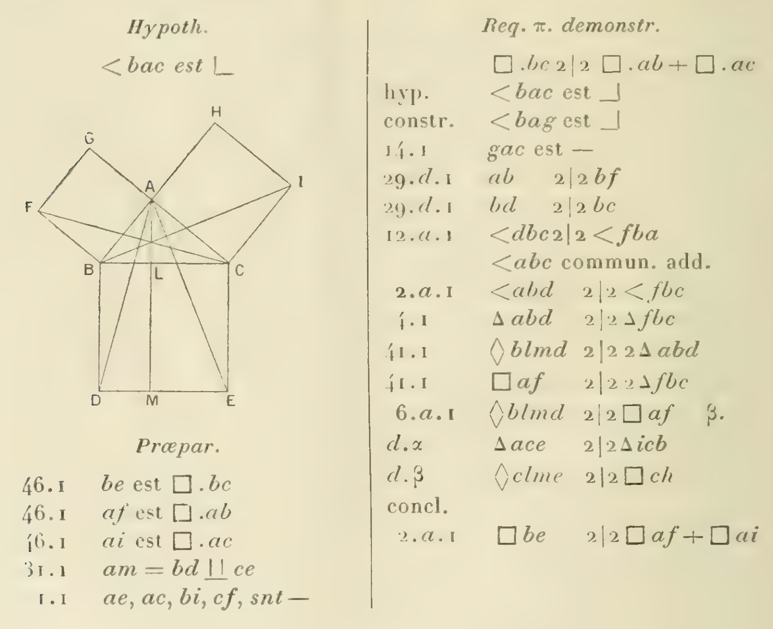
Mais tout cela est certainement insuffisant pour peindre aux

yeux des lecteurs qui ne connaissent pas le *Cours* d'Hérigone les traits tout à fait originaux de ce remarquable Ouvrage; et je ne connais manière meilleure pour lui en donner une idée que de rapporter ici en finissant les pages qui se rapportent au théorème de Pythagore et qui seront complètement intelligibles pour tout lecteur qui a bien voulu prendre la peine de nous suivre jusqu'ici.

*Theor.* XXXIII. *Propos.* XLVII.

**In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.**

***Aux triangles rectangles, le carré du costé qui soustient l'angle droit, est égal aux carrez des costez qui contiennent l'angle droit.***




*Hypoth.*

< *bac* est ⊾

*Præpar.*

| | |
|---|---|
| 46.1 | *be* est □.*bc* |
| 46.1 | *af* est □.*ab* |
| 46.1 | *ai* est □.*ac* |
| 31.1 | *am* = *bd* ∥ *ce* |
| 1.1 | *ae*, *ac*, *bi*, *cf*, *snt* — |

*Req.* π. *demonstr.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | □.*bc* 2\|2 □.*ab* + □.*ac* | | |
| hyp. | < *bac* est ⌋ | | |
| constr. | < *bag* est ⌋ | | |
| 14.1 | *gac* est — | | |
| 29.*d*.1 | *ab* | 2\|2 *bf* | |
| 29.*d*.1 | *bd* | 2\|2 *bc* | |
| 12.*a*.1 | < *dbc* 2\|2 < *fba* | | |
| | < *abc* commun. add. | | |
| 2.*a*.1 | < *abd* | 2\|2 < *fbc* | |
| 4.1 | Δ *abd* | 2\|2 Δ *fbc* | |
| 41.1 | ◊ *blmd* | 2\|2 2Δ *abd* | |
| 41.1 | □ *af* | 2\|2 2Δ *fbc* | |
| 6.*a*.1 | ◊ *blmd* | 2\|2 □ *af* | β. |
| *d*.α | Δ *ace* | 2\|2 Δ *icb* | |
| *d*.β | ◊ *clme* | 2\|2 □ *ch* | |
| concl. | | | |
| 2.*a*.1 | □ *be* | 2\|2 □ *af* + □ *ai* | |

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Sophus LIE, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig. — Theorie der Transformationsgruppen, dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von *Prof.-Dr Friedrich Engel*. Leipzig, Teubner, 1893.

Ce Volume est le tome troisième et dernier du grand Ouvrage où M. Sophus Lie a exposé, avec la collaboration de M. Engel, sa belle théorie des groupes finis et continus de transformations. L'illustre savant dédie son livre à l'*École Normale supérieure*, en mémoire de l'immortel Galois, qui a introduit dans la Science l'idée de *groupe*. M. Lie a voulu ainsi exprimer sa reconnaissance à MM. Darboux, Picard, J. Tannery, et aux élèves de l'École qui, depuis plusieurs années, sont allés à Leipzig, sur les conseils de ces savants maîtres, écouter ses leçons. Nous sommes sûr d'être l'interprète de tous, en remerciant ici M. Lie pour cette délicate intention.

Le Volume que nous allons analyser contient la détermination complète des groupes de transformations à une, deux et trois variables, l'étude de plusieurs classes générales de groupes à $n$ variables, et des compléments très importants à diverses théories du tome premier de l'Ouvrage. Bien que les applications de la théorie des groupes soient réservées à deux ouvrages que M. Sophus Lie se propose de publier sur les équations différentielles et sur la Géométrie, l'auteur a consacré une partie de son livre à exposer ses profondes recherches sur les fondements de la Géométrie, qui sont liées, de la manière la plus intime, à l'étude d'une certaine classe de groupes.

M. Lie a divisé son exposition en six Sections; chacune est précédée, ainsi que chaque chapitre, d'indications qui en facilitent la lecture. On trouvera, dans la belle préface de l'auteur, avec une analyse du livre, les aperçus les plus instructifs sur l'origine, l'importance et l'avenir de la théorie des groupes.

En terminant ces quelques mots d'introduction, nous ne devons pas oublier que c'est à la collaboration infatigable et désintéressée de M. Engel que le monde savant doit de posséder une exposition systématique de la théorie des groupes de transformations.

tout entière créée par le génie du grand géomètre norvégien ; c'est là un grand service rendu par M. Engel à la Science ([1]).

---

I. La première Section du volume contient la détermination de tous les *types* de groupes de transformations de la droite et du plan, c'est-à-dire à une et deux variables. On sait que, d'une manière générale, deux groupes à $n$ variables appartiennent à un même type lorsqu'ils sont *semblables* par une transformation ponctuelle de l'espace à $n$ dimensions. Toutefois, si l'on ne considère que des groupes projectifs, deux groupes ne sont du même type que s'ils sont semblables par une transformation projective ; et plus généralement, s'il ne s'agit que des sous-groupes d'un groupe donné, deux d'entre eux n'appartiennent à un même type que s'ils sont semblables par une transformation du groupe considéré.

*Chapitre* 1. — On connaît le résultat si simple de M. Lie sur les groupes de la droite : *il n'y a que trois types de groupes à une variable, ayant pour représentants : le groupe des translations*

$$x' = x + a,$$

*le groupe linéaire général*

$$x' = a_1 x + a_2,$$

*et le groupe projectif général*

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}.$$

L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème, et indique comment il est une conséquence immédiate de certains développements du tome I.

*Chapitre* 2. — Les groupes du plan ne se prêtent pas à une

([1]) *Voir*, en particulier pour la terminologie, les comptes rendus des deux premiers tomes de l'Ouvrage de MM. Lie et Engel : *Bulletin des Sciences mathématiques* [t. XIII et t. XV (2e série)].

classification aussi simple. Leur recherche repose sur l'étude, intéressante du reste pour elle-même, des sous-groupes du groupe linéaire homogène à deux variables; qui se déduit elle-même de la connaissance des sous-groupes du groupe projectif général de la droite. De tels problèmes se résolvent, comme M. Lie l'a montré dans le tome I, par la considération du *groupe adjoint* du proposé. On obtient ainsi les résultats sous une forme géométrique bien saisissante. Si nous nous bornons, par exemple, au cas du groupe projectif de la droite, chacune de ses transformations infinitésimales est représentée par un point dans un plan : à une même catégorie appartiennent les sous-groupes à un paramètre qui ont pour images les points d'une certaine conique C; à un autre type ceux que représentent les autres points du plan; enfin les sous-groupes à deux paramètres sont tous du même type, chacun étant représenté par une des tangentes à la conique C.

*Chapitre* 3. — M. Lie divise les groupes du plan en *primitifs* et *imprimitifs*. On reconnaît si un groupe est primitif par l'étude du groupe linéaire homogène qui indique comment il échange les éléments linéaires en un point, et qui se déduit immédiatement du développement en série des transformations infinitésimales du groupe donné. Un théorème général du tome I montre qu'*il n'y a que trois types de groupes primitifs du plan, le groupe linéaire spécial, le groupe linéaire général, et le groupe projectif général.*

Quant aux groupes imprimitifs, ils laissent par définition une famille de $\infty^1$ courbes invariante, et M. Lie les détermine en les subdivisant en quatre catégories, suivant la loi de l'échange de ces courbes par les transformations du groupe. La combinaison des transformations infinitésimales, par le crochet de Jacobi, joue un rôle essentiel dans cette recherche. Un tableau des résultats obtenus termine le Chapitre.

*Chapitre* 4. — La méthode précédente peut fournir plusieurs représentants pour un même type de groupes imprimitifs; il y a donc lieu d'établir une véritable classification de ces groupes. C'est ce que fait l'auteur en se fondant sur le nombre de familles de $\infty^1$

courbes que le groupe laisse invariantes; un nouveau tableau résume cette classification.

Joints à certains résultats obtenus dans le tome II, les développements actuels fournissent aussi tous les groupes de transformations de contact du plan; mais le nombre des types se réduit encore, et il est bien remarquable que, comme types de groupes de transformations de contact, *réductibles* à des transformations ponctuelles, on peut ne garder que des groupes projectifs.

*Chapitre* 5. — Les groupes projectifs du plan offrent un intérêt spécial. M. Lie en détermine les divers types, en tenant compte de la *dualité*, qui fait correspondre ces types deux à deux. Les groupes à un paramètre se classent immédiatement d'après les points et droites qu'ils laissent invariants. Plus généralement, M. Lie montre que *tout groupe projectif du plan, à l'exception du groupe à trois paramètres d'une conique, laisse invariant au moins un point ou une droite;* d'où résulte en particulier que *le groupe projectif général ne contient pas de sous-groupe à plus de six paramètres*. Il ne reste plus dès lors qu'à étudier les sous-groupes du groupe projectif d'une droite. Un tableau résume les résultats.

Signalons encore ce beau théorème, obtenu autrefois par MM. Lie et Klein, qu'*en dehors des droites et des coniques, il n'y a pas de courbes admettant un groupe projectif continu, autres que les courbes des deux types*

$$y = x^c, \qquad y = e^x,$$

qui admettent l'une et l'autre un groupe à un paramètre.

*Chapitre* 6. — Le Chapitre suivant est consacré à l'étude complète des divers types de groupes linéaires homogènes à trois variables, étude essentielle pour la détermination des groupes de transformations de l'espace.

II. Dans la deuxième Section, M. Lie s'occupe des groupes de l'espace à trois dimensions, c'est-à-dire des groupes de transformations à trois variables.

*Chapitre* 7. — Comme dans le plan, il faut distinguer entre les groupes primitifs et les groupes imprimitifs. Ici encore, la recherche des premiers est fondée sur l'étude de la loi suivant laquelle ils échangent, en un point, les éléments linéaires (de l'espace), et qui est donnée par un groupe linéaire homogène à trois variables G. Si G est le groupe linéaire homogène général, ou le groupe linéaire homogène spécial, on retombe sur le cas général étudié dans le tome I, et on a l'un des trois types suivants : *groupe projectif général, groupe linéaire général, groupe linéaire spécial.* Si G laisse invariant un faisceau plan de $\infty^1$ directions, le groupe donné laisse invariante une équation de Pfaff et peut se ramener, par suite, à un groupe de transformations de contact du plan; on en déduit qu'il n'y a pour ce cas qu'un seul type, ayant pour représentant le *groupe projectif à* 10 *paramètres d'un complexe linéaire.* Enfin, si G laisse invariant un cône du second degré, M. Lie montre, par une méthode extrêmement remarquable, que la solution du problème dépend encore des groupes de transformations de contact du plan, et est conduit à quatre types nouveaux : *groupe projectif d'une surface du second degré* (6 paramètres), *groupe des mouvements euclidiens* (6 paramètres), *groupe de la similitude* (7 paramètres), *groupe des transformations conformes* (10 paramètres).

*Chapitre* 8. — Les types de groupes imprimitifs sont en bien plus grand nombre. M. Lie les range en trois grandes catégories :

1° Les groupes qui laissent invariante une famille de $\infty^1$ surfaces, mais aucune famille de $\infty^2$ courbes par lesquelles ces surfaces soient engendrées ;

2° Les groupes qui laissent invariante une famille de $\infty^2$ courbes, mais aucune famille de $\infty^1$ surfaces engendrées par ces courbes;

3° Enfin tous les autres. L'auteur détermine complètement les types des groupes des deux premières catégories, et, pour éviter des longueurs, se borne à donner la méthode qui permettra, dans chaque cas particulier, de trouver ceux des groupes de la troisième catégorie dont on pourra avoir besoin.

III. Une Section tout entière est consacrée aux groupes pro-

jectifs de l'espace, auxquels s'attache en effet un intérêt particulier.

*Chapitre* 9. — Un premier Chapitre contient la détermination des groupes projectifs qui laissent invariante une courbe ou une surface isolée; et, en même temps, celle des courbes et surfaces admettant plus de deux transformations infinitésimales projectives. En ce qui concerne les courbes, la seule courbe gauche admettant plus de deux transformations infinitésimales projectives indépendantes est la cubique gauche, qui en admet trois; de sorte que, si un groupe projectif est défini par ce fait qu'il laisse invariante une courbe isolée, c'est le groupe d'une droite (11 paramètres), ou d'une conique (7 paramètres), ou d'une cubique gauche (3 paramètres). Passant aux surfaces, M. Lie arrive de même aux résultats suivants : tout groupe projectif, qui est défini comme laissant invariante une surface développable isolée, ne peut être que le groupe d'un plan (12 paramètres), d'un cône du second degré (7 paramètres), ou de la développable d'une cubique gauche (3 paramètres). Enfin, parmi les surfaces non développables, les surfaces du second degré sont les seules admettant plus de trois transformations infinitésimales projectives, et la surface réglée de Cayley, qui en admet trois, est, avec elles, la seule admettant un groupe projectif à plus de deux paramètres. Les surfaces tétraédrales admettent, en général, deux transformations infinitésimales projectives.

*Chapitre* 10. — L'étude du groupe projectif d'une surface du second degré fait l'objet d'un Chapitre. Ce groupe est à six paramètres et se compose de la réunion de deux sous-groupes invariants à trois paramètres, dont chacun laisse invariantes toutes les droites de la surface appartenant à un même système. Plus généralement, tout sous-groupe laisse invariante au moins une droite de la surface, à moins qu'il ne soit le sous-groupe à trois paramètres laissant invariant un point non situé sur la surface. M. Lie détermine du reste tous les types de sous-groupes du groupe considéré.

*Chapitre* 11. — Dans le Chapitre suivant, l'auteur étudie d'une

manière analogue le groupe projectif d'une conique, ou, ce qui revient au même quand on prend, pour cette conique, le cercle imaginaire de l'infini, le groupe de la similitude (et des mouvements euclidiens). Après en avoir déterminé les sous-groupes, M. Lie cherche quelles sont les courbes ou les surfaces qui prennent, par les transformations de ce groupe, $\infty^1$ positions différentes; les droites, les sphères, et une certaine famille de cônes du second degré imaginaires répondent seules à la question. De là résulte l'intérêt tout spécial qu'offrent la Géométrie plückérienne de la droite et la Géométrie sphérique créée par M. Sophus Lie.

*Chapitre* 12. — M. Lie s'occupe ensuite plus généralement des groupes projectifs primitifs, qu'il détermine par deux méthodes. Les types trouvés sont les mêmes que pour les groupes primitifs projectifs ou non) de l'espace, à l'exclusion du groupe conforme, qui n'est semblable à aucun groupe projectif.

*Chapitre* 13. — Les groupes projectifs imprimitifs donnent lieu à ce théorème remarquable que chacun d'eux laisse invariante une figure ponctuelle : surface, courbe ou point. Ce résultat est vrai du reste pour tout groupe projectif de l'espace, à l'exception du groupe projectif général, et du groupe d'un complexe linéaire. Il se précise encore par le suivant : *tout groupe projectif imprimitif, à l'exception du groupe d'une cubique gauche, laisse invariant un point, une droite ou un plan.* Cette proposition fournit la marche à suivre pour la détermination de ces groupes. M. Lie détermine effectivement tous les groupes qui laissent un plan invariant, et montre comment on pourra de même trouver tous ceux qui laissent invariante une droite. Enfin l'auteur consacre un dernier paragraphe à déterminer les sous-groupes du groupe d'un complexe linéaire.

IV. Dans la quatrième Section, M. Lie étudie plusieurs classes générales de groupes de transformations à $n$ variables.

*Chapitre* 14. — L'auteur détermine d'abord tous les groupes, qui ont même structure que le groupe projectif général, ou le groupe linéaire général, ou le groupe linéaire spécial de l'espace

à $n$ dimensions, tout en dépendant du moindre nombre possible de variables. Signalons, entre autres, ce résultat important, qu'*il n'existe pas de groupe, à moins de n variables, ayant même structure que le groupe projectif général de l'espace à n dimensions*, et que, *dans cet espace même, il n'y en a pas d'autres que ceux qui lui sont semblables*.

*Chapitre* 15. — Dans le Chapitre 12, M. Lie avait obtenu ce résultat que tout groupe projectif *primitif* à trois variables ne peut être transformé en un autre groupe projectif que par une transformation projective. M. Lie montre ici que le même fait a lieu dans l'espace à $n$ dimensions, au moins pour les grandes classes de groupes projectifs qui sont la généralisation des groupes projectifs primitifs à trois variables, à savoir : le groupe projectif général, les deux groupes linéaires général et spécial, le groupe des mouvements euclidiens et celui de la similitude, le groupe d'une surface du second degré, enfin, si $n$ est impair, le groupe d'un complexe linéaire.

*Chapitre* 16. — L'auteur revient ensuite, pour en compléter la démonstration, sur deux théorèmes donnés par lui dans le tome I, et que nous résumerons ainsi : *il n'y a pas de groupe à n variables qui soit plus de* $n+2$ *fois transitif; et les seuls groupes* $n+2$ *fois transitifs de l'espace à n dimensions sont ceux qui sont semblables au groupe projectif général de cet espace*. M. Lie démontre ensuite ce résultat bien remarquable qu'il existe une limite supérieure du nombre des paramètres pour les groupes primitifs à $n$ variables.

*Chapitres* 17 *et* 18. — Les deux Chapitres suivants sont consacrés aux groupes à $n$ variables qui laissent invariante une équation de la forme

$$\sum_{k,\nu} f_{k,\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_\nu = 0. \qquad (1)$$

M. Lie montre d'abord que ces groupes se réduisent à quatre types seulement, si l'on se borne à considérer ceux qui échangent en un point quelconque les éléments linéaires de la manière la

plus générale possible. Ce sont : le groupe des mouvements euclidiens; le groupe de la similitude; le groupe d'une surface du second degré; enfin le groupe conforme. Ce dernier seul n'est pas projectif, et n'est semblable à aucun groupe projectif.

Un intérêt particulier s'attache à ceux de ces groupes qui laissent invariant le premier membre de l'équation (1); il ne reste plus alors que deux types : le groupe des mouvements euclidiens et le groupe projectif d'une surface (à $n-1$ dimensions) du second degré. Ainsi que le montre l'auteur, ces résultats ne diffèrent que par la forme de ceux que Riemann a donnés dans sa célèbre théorie des espaces à courbure constante.

Les groupes ainsi trouvés offrent du reste, au point de vue de la théorie des groupes mêmes, un grand intérêt. On le reconnaîtra par exemple par ce beau théorème que *le groupe conforme de l'espace à n dimensions* ($n > 2$) *est simple, et qu'il en est de même du groupe projectif d'une surface du second degré, dès que n surpasse* 3.

*Chapitre* 19. — Dans un dernier Chapitre, M. Lie reprend la théorie générale des groupes de transformations, en se plaçant au *point de vue réel*. Sans entrer dans le détail, disons que les résultats essentiels de la théorie subsistent; il y a lieu toutefois de modifier légèrement le sens de certaines expressions, par exemple : groupes *simples, transitifs, primitifs*. Un théorème bien remarquable domine la théorie des *groupes réels non analytiques :* c'est qu'un tel groupe, s'il est transitif, peut (en supposant l'existence de certaines dérivées) se mettre, par un changement de variables, sous une forme telle que dans ses équations ne figurent plus que des fonctions analytiques des variables et des paramètres.

L'auteur termine en montrant comment se modifient les résultats obtenus dans les Chapitres précédents, sur la détermination des groupes, lorsqu'on ne veut considérer que des groupes réels.

V. La Section suivante est consacrée à une magnifique étude sur les fondements de la Géométrie, où l'illustre savant norvégien

développe, en les complétant, les recherches publiées par lui sur ce sujet en 1886 et 1890 [1].

M. Lie prend la question au point de vue analytique où Riemann s'est placé le premier : l'espace à $n$ dimensions est une multiplicité numérique, c'est-à-dire qu'un point de cet espace est le système des valeurs données à $n$ variables (ses coordonnées), et que toute géométrie de cet espace est l'étude, faite à un certain point de vue, des propriétés des figures formées de points de cet espace, c'est-à-dire des systèmes de ces points définis par des systèmes d'équations entre leurs coordonnées. Définir une géométrie, c'est dire quelles sont ces propriétés des figures, que l'on se propose d'étudier. Le problème n'a, du reste, d'intérêt, que si la géométrie ainsi définie est analogue à la géométrie d'Euclide pour l'espace à trois dimensions.

Riemann, partant de l'idée de la mesure des longueurs, fonde sa géométrie sur la notion d'élément d'arc. Il est conduit à s'imposer la condition que le carré de l'élément d'arc en un point soit une forme quadratique définie positive des différentielles des coordonnées de ce point. Puis, introduisant cette hypothèse que les figures doivent pouvoir se mouvoir librement dans l'espace, sans altération des longueurs des diverses lignes qu'elles contiennent, ce qu'il traduit, d'une manière toute géniale, en disant que l'espace doit être à courbure constante, Riemann détermine les coefficients de cette forme quadratique, et arrive à cette conclusion que, sous les hypothèses faites, il n'y a de possible, en dehors de la géométrie d'Euclide, que deux autres géométries, dont l'une correspond à la géométrie de Lobatschewski, et l'autre à la géométrie sur la surface de la sphère [2].

M. Helmholtz a repris la question à un point de vue plus élémentaire, en partant de l'idée de corps solide, et de mouvements. Un corps solide est caractérisé en ce qu'il existe une fonction des coordonnées de deux points, qui, pour chaque couple de points

---

(1) *Berichte der Math. phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.*

(2) L'imperfection du Mémoire de Riemann (outre l'absence de démonstrations) consiste surtout en ce que les hypothèses n'y sont pas nettement énoncées.

du solide, reste invariante dans tout mouvement de ce corps. A cette hypothèse M. Helmholtz a cherché à en joindre d'autres (axiomes) de manière à caractériser entièrement l'ensemble des trois géométries trouvées par Riemann.

Au fond, la géométrie d'Euclide repose sur la notion des mouvements de l'espace; elle est l'étude des propriétés des figures invariantes par tous ces mouvements. Toute géométrie de l'espace à $n$ dimensions sera fondée de même sur la considération d'une certaine famille de transformations (mouvements) de cet espace, et, à ce point de vue, la question des fondements de la géométrie se résume dans le problème que M. Lie désigne sous le nom de *problème de Riemann-Helmholtz,* et formule ainsi :

*Trouver un système de propriétés qui soient communes à la famille des mouvements euclidiens et aux deux familles de mouvements non euclidiens, et qui les distinguent de toutes les autres familles de mouvements possibles dans une multiplicité numérique à n dimensions.*

*Chapitre* 20. — Avant d'étudier la solution de M. Helmholtz, M. Lie traite un problème préliminaire : Déterminer tous les groupes de transformations de l'espace à trois dimensions, pour lesquels deux points ont un invariant et un seul, tandis qu'un système de plus de deux points ne possède pas d'invariant essentiel. Tous ces groupes sont transitifs et ont six paramètres; parmi eux se trouve naturellement le groupe des mouvements euclidiens; et aussi le groupe d'une surface du second degré; en tenant compte de la réalité, il y a onze types de groupes répondant à la question. L'auteur résout aussi le même problème pour le cas du plan.

*Chapitre* 21. — Passant alors à la discussion du travail de M. Helmholtz, M. Lie prouve d'abord que les axiomes posés par le savant allemand ont comme première conséquence ce fait que les mouvements de l'espace forment un groupe, et sont, par suite, susceptibles d'un énoncé plus précis dans le langage de la théorie des groupes. Examinant ensuite l'analyse de M. Helmholtz, l'auteur montre que celui-ci y introduit implicitement cette hypothèse inadmissible que les propriétés que possède le groupe des

mouvements relativement à deux points, subsistent telles quelles quand les deux points deviennent infiniment voisins. Si donc l'on veut interpréter les calculs de M. Helmholtz, il faut remplacer au moins certains de ses axiomes par d'autres; on peut ainsi effectivement arriver à caractériser les trois groupes des mouvements euclidiens et non euclidiens. M. Lie examine enfin les conséquences qu'une analyse rigoureuse permet de déduire des axiomes de M. Helmholtz, et arrive à cette conséquence que, si ces axiomes, convenablement interprétés, suffisent à la vérité pour définir les trois groupes considérés, l'un d'eux (l'axiome dit de *monodromie*) est inutile, et les autres mêmes ne sont pas indispensables dans toutes leurs parties. On n'a donc pas là une véritable solution du problème proposé, car on doit chercher les caractères strictement nécessaires et suffisants pour la définition des trois géométries.

*Chapitre* 22. — Dans le Chapitre suivant, M. Lie donne une première solution du problème qui repose sur une notion nouvelle, celle de la *libre mobilité des éléments infinitésimaux* (*freie Beweglichkeit im Infinitesimalen*). Un groupe de mouvements de l'espace à $n$ dimensions possède la libre mobilité des éléments infinitésimaux en un point réel, si ce groupe permet un mouvement continu des points de l'espace, après qu'on a fixé le point considéré, un élément réel $M_1$ contenant ce point, un élément réel $M_2$ contenant le précédent, et ainsi de suite jusqu'à un élément réel $M_q$ contenant tous les précédents, à la condition nécessaire et suffisante que $q$ soit plus petit que $n - 1$. M. Lie prouve que, dès que $n$ est supérieur ou égal à 3, tout groupe de mouvements réels possédant cette propriété en un point (non particulier) est semblable, par une transformation réelle, soit au groupe des mouvements euclidiens, soit à l'un des deux groupes de mouvements non euclidiens, c'est-à-dire, dans les deux derniers cas, au groupe projectif continu de l'une des deux multiplicités

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0.$$

Dans le plan, la même hypothèse fournit une infinité d'autres

groupes dépendant d'une constante arbitraire, et contenant, pour une valeur particulière de cette constante, le groupe des mouvements euclidiens.

M. Lie revient ensuite au célèbre Mémoire de Riemann, pour montrer que les conditions que Riemann s'impose en introduisant son élément d'arc, et en exprimant la possibilité des mouvements des figures de l'espace par le fait que celui-ci doit être à courbure constante, sont au fond équivalentes à la double hypothèse précédente de l'existence d'un groupe des mouvements, et de la libre mobilité des éléments infinitésimaux.

*Chapitre* 23. — La solution précédente du problème de Riemann-Helmholtz a, comme celle de Riemann lui-même, l'inconvénient d'introduire des hypothèses où interviennent les éléments infinitésimaux de l'espace. C'est pourquoi M. Lie donne une nouvelle solution où ne figurent que des hypothèses d'une nature plus élémentaire. Le problème est alors plus difficile, et M. Lie se borne d'abord au cas de l'espace à trois dimensions. L'auteur montre que les quatre axiomes suivants caractérisent pleinement les trois géométries d'Euclide, de Lobatschewski et de Riemann :

1° *L'espace à trois dimensions est une multiplicité numérique.*

2° *Les mouvements de cet espace forment un groupe réel, continu, engendré par des transformations infinitésimales.*

3° *Si l'on fixe un point (quelconque) réel* C, *toutes les positions que peut prendre encore un autre point* M *satisfont à une équation, qui représente une surface (pseudosphère) ne passant pas par le point* C.

4° *On peut, autour du point* C, *déterminer un domaine à trois dimensions tel que tout point* M *en faisant partie puisse arriver par un mouvement continu en tout autre point de la pseudosphère considérée appartenant au domaine et relié au premier par une suite continue de points réels de cette surface.*

M. Lie traite encore, quoique d'une manière moins approfondie, le cas de l'espace à quatre dimensions, et donne enfin des

indications sur la possibilité d'étendre au cas général les considérations précédentes.

*Chapitre* 24. — Dans un dernier Chapitre, M. Sophus Lie fait une revue critique des travaux publiés sur les fondements de la Géométrie par différents auteurs, principalement MM. de Tilly, Killing, Klein, Lindemann, et termine par un aperçu sur l'utilité que peuvent avoir de telles recherches au point de vue du perfectionnement des principes de la Géométrie pure, c'est-à-dire de l'élaboration d'un système d'axiomes nécessaires et suffisants pour le développement rigoureux de la Géométrie indépendamment du secours de l'Analyse.

VI. La dernière Section du Volume est destinée à éclaircir et compléter plusieurs théories exposées dans le tome I de l'Ouvrage.

*Chapitre* 25. — M. Lie revient d'abord sur les principes de la théorie générale des groupes continus finis; ils se résument dans ce que M. Lie nomme *les trois propositions fondamentales* de sa théorie. *La première* consiste en ce que les seconds membres des équations d'un groupe à $r$ paramètres

$$(2) \qquad x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfont à un certain système d'équations aux dérivées partielles, et que, réciproquement, toute famille de transformations, contenant la transformation identique, et représentée par des équations telles que (2), où les seconds membres satisfont à de telles équations différentielles, constitue un groupe.

La *seconde* proposition fondamentale dit que tout groupe à $r$ paramètres, dont les transformations sont deux à deux inverses, est engendré par $r$ transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$, liées deux à deux par des relations

$$(3) \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r);$$

et que, réciproquement, $r$ transformations infinitésimales indépendantes, liées par de telles relations, engendrent un groupe à

$r$ paramètres dont les transformations sont, deux à deux, inverses.

C'est là le résultat le plus souvent utile dans les applications; on peut dire que c'est la proposition *capitale* (*Hauptsatz*) de toute la théorie.

Enfin, en vertu de la *troisième proposition fondamentale*, les $r^3$ constantes $c_{iks}$ des relations (3) vérifient certaines égalités, et, réciproquement, à tout système de $r^3$ constantes $c_{iks}$ satisfaisant à ces égalités correspondent (et d'une infinité de manières) $r$ transformations infinitésimales indépendantes liées par les identités (3).

Reprenant d'abord les deux premières de ces propositions, l'auteur revient sur les démonstrations du premier Volume pour leur donner une forme plus intuitive; et rien n'est plus intéressant que d'être ainsi initié aux considérations si profondes et si simples qui ont guidé l'illustre savant dans la découverte de ces beaux théorèmes. M. Lie donne en même temps une seconde démonstration de la seconde proposition fondamentale, et montre ensuite comment la démonstration de la troisième, donnée dans le tome II comme application de la théorie des groupes de fonctions et des transformations de contact, peut être présentée bien simplement, sans supposer aucune connaissance de ces deux théories.

*Chapitre* 26. — Parmi les diverses formes que peuvent prendre, par le changement des paramètres, les équations d'un groupe, il en est une que M. Lie appelle *forme canonique*, caractérisée par cette propriété que les sous-groupes sont alors définis par des relations linéaires et homogènes entre les paramètres. C'est un fait bien remarquable que, dès que l'on connaît une forme quelconque des équations du groupe, on puisse les mettre sous leur forme canonique, par des opérations qui, outre des éliminations, n'exigent dans le cas le plus défavorable que certaines quadratures. C'est par la considération du *groupe adjoint* du groupe proposé que M. Lie arrive à ce beau résultat, dont les conséquences sont nombreuses et importantes. Ainsi, dès qu'on connaît les équations finies d'un groupe, on peut considérer comme connues celles de tous ses sous-groupes, et par suite leurs invariants. Bien plus, dans le cas d'un *groupe simplement transitif*, il suffit de connaître, en

même temps que ses transformations infinitésimales, celles du *groupe réciproque*, pour pouvoir obtenir, par les opérations ci-dessus indiquées, les équations finies de ces deux groupes.

*Chapitre* 27. — Dans le Chapitre suivant, M. Lie complète, de la manière la plus remarquable, la troisième proposition fondamentale, en montrant, par une méthode extrêmement ingénieuse, qu'étant donné un système de constantes $c_{iks}$ vérifiant les relations connues, on peut toujours déterminer, *sans intégration*, les transformations infinitésimales de deux groupes simplement transitifs, réciproques l'un de l'autre, ayant la *structure* (*Zusammensetzung*) définie par ces constantes. On aura alors, en vertu des développements du précédent Chapitre, les équations finies de ces deux groupes, et, par suite, en appliquant la méthode donnée dans le tome I, on sera en état de trouver les équations finies d'un représentant de chaque type de groupes transitifs de la structure donnée.

*Chapitre* 28. — Des recherches générales sur la structure des groupes font l'objet du Chapitre 28. Le *groupe adjoint* d'un groupe, dont M. Lie rappelle l'origine, et signale les rapports avec la forme canonique des équations du groupe proposé, y joue un rôle essentiel. Il fournit, par exemple, les diverses propriétés d'une importante catégorie de groupes, étudiés dans le tome I, et auquel M. Lie donne le nom de *groupes intégrables*, en raison de la manière dont ils interviennent dans les théories de l'auteur sur l'intégration des équations différentielles.

Passant ensuite aux *groupes simples*, M. Lie en indique *quatre grandes classes*, ayant pour types : le *groupe projectif général* de l'espace à $n$ dimensions; le *groupe projectif d'un complexe linéaire* (dans l'espace à $2n - 1$ dimensions); le *groupe projectif d'une surface du second degré*, fournissant deux types différents suivant que le nombre des variables est pair ou impair (le cas de l'espace à trois dimensions excepté). On sait qu'il résulte de recherches de M. Killing qu'il n'existe, en dehors de ces quatre grandes classes, que cinq structures de groupes simples.

Le Chapitre contient encore de nombreux résultats relatifs aux *sous-groupes* de diverses natures, et spécialement aux sous-

groupes invariants; une étude complète des structures des groupes à deux, trois, quatre, cinq et six paramètres. Il se termine enfin par un aperçu des rapports qui lient la théorie des groupes à la théorie générale des nombres complexes à $n$ unités fondamentales.

*Chapitre* 29. — L'Ouvrage se termine par un Chapitre où sont résumés les travaux publiés sur la théorie des groupes (indépendamment des applications), depuis 1884, par différents auteurs. Nous sommes obligé ici, à notre grand regret, d'être plus que jamais incomplet dans notre analyse. Contentons-nous donc de signaler, entre autres recherches, les contributions intéressantes apportées à la théorie, dans diverses directions, par M. Engel, le dévoué collaborateur de M. Lie; principalement son beau théorème sur les groupes intégrables; les travaux de M. Killing sur la structure des groupes, où ce savant fait preuve de tant de pénétration, mais où la rigueur des démonstrations fait trop souvent défaut; les applications ingénieuses de la théorie des groupes faites par M. Study à la théorie des nombres complexes et à celle des formes algébriques; les beaux Mémoires de M. Schur sur les principes de la théorie des groupes, étudiés surtout au point de vue de la théorie des fonctions et des développements en séries; enfin les recherches de M. Maurer sur les groupes à invariants rationnels et sur les groupes algébriques. M. Lie donne, en terminant, quelques indications sur cette dernière question des groupes algébriques, sur lesquels M. Picard a donné aussi, incidemment, des résultats très intéressants.

Nous espérons que notre analyse, si incomplète qu'elle soit, pourra suffire à donner une idée de la richesse de l'Ouvrage de M. Sophus Lie en résultats, tous nouveaux, et d'une importance capitale. Mais ce que nous n'avons pu que laisser entrevoir, c'est l'originalité, la puissance et la variété des méthodes qui ont permis à ce grand géomètre d'édifier une théorie aussi vaste, dans un domaine où les difficultés pouvaient sembler insurmontables.

E. VESSIOT.

# MÉLANGES.

## SUR LA FORME PLUS PRÉCISE DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES RÉSOLUBLES PAR RADICAUX;

PAR M. DOLBNIA.

1. La forme générale des racines des équations algébriques résolubles par radicaux a été donnée sans démonstration par Abel dans le Mémoire inachevé *Sur la résolution algébrique des équations* (1). Dans ce Mémoire, Abel a donné le théorème suivant : *Si une équation irréductible dont le degré est un nombre premier est résoluble algébriquement, ses racines doivent avoir la forme*

$$(1) \qquad x = A + \sqrt[n]{R_1} + \sqrt[n]{R_2} + \ldots + \sqrt[n]{R_{n-1}},$$

*où* A *est une quantité rationnelle,* $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ *sont les racines de l'équation de* $(n-1)$ *degré.* Relativement à ce résultat, Kronecker fait la juste remarque que la forme des racines continue à n'être pas suffisamment claire. « Le seul travail, selon Kronecker (2), qui jette quelque lumière sur ce point, savoir : une Notice d'Abel sur les racines des équations du cinquième degré à coefficients entiers, semble avoir été peu remarqué. » Dans sa lettre à Holmbac du 24 octobre 1826, Abel s'exprime à ce sujet ainsi (3) : « Quant aux équations du cinquième degré, j'ai trouvé que, quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où $R$, $R'$, $R''$, $R'''$ sont les quatre racines d'une équation du quatrième degré qui sont exprimables par des racines carrées seules ». Kronecker dans sa Communication à l'Académie des Sciences de

(1) *Œuvres complètes,* t. II, p. 222; 1881.

(2) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure,* t. II, p. 654; 1866.

(3) *Œuvres complètes,* t. II, p. 260; 1881.

Berlin le 20 juin 1853, éclaircit considérablement la forme (1) des racines des équations du degré premier résolubles par radicaux. Il a montré effectivement que

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad \ldots, \quad R_{n-1}$$

possèdent la propriété spéciale consistant en ce que « non seulement les fonctions symétriques de $R_1$, $R_2$, ... soient rationnellement connues (ce qu'Abel a remarqué), mais aussi que les fonctions cycliques des quantités $R_1$, $R_2$, ..., prises dans un certain ordre, soient également rationnellement connues : en d'autres termes, l'équation de degré $(n-1)$ dont $R_1$, $R_2$. ... sont les racines doit être une équation abélienne (¹) ». Les théorèmes d'Abel, proposés dans le Mémoire mentionné plus haut, ont été démontrés plus tard par plusieurs auteurs Je puis indiquer deux travaux sur ce sujet : l'un appartient à Malmsten dans le tome 34 et l'autre à M. Boldt dans le tome 87 du *Journal de Crelle*. Dans l'article présent, on essaye de donner à la formule (1) une forme plus précise que celle de Kronecker.

2. Soit donnée une équation algébrique irréductible

$$x^n + px^{n-2} + qx^{n-3} + \ldots + rx + s = 0,$$

où $n$ est un nombre premier.

En désignant les racines de cette équation, avec Serret, par

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

formons la fonction linéaire de ces racines

$$R_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \ldots + \alpha^2 x_{n-2} + \alpha x_{n-1},$$

où $\alpha$ est l'une des racines imaginaires de l'équation binome

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Changeons $R_1$ par des degrés de substitution circulaire

$$S = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_{n-1}, & x_0 \\ x_0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-2}, & x_{n-1} \end{pmatrix},$$

(¹) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 657; 1866.

que nous désignerons, comme toujours, par

$$S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$S^k(R_1) = x_k + \alpha^{n-1} x_{k+1} + \alpha^{n-2} x_{k+2} + \ldots + \alpha^2 x_{k-2} + \alpha x_{k-1},$$

ou

$$S^k(R_1) = \alpha^k(\alpha^{n-k} x_k + \alpha^{n-k-1} x_{k+1} + \ldots + \alpha^{n-k+1} x_{k-1}),$$

ou

$$S^k(R_1) = \alpha^k R_1;$$

par conséquent

$$S(R_1) = \alpha R_1, \qquad S^2(R_1) = \alpha^2 R_1, \qquad \ldots, \qquad S^{n-1}(R_1) = \alpha^{n-1} R_1.$$

3. Soit $\rho$ une racine primitive du nombre premier $n$. Désignons

$$x_0 + \alpha^{n-1} x_\rho + \alpha^{n-2} x_{2\rho} + \ldots + \alpha x_{n-\rho} = R_\rho,$$
$$x_0 + \alpha^{n-1} x_{\rho^2} + \alpha^{n-2} x_{2\rho^2} + \ldots + \alpha x_{n-\rho^2} = R_{\rho^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_0 + \alpha^{n-1} x_{\rho^{n-2}} + \alpha^{n-2} x_{2\rho^{n-2}} + \ldots + \alpha x_{n-\rho^{n-2}} = R_{\rho^{n-2}},$$

ou, au lieu

$$\rho, \quad \rho^2, \quad \rho^3, \quad \ldots, \quad \rho^{n-2},$$

il faut prendre leurs plus petits résidus positifs suivant le module $n$.

Désignons par T la substitution

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix},$$

nous aurons

$$T(R_1) = R_\rho,$$
$$T^2(R_1) = T(R_\rho) = R_{\rho^2},$$
$$T^{n-2}(R_1) = R_{\rho^{n-2}},$$
$$T^{n-1}(R_1) = R_{\rho^{n-1}} = R_1.$$

4. En adoptant ces significations, calculons la fonction rationnelle des racines

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Nous avons

$$R_1 = x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \ldots$$
$$+ \alpha^{n-i} x_i + \ldots + \alpha^{n-k} x_k + \ldots + \alpha^2 x_{n-2} + \alpha x_{n-1},$$

$$R_{n-1} = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^i x_i + \ldots + \alpha^k x_k + \ldots + \alpha^{n-2} x_{n-2} + \alpha^{n-1} x_{n-1}.$$

Écrivons, pour abréger,

$$(\alpha^k - \alpha^l) = (k, l);$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1\mathrm{R}_{n-1} = \sum_0^{n-1} x_i^2 &+ (1,\ n-1)x_0x_1 + (2,\ n-2)x_0x_2 + \ldots \\
&+ (1,\ n-1)x_0x_{n-1} + \ldots \\
&+ (k-i,\ i-k)x_ix_k + \ldots + (1-n,\ n-1)x_{n-2}x_{n-1},
\end{aligned}$$

ou encore, plus simplement,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1\mathrm{R}_{n-1} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0x_1 + (2,-2)x_0x_2 + \ldots + (1,-1)x_0x_{n-1} + \ldots \\
+ (k-i,\ i-k)x_ix_k + \ldots + (1,-1)x_{n-2}x_{n-1}.
\end{aligned}$$

En faisant dans cette égalité la substitution

$$\mathrm{F} = \binom{\rho z}{z}$$

$\frac{n-3}{2}$ fois successivement, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\rho\mathrm{R}_{n-\rho} = \sum_0^{n-1} x_i^2 &+ (1,-1)x_0x_\rho + (2,-2)x_0x_{2\rho} + \ldots \\
&+ (1,-1)x_0x_{n-\rho} + \ldots + (k-i,\ i-k)x_{i\rho}x_{k\rho} + \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho}x_{n-\rho}, \\
\mathrm{R}_{\rho'}\mathrm{R}_{n-\rho'} = \sum_0^{n-1} x_i^2 &+ (1,-1)x_0x_{\rho'} + (2,-2)x_0x_{2\rho'} + \ldots \\
&+ (1,-1)x_0x_{n-\rho'} + \ldots + (k-i,\ i-k)x_{i\rho'}x_{k\rho'} + \ldots, \\
\mathrm{R}_{\rho'}\mathrm{R}_{n-\rho'} = \sum_0^{n-1} x_i^2 &+ (1,-1)x_0x_{\rho'} + \ldots + (1,-1)x_0x_{n-\rho'} + \ldots \\
&+ (k-i,\ i-k)x_{i\rho'}x_{k\rho'} + \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho'}x_{n-\rho'}.
\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\rho^{\frac{n-3}{2}}}\mathrm{R}_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \sum_0^{n-1} x_i^2 &+ (1,-1)x_0x_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots + (1,-1)x_0x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots \\
&+ (k-i,\ i-k)x_{i\rho^{\frac{n-3}{2}}}x_{k\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho^{\frac{n-3}{2}}}x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.
\end{aligned}$$

En additionnant ces équations, nous verrons que les termes semblables ne peuvent avoir de coefficients égaux. Démontrons la vérité de cette propriété pour les termes

$$x_0 x_r, \qquad r \leq n-1,$$

et pour les termes

$$x_i x_k, \qquad i, k \leq n-1.$$

Dans l'expression

$$R_{\rho^i} R_{n-\rho^i},$$

nous aurons le terme

$$(m_1 - m) x_0 x_{m\rho^i};$$

et dans l'expression

$$R_{\rho^j} R_{n-\rho^j}$$

nous aurons le terme

$$(m_1 - m) x_0 x_{m\rho^j}.$$

S'il arrivait que ces termes ayant des coefficients égaux fussent identiques, nous devrions conclure

$$\rho^i \equiv \rho^j \qquad (\mathrm{mod}\, n),$$

ce qui est impossible, car

$$i \leq \frac{n-3}{2}, \qquad j \leq \frac{n-3}{2};$$

$\rho$ est une racine primitive du nombre $n$.

Supposons maintenant, en général,

$$(k-i, i-k) x_{i\rho^i} x_{k\rho^i} = (k-i, i-k) x_{i+m\rho^j} x_{k+m\rho^j},$$

où $m$ peut être nul, positif ou négatif. L'égalité ci-dessus entraîne les deux suppositions suivantes :

1° Il existe simultanément deux congruences

$$i\rho^i = i\rho^j + m\rho^j,$$
$$k\rho^i = k\rho^j + m\rho^j,$$

d'où

$$(i-k)\rho^i = (i-k)\rho^j,$$

ou

$$\rho^i \equiv \rho^j \qquad (\mathrm{mod}\, n),$$

ce qui est impossible d'après ce qui précède.

2° Il existe simultanément deux congruences

$$i\rho^{l} \equiv k\rho^{j} + m\rho^{j},$$
$$k\rho^{l} \equiv i\rho^{j} + m\rho^{j},$$

ou

$$\rho^{l} - \rho^{j} \equiv 0 \pmod{n},$$

ou

$$\rho^{l} \equiv n - \rho^{j},$$

ce qui est également impossible suivant la définition de Q.

Ainsi les coefficients des membres semblables sont tous différents. Pourquoi, après l'addition, les coefficients de chaque membre tel que

$$x_i x_k; \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

seront

$$(1, -1) + (2, -2) + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$= \alpha + \alpha^{n-1} + \alpha^{2} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^{\frac{n-1}{2}} + \alpha^{\frac{n+1}{2}} = -1.$$

Par conséquent

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_{\rho} R_{n-\rho} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}$$
$$= \frac{n-1}{2} \sum_{0}^{n-1} x_i^2 - \sum x_i x_k + np.$$

5. Voyons maintenant quel changement s'opérera si dans la fonction

$$R_{\rho^j} = x_0 + \alpha^{n-1} x_{\rho^j} + \alpha^{n-2} x_{2\rho^j} + \ldots + \alpha x_{n-\rho^j}$$

nous faisons la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\alpha^{n-1} = \alpha^{-1} = \alpha^{\pi\rho^g};$$

alors

$$\pi\rho^{g} \equiv -1 \pmod{n},$$

par conséquent

$$\pi \equiv \rho^{\frac{n-1}{2} - g}.$$

En supposant

$$\alpha^{\pi} = \beta.$$

nous aurons

$$\beta = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}},$$

$$\alpha^{n-1} = \beta^{\rho^g};$$

donc

$$R_{\rho^g} = x_0 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g} + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g} + \beta^{3\rho^g} x_{3\rho^g} + \ldots.$$

Comme

$$S(R_{\rho^g}) = x_1 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g+1} + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g+1} + \beta^{3\rho^g} x_{3\rho^g+1} + \ldots.$$

nous aurons

$$S(R_{\rho^g}) = \beta^{-1} R_{\rho^g},$$

ou

$$S(R_{\rho^g}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}} R_{\rho^g}.$$

De même

$$S(R_{\rho^h}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} R_{\rho^h};$$

par conséquent

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} + \rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} R_{\rho^g} R_{\rho^h}.$$

Mais

$$\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} \equiv -\rho^{n-1-g} \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

$$\rho^{\frac{n-1-2h}{2}} \equiv -\rho^{n-1-h} \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

donc

$$(\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} + \rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} = \alpha^{\rho^{n-1-g} + \rho^{n-1-h}}.$$

Maintenant posons

$$\rho^g + \rho^h \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

c'est-à-dire

$$\rho^g \equiv -\rho^h \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

$$g - h = \frac{n-1}{2},$$

alors

$$\rho^{n-1-g} + \rho^{n-1-h} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

par conséquent

$$(\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} + \rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} = 1;$$

alors

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = R_{\rho^g} R_{\rho^h};$$

par conséquent

$$S(R_{\rho^g} R_{n-\rho^g}) = R_{\rho^g} R_{n-\rho^g}.$$

D'où il suit que la substitution

$$S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$$

n'altère pas la fonction

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Il est très facile de prouver que la substitution

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$$

n'altérera pas la fonction Q. En effet

$$F(Q) = R_\rho R_{n-\rho} + R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-1}{2}}};$$

et comme

$$\rho^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \equiv n-1 \quad (\operatorname{mod} n),$$

$$n - \rho^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1,$$

nous aurons

$$T(Q) = Q.$$

6. De ce qui précède on voit que Q n'est pas altéré par les substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}.$$

$a$, $b$ sont des nombres entiers. Il existe une infinité de fonctions formées comme Q et qui sont exprimables rationnellement par des quantités connues. Après la théorie de Galois ne sont solubles par radicaux que les équations de degré premier pour lesquelles toutes les fonctions qui ne s'altèrent pas par des substitutions

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$$

sont rationnellement connues. Indépendamment de la théorie de Galois on peut prouver que si l'équation (irréductible et de degré premier) est telle que toutes les fonctions des racines, ne s'altérant pas par des substitutions

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$$

s'expriment rationnellement par des quantités connues, l'équation est soluble par des radicaux, et l'on peut trouver la forme précise des racines de cette équation.

Formons la fonction des racines

$$\left(R_1 R_{n-1} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \omega^2 R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-1}{2}}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \mathfrak{A}_1,$$

où $\omega$ est l'une des racines primitives de l'équation

$$\omega^{\frac{n-1}{2}} = 1.$$

Il est facile de prouver que $\mathfrak{A}_1$ ne change pas par des substitutions

$$\left(\begin{matrix} az+b \\ z \end{matrix}\right).$$

En premier lieu, il est évident que $\mathfrak{A}_1$ ne change pas par des substitutions du groupe

$$\left(\begin{matrix} z+k \\ z \end{matrix}\right).$$

En second lieu, appliquons à $\mathfrak{A}_1$ la substitution

$$T = \left(\begin{matrix} \rho z \\ z \end{matrix}\right);$$

alors nous aurons

$$T(\mathfrak{A}_1) = \left(R_\rho R_{n-\rho} + \omega R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} \right.$$
$$\left. + \omega^2 R_{\rho^3} R_{n-\rho^3} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

ou

$$T(\mathfrak{A}_1) = \left(R_\rho R_{n-\rho} + \omega R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_1 R_{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \omega^{\frac{n-1}{2}} = \mathfrak{A}_1.$$

Par cette raison $\mathfrak{A}_1$ s'exprimera rationnellement par des quantités connues. En outre, la fonction

$$\left(R_1 R_{n-1} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

s'exprimera rationnellement par des quantités connues, et, dans le

cas où, à la place de $\omega$, on substituera successivement

$$\omega^2,\quad \omega^3,\quad \ldots,\quad \omega^{\frac{n-3}{2}}.$$

Donc nous aurons une suite d'équations linéaires

$$R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = -np,$$

$$R_1 R_{n-1} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1},$$

$$R_1 R_{n-1} + \omega^2 R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + \omega^{\frac{n-5}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-5}{2}}} = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$R_2 R_{n-1} + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + \omega R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}.$$

De ces équations nous aurons successivement

$$R_1 R_{n-1} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

$$R_\rho R_{n-\rho} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \omega^{\frac{n-5}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

où $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}$ s'exprimeront rationnellement par des coefficients de l'équation proposée.

7. Formons la fonction rationnelle des racines

$$(R_1^n + R_{n-1}^n) + (R_\rho^n + R_{n-\rho}^n) + \ldots + \left(R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}\right) - L_0.$$

Cette fonction, ne s'altérant pas par des substitutions du groupe

$$\left(\frac{az+b}{z}\right),$$

sera rationnellement connue.

La fonction des racines

$$\left[(R_1^n + R_{n-1}^n) + \omega(R_\rho^n + R_{n-\rho}^n) + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}}\left(R^n_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} + R^n_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}} = L_1$$

ne change pas également par des substitutions du groupe

$$\left(\frac{az+b}{z}\right),$$

et, par conséquent, en raisonnant comme plus haut, nous trouverons successivement

$$R_1^n + R_{n-1}^n = \frac{2}{n-1}\left(L_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

$$R_\rho^n + R_{n-\rho}^n = \frac{2}{n-1}\left(L_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$R^n_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} + R^n_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \frac{2}{n-1}\left(L_0 + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_1} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right).$$

Nous aurons ainsi pour trouver $R_1^n$ et $R_{n-1}^n$ deux équations

$$R_1^n R_{n-1}^n = \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

$$R_1^n + R_{n-1}^n = \frac{2}{n-1}\left(L_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

Donc $R_1^n$ et $R_{n-1}^n$ sont les racines d'une équation du deuxième degré

$$t^2 - \frac{2}{n-1}\left(L_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{L_{\frac{n-3}{2}}}\right)t$$
$$+ \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n = 0.$$

En la résolvant nous avons

$$\mathrm{R}_1^n = \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{L}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n};$$

$$\mathrm{R}_{n-1}^n = \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{L}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

$$- \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n}.$$

De même nous trouverons deux à deux $\mathrm{R}_\rho^n$ et $\mathrm{R}_{n-\rho}^n$; $\mathrm{R}_{\rho^2}^n$ et $\mathrm{R}_{n-\rho^2}^n$; .... Nous avons, par exemple,

$$\mathrm{R}_\rho^n = \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{L}_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n}.$$

$$\mathrm{R}_{n-\rho}^n = \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{L}_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

$$- \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}_0 + \omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_1} + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathrm{L}_{\frac{n-3}{2}}}}{n-1}\right)^2 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^n\left(-np + \ldots + \omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n}.$$

8. Pour l'équation du troisième degré nous avons, par la formule générale,

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = -3p;$$

en outre

$$\mathrm{R}_1^3 + \mathrm{R}_2^3 = (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)(\mathrm{R}_1^2 - \mathrm{R}\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2^2) = -27q;$$

donc

$$R_1^3 = -\frac{27q}{2} + \sqrt{\frac{27^2q^2}{4} + 27p^3},$$

$$R_2^3 = -\frac{27q}{2} - \sqrt{\frac{27^2q^2}{4} + 27p^3},$$

$$\frac{1}{3}R_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\frac{1}{3}R_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

9. Pour l'équation du cinquième degré

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

nous aurons

$$R_1 = \sqrt[5]{\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4} + \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p + \sqrt{\mathfrak{A}_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_4 = \sqrt[5]{\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4} - \sqrt{\left(\frac{L_0 + \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p + \sqrt{\mathfrak{A}_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_2 = \sqrt[5]{\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4} + \sqrt{\left(\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p - \sqrt{\mathfrak{A}_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_3 = \sqrt[5]{\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4} - \sqrt{\left(\frac{L_0 - \sqrt{L_1}}{4}\right)^2 - \left(\frac{-5p - \sqrt{\mathfrak{A}_1}}{2}\right)^5}}.$$

Ces résultats s'accordent complètement avec la forme prévue par Abel.

10. Il nous reste maintenant à exprimer les racines de l'équation

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$

par des

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_{n-1}.$$

Nous avons

$$R_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \ldots + \alpha^{n-k}x_k + \ldots + \alpha x_{n-1};$$

d'où

$$R_2 = x_0 + \alpha^{n-1}x_2 + \alpha^{n-2}x_4 + \ldots + \alpha^{n-k}x_{2k} + \ldots + \alpha^2 x_{n-4} + \alpha x_{n-2}.$$

Si

$$2k \equiv 1 \pmod{n},$$

nous aurons

$$R_2 = x_0 + \alpha^{n-k} x_1 + \alpha^{n-2k} x_2 + \alpha^{n-3k} x_3 + \ldots + \alpha^k x_{n-1}.$$

De même

$$R_3 = x_0 + \alpha^{n-l} x_1 + \alpha^{n-2l} x_2 + \ldots + \alpha^l x_{n-1},$$

où

$$3l \equiv 1 \pmod{n};$$

$$R_4 = x_0 + \alpha^{n-m} x_1 + \alpha^{n-2m} x_2 + \ldots + \alpha^m x_{n-1},$$

où

$$4m \equiv 1 \pmod{n};$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$R_{n-1} = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1}.$$

De là nous aurons successivement

$$x_0 = \frac{1}{n}(\quad R_1 + \quad R_2 + \quad R_3 + \ldots + \quad R_{n-1}),$$

$$x_1 = \frac{1}{n}(\quad \alpha R_1 + \quad \alpha^k R_2 + \alpha^l R_3 + \ldots + \alpha^{n-1} R_{n-1}),$$

$$x_2 = \frac{1}{n}(\quad \alpha^2 R_1 + \alpha^{2k} R_2 + \alpha^{2l} R_3 + \ldots + \alpha^{n-2} R_{n-1}),$$

$$x_3 = \frac{1}{n}(\quad \alpha^3 R_1 + \alpha^{3k} R_2 + \alpha^{3l} R_3 + \ldots + \alpha^{n-3} R_{n-1}),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$x_{n-1} = \frac{1}{n}(\alpha^{n-1} R_1 + \alpha^{n-k} R_2 \qquad + \ldots + \quad \alpha R_{n-1}),$$

où $k$, $l$, ... sont définies par les congruences mentionnées plus haut.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Cajori (Florence). — *A History of Mathematics*. In-8°, 420 p. London, Macmillan, 14 sh.

Caronnet (T.). — *Recherches sur les surfaces isothermiques et les surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre.* In-4°, 73 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Gyldén (H.). — *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales.* In-4°, 580 p. Paris, Hermann. 35 fr.

*Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik*, begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. von E. Lampe. 23. Bd, Jahrg. 1891 (in 3 Heften). 1. Heft. gr. in-8°, IV-528 p. Berlin, G. Reimer. 13 m.

Klein (F.). — *Lectures on Mathematics*, delivered from Aug. 28 to Sept. 8, 1893. In-8°. London, Macmillan. 6 sh. 6 d.

Kronecker (L.). — *Vorlesungen über Mathematik*, herausgeg. unter Mitwirkung einer von d. kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. 1. Bd. Vorlesungen über die Theorie der einfachen u. der vielfachen Integrale. Herausgeg. von E. Netto. Gr. in-8°, x-346 p. Leipzig, Teubner. 12 m.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Franz NEUMANN. — Vorlesungen ueber mathematische Physik. 7tes Heft : *Vorlesungen über die Theorie der Capillarität*, herausgegeben von Dr *A. Wangerin* (Leçons de Physique mathématique. 7e Volume : *Leçons sur la théorie de la Capillarité*, publiées par le Dr *A. Wangerin*). Gr. in-8°, x-234 p. Leipzig. B.-G. Teubner. 1894.

Les anciens élèves de M. F.-E. Neumann ont eu la pensée de publier quelques-uns des plus beaux Cours qu'ait professés leur illustre maître, durant sa longue et brillante carrière.

M. Carl Neumann, qui a poursuivi avec autant d'activité que de bonheur la voie tracée par son père, a publié les *Leçons sur la théorie du Magnétisme*, puis les *Leçons sur la théorie du potentiel et sur les fonctions sphériques;* M. Pape a réuni, en une *Introduction à la Physique théorique*, les parties les plus élémentaires de l'enseignement du maître ; M. von der Mühll a rédigé les *Leçons sur les courants électriques*, M. Dorn les *Leçons sur l'Optique théorique*, M. O.-E. Meyer les *Leçons sur l'élasticité des corps solides et de l'éther lumineux*. M. A. Wangerin vient de compléter cet ensemble en nous donnant les *Leçons sur la théorie de la capillarité*.

Exposer la théorie de Gauss, l'appliquer, ce que Gauss n'avait pas fait, aux problèmes particuliers qui intéressent les physiciens, tel est l'objet que M. F.-E. Neumann s'est proposé dans ces Leçons professées en 1864.

M. F.-E. Neumann forme le potentiel des forces capillaires en suivant l'Analyse même de Gauss ; depuis, M. J. Moutier a montré que l'on pouvait abréger notablement le calcul en introduisant, dès le début, l'hypothèse que les actions capillaires deviennent insensibles à distance sensible ; on ne saurait hésiter à préférer, dans l'enseignement élémentaire, la méthode de M. J. Moutier, qui ne fait appel qu'aux considérations mathématiques les plus simples, à la méthode de Gauss. Mais, dans un enseignement d'ordre plus élevé, on verrait avec regret laisser dans l'ombre la méthode, si féconde en idées analytiques, de l'illustre géomètre de Gœttingue.

C'est également en suivant les méthodes de Gauss que M. F.-E. Neumann forme la variation première du potentiel, pour en déduire les deux lois fondamentales de Laplace. A l'exposé du maître, M. Wangerin a joint l'exposé d'un autre procédé, qui lui est personnel, propre à résoudre le même problème; le procédé de M. Wangerin, remarquable par son élégance et par sa généralité, mérite d'être conservé dans les Traités de capillarité, à titre de méthode analytique, à côté de la belle méthode synthétique donnée par M. Joseph Bertrand.

En terminant son Mémoire, *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii*, Gauss indiquait que les méthodes par lui découvertes pouvaient s'appliquer au cas où deux liquides différents étaient en contact; M. F.-E. Neumann, développant cette indication, a constitué la théorie des gouttes liquides qui flottent sur un autre liquide; il a été conduit, en développant cette théorie, à découvrir et à démontrer un théorème fondamental, aussi important que la loi relative à l'angle de raccordement d'un liquide et d'un solide. Imaginez une goutte du liquide 1 flottant à la surface du liquide 2; soient $S_1$ la surface libre du liquide 1, $S_2$ la surface libre du liquide 2, $S_{12}$ la surface de contact des deux liquides; soient $A_1$, $A_2$, $A_{12}$ les tensions superficielles correspondantes; coupez la ligne de raccordement par un plan qui lui soit normal; ce plan coupe les surfaces $S_1$, $S_2$, $S_{12}$ suivant des lignes $L_1$, $L_2$, $L_{12}$; sur les tangentes à ces lignes en leur point commun, menez des forces respectivement égales à $A_1$, $A_2$, $A_{12}$; ces trois forces se font équilibre. Tel est le théorème, aujourd'hui classique sous le nom de *théorème de Neumann*, dont nous trouvons la démonstration rigoureuse et élégante dans les *Leçons sur la théorie de la capillarité*.

Laplace avait fondé la théorie de la capillarité sur les principes généraux de l'Hydrostatique et sur l'étude de la pression à l'intérieur d'un fluide soumis aux actions capillaires; Gauss, au contraire, déduisant directement les lois de la capillarité du principe des vitesses virtuelles, laissait entièrement de côté la considération de la pression hydrostatique; aussi, les deux théories de Laplace et de Gauss semblent-elles n'avoir aucun point commun que le point de départ et le point d'arrivée; M. F.-E. Neumann a indiqué une méthode mixte qui les rapproche l'une de l'autre; partant du

potentiel des actions capillaires que Gauss nous a appris à former, il en déduit, selon les méthodes de Lagrange, les propriétés de la pression à l'intérieur d'un fluide soumis aux forces capillaires, et il retrouve par là, avec une entière rigueur, les résultats de Laplace. Cette manière de traiter la capillarité, qui garde toute la perfection de l'Analyse de Gauss, tout en ayant sur elle l'avantage de se moins écarter de l'Hydrostatique générale, nous semble l'un des chapitres les plus intéressants de ces *Leçons*.

Nous avons marqué, au hasard de la lecture, les points qui nous ont le plus frappé dans l'enseignement de M. F.-E. Neumann sur la théorie de la capillarité; mais on aurait une idée bien incomplète de cet enseignement si l'on se contentait de ce que nous en avons dit; en réalité, on y trouve une discussion approfondie de presque toutes les questions qui intéressent le physicien : ascension des liquides dans les tubes ou entre des lames parallèles, pression d'un liquide sur un corps immergé, disque de verre adhérent à la surface d'un liquide, forme des gouttes d'eau suspendues à un plan de verre, des gouttes de mercure posées sur un plan de verre, expériences de plateau sur les gouttes d'huile plongées dans un liquide de même densité. Une seule omission nous semble mériter qu'on la signale; c'est l'étude des lames de liquide glycérique, qui ne figure pas dans les *Leçons* rédigées par M. Wangerin. Malgré cette omission, ces *Leçons* constituent le Traité de capillarité le plus parfait qui existe, du moins à notre avis.

La lecture de ces *Leçons sur la théorie de la capillarité*, comme des autres cours de M. F.-E. Neumann, donne à un haut degré la sensation de ce qu'était la Physique mathématique au milieu de ce siècle, après les beaux travaux de l'École française et de l'École allemande; sans doute, les diverses parties de la science demeuraient isolées les unes des autres, en sorte qu'elles pouvaient être publiées par des auteurs différents, dans un ordre qui n'avait rien de nécessaire; mais chacune des parties était traitée avec une netteté et une précision bien rares aujourd'hui. La Thermodynamique nous a appris à chercher les liens entre les diverses parties de la Physique et à ne plus regarder cette science que comme un seul ensemble; mais, préoccupés de l'unité du tout, peut-être sommes-nous devenus moins sensibles à la perfection du détail.

P. DUHEM.

FELIX KLEIN. — VORLESUNGEN UEBER DIE THEORIE DER ELLIPTISCHEN MODULFUNCTIONEN, ausgearbeitet und vervollständigt von Dr *Robert Fricke*. Zweiter Band. *Fortbildung und Anwendung der Theorie.*

Le premier volume de ce bel Ouvrage a été analysé dans ce *Bulletin* (1); il contenait les fondements de la théorie des fonctions modulaires elliptiques, à savoir : la définition de ces fonctions, leur invariabilité par les substitutions de sous-groupes du groupe modulaire, la représentation géométrique de cette invariabilité par la division du plan en triangles ou polygones. Cette étude amenait nécessairement celle des sous-groupes du groupe modulaire, en particulier de ceux que M. Klein appelle *groupes de congruences*, et celle des polygones correspondants. Ensuite la question se posait de savoir si réciproquement à un sous-groupe du groupe modulaire correspondait une fonction modulaire. Cette question a été résolue en transformant le polygone correspondant en surface de Riemann et en démontrant d'une façon générale l'existence de fonctions algébriques attachées à une surface de Riemann donnée.

Le second volume contient des questions particulières et des applications, applications très diverses, à la Géométrie, à l'Analyse, à la théorie des fonctions, et surtout à l'Arithmétique. Il offre l'avantage précieux de donner réunis des résultats épars jusque-là dans les travaux de M. Klein, et de M. Hurwitz principalement, et aussi de MM. Kiepert, Kronecker, Dedekind, Gierster, Hermite, Halphen, etc.

Cette abondance et cette diversité de matières rendent ce second volume bien plus difficile à analyser en quelques pages que le premier. C'est cependant ce que nous allons essayer de faire.

Rappelons-nous l'un des problèmes fondamentaux énoncés dans le premier volume :

*Former les fonctions modulaires appartenant à un sous-groupe de congruences du $n^{ième}$ degré $\Gamma_{\mu(n)}$ et les relations*

(1) 2e série, t. XVI.

*algébriques qui lient ces fonctions entre elles et à la fonction modulaire principale.*

De ce problème on a donné la solution générale, mais l'application en est pénible et n'a été poussée que jusqu'au degré 7. Deux théories particulières, celle de la division et celle de la transformation des fonctions elliptiques, vont au contraire nous donner des moyens plus faciles de former des fonctions modulaires de degrés aussi élevés qu'on voudra. C'est donc à ces théories qu'est consacrée la quatrième Section de l'Ouvrage qui forme le commencement du second volume.

Considérons les fonctions modulaires elliptiques du $n^{\text{ième}}$ degré, c'est-à-dire les fonctions homogènes de trois variables $u$, $\omega_1$, $\omega_2$, $f(u \mid \omega_1 \omega_2)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles restent invariables par les substitutions d'un sous-groupe de congruences effectuées sur $\omega_1$, $\omega_2$ [1], et par celles d'un sous-groupe d'indice fini du groupe de substitutions

$$u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

effectuées sur $u$.

2° Elles n'ont, considérées comme fonction de $u$, dans un parallélogramme des périodes, aucun point singulier essentiel.

3° $u$ étant constant, elles ont, considérées comme fonctions de $\omega_1$, $\omega_2$, le caractère de fonctions modulaires algébriques.

Les fonctions $p(u)$, $p'(u)$ de M. Weierstrass, sont par exemple des fonctions du premier degré; les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ de Jacobi, sont des fonctions du second degré.

La division par $n$ est l'opération qui consiste à remplacer $f(u \mid \omega_1 \omega_2)$ par

$$f\left(\frac{u + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right),$$

$\lambda$ et $\mu$ étant des nombres entiers et en particulier pour $u = 0$ on a la forme

$$f\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right).$$

---

[1] On se rappelle que dans l'Ouvrage de M. Klein $\omega_1$, $\omega_2$ désignent les périodes et non les demi-périodes.

Or ces formes sont de degré $n$ si $f$ est du premier degré. La division peut donc servir à trouver des formes de degrés supérieurs. Elles satisfont à des équations algébriques dont les coefficients sont rationnels en $g_2$, $g_3$ et sont le degré dans le cas le plus général égale $\varphi(n)\psi(n)$ ([1]). On établit la forme de ces équations, en particulier dans les cas où la fonction $f$ est $p$ ou $p'$. D'ailleurs, dans ces cas, les équations se simplifient, ou s'abaissent, à cause des propriétés particulières de ces fonctions, parité ou imparité.

Ensuite on introduit, comme c'est naturel, la fonction $\sigma$. La fonction

$$\sigma\left(\frac{u + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right)$$

n'est pas, à la vérité, une fonction modulaire, parce que la fonction $\sigma$ n'a pas depériodes, mais on peut en déduire, par l'adjonction d'un facteur exponentiel, des fonctions qui se reproduisent à une racine de l'unité près ($n^{\text{ième}}$ ou $2n^{\text{ième}}$ suivant que $n$ est impair ou pair) par les substitutions du groupe $\Gamma_{\mu(n)}$. On dit que ces nouvelles fonctions sont adjointes à ce groupe. D'ailleurs ces nouvelles fonctions sont réellement des fonctions modulaires, relativement au groupe $\Gamma_{2\mu(n^2)}$ ou $\Gamma_{\mu(2n^2)}$ suivant que $n$ est impair ou pair.

Pour $n = 2$ et 3, on retrouve des fonctions déjà étudiées dans le premier volume. Les cas de $n = 5$ et 7 sont étudiés ensuite.

La division des fonctions de degrés supérieurs à l'unité n'est pas étudiée ici.

Les Chapitres suivants sont consacrés à la théorie de la transformation. Soit $F(\omega_1, \omega_2)$ une forme modulaire, ou plus simplement $F(\omega)$ une fonction modulaire que nous supposerons d'abord du

---

([1]) Rappelons que, $n$ étant supposé décomposé en facteurs premiers

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

on a

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots,$$

$$\psi(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots.$$

Donc

$$\varphi(n)\psi(n) = n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\cdots;$$

$\varphi(n)\psi(n)$ est le nombre des couples de nombres entiers positifs plus petits ou égaux à $n$, dont le plus grand commun diviseur est premier avec $n$.

premier degré. La transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre est l'opération qui consiste à remplacer dans cette fonction $\omega$ par $n\omega$. Considérons par exemple la fonction J, la transformée est

$$J' = J(n\omega).$$

Mais à une valeur donnée de J correspondent une infinité de valeurs de $\omega$ comprises dans la formule

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} \qquad (ad - bc = 1).$$

Donc à cette valeur de J correspondront les valeurs de J' comprises dans la formule

$$J' = J\left(\frac{na\omega + nb}{c\omega + d}\right)$$

Or on démontre que les substitutions

$$\begin{pmatrix} na & nb \\ c & d \end{pmatrix}$$

se répartissent en $\psi(n)$ classes de substitutions équivalentes entre elles par rapport au groupe modulaire, de sorte que J' a $\psi(n)$ valeurs.

Il y a donc une équation algébrique entre J' et J : on voit facilement qu'elle est symétrique en J et J' et, d'après ce qu'on vient de dire, elle est du degré $\psi$. C'est l'équation modulaire.

Mais on peut donner une autre définition de la transformation plus générale que la première. Cette transformation consiste à remplacer $\omega$ par $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$, $a$, $b$, $c$, $d$ étant des nombres entiers assujettis à la condition $ad - bc = n$. Cette nouvelle transformation s'appellera *transformation étendue,* tandis que la première est la *transformation propre.* Si l'on range dans une même classe les transformations étendues qui se déduisent les unes des autres par des substitutions modulaires, il y en a $\Phi(n)$ classes, $\Phi(n)$ étant la somme des diviseurs du nombre $n$. D'autre part, on voit facilement que chaque classe de transformation étendue correspond à une classe de transformation propre d'ordre $n$, ou d'ordre $\frac{n}{\tau^2}$, $\tau^2$ étant un diviseur de $n$. On a donc l'identité

$$\Phi(n) = \sum_{\tau^2} \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right),$$

identité d'ailleurs facile à trouver directement, mais qui donne ici le premier exemple d'application des théories qui nous occupent, à la démonstration d'identités arithmétiques (¹).

Ensuite on établit le genre du polygone de transformation $F_\psi$. Chemin faisant, on tombe sur l'identité intéressante

$$\psi(n) = \sum_{D} \frac{D}{t}\varphi(t),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs D du nombre $n$, et $t$ étant le plus grand commun diviseur de D et de $\frac{n}{D}$.

Ce que nous avons dit de l'équation entre J et J' s'applique à toute fonction du premier degré.

Quant à l'équation relative à la transformation étendue, elle est de degré $\Phi(n)$, mais se décompose en équations de degrés $\Phi\left(\frac{n}{\tau^2}\right)$, dans le domaine de rationnalité de $g_2$ et de $g_3$.

Les résultats précédents sont appliqués en particulier à la fonction $J(\omega)$. L'équation

$$F(J, J') = 0,$$

qui lie $J(\omega)$ à $J' = J(n\omega)$ est établie pour les valeurs simples de $n$, pour lesquelles le genre de $F_{\psi(n)}$ est nul.

La transformation peut s'appliquer aux fonctions de degrés

---

(¹) Cette formule

$$\Phi(n) = \sum_{\tau^2} \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right)$$

donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} \sum \frac{1}{(n^2)^s}$$

ou

$$\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} \times \zeta(2s),$$

d'où enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-1)}{\zeta(2s)},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ [*voir* E. CAHEN, *Mémoire sur la fonction* $\zeta(s)$ (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XI, p. 104; 1894)].

quelconques; le problème s'étend alors beaucoup, deux Chapitres y sont consacrés : dans le premier on donne les principes généraux, dans le second on établit les équations de transformation. Soit $z$ une fonction modulaire relative à un sous-groupe $\Gamma_\mu$. Supposons qu'à une valeur de $z$ correspondent $\nu$ valeurs de J, à chaque valeur de J correspondent $\psi$ valeurs de $J' = J(n\omega)$; enfin, à chaque valeur de $J'$ correspondent $\mu$ valeurs de $z' = z(n\omega)$. De sorte que l'équation entre $z$ et $z'$, qui d'ailleurs est évidemment symétrique par rapport à ces deux quantités, est du degré $\mu\nu\psi$.

Mais cette équation peut être réductible, et, dans le cas particulier où elle admet comme facteur une équation de degré $\psi$, cette dernière jouit de propriétés absolument analogues à l'équation modulaire relative aux fonctions du premier degré, et peut être aussi appelée une *équation modulaire*. La recherche des circonstances dans lesquelles se présente ce cas est faite par la considération du groupe $\Gamma_\mu$ comparé au groupe des transformations d'ordre $n$, dans le cas où $n$ est premier avec le degré de la fonction, ce qui nécessite des recherches générales sur le sous-groupe commun à deux sous-groupes donnés, recherches qu'on trouve dans le troisième Chapitre. Les équations modulaires n'existent que lorsque le genre $p$ de $\Gamma_\mu$ est nul, c'est-à-dire quand J est fonction rationnelle de $z$, sans que la réciproque soit vraie.

Dans le Chapitre suivant, on étudie des équations particulières, principalement celles qui se rapportent aux fonctions du second degré de Jacobi. A la fin de ce Chapitre, on examine les formes irrationnelles trouvées par Legendre et Jacobi pour les équations de transformation, par exemple l'équation $\sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} = 1$, relative à la transformation du troisième ordre. Ces résultats sont rattachés à une théorie plus générale, celle de la correspondance modulaire, sur laquelle on reviendra plus tard.

Nous avons déjà dit, et l'on sait déjà depuis longtemps, quelles nombreuses et belles applications à l'Arithmétique découlent de la théorie des fonctions elliptiques. Ces applications, éparses dans les œuvres admirables de Jacobi, de Kronecker, de M. Hermite, etc., manquent de points de vue généraux. Les auteurs du livre dont nous nous occupons ont cherché à en établir pour ce qui regarde les applications des équations modulaires à la théorie des formes quadratiques binaires à coefficients entiers.

Rappelons-nous la représentation géométrique d'une telle forme donnée dans le tome I de l'Ouvrage. Si le déterminant $D = b^2 - ac$, de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$, est négatif, la forme est représentée par le point $\dfrac{-b - \sqrt{D}}{a}$ du demi-plan au-dessus de l'axe des $x$. Si le déterminant de la forme est positif, elle est représentée par le cercle décrit sur le segment de l'axe des $x$, limité par les deux points racines de la forme, cercle dont l'équation est

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0.$$

Soit alors une équation modulaire $f(J, J') = 0$ du premier degré, relative à la transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre. Cherchons si J' peut être imaginaire conjugué de J, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$J = X + y, \qquad J' = X - y.$$

Portant ces valeurs dans l'équation

$$f(J, J') = 0,$$

qui est symétrique en J et J', il vient

$$h(X, Y) = 0.$$

Or les valeurs de J' sont

$$J[(nV(\omega)],$$

V étant une substitution modulaire.

$J[nV(\omega)]$ devant être imaginaire conjuguée de $J(\omega)$, il faut que les substitutions $nV(\omega)$ et $-\bar{\omega}$ soient équivalentes relativement au groupe modulaire, autrement dit qu'il existe une substitution modulaire V' telle que l'on ait

$$V'[nV(\omega)] = -\tilde{\omega}.$$

Soit

$$V'[nV(\omega)] = \frac{b\omega + c}{a\omega + d} \qquad (bd - ac = n);$$

il en résulte

$$\frac{b\omega + c}{a\omega + d} = -\bar{\omega},$$

ou, en posant $\omega = x + iy$,

$$\frac{b(x + iy) + c}{a(x + iy) + d} = -(x - iy)$$

ou

$$a(x^2 + y^2) + (b + d)x + c + i(b - d)y = 0,$$

ce qui exige que $b - d$ soit nul, et alors il reste

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0,$$

et l'égalité $bd - ac = n$ devient

$$b^2 - ac = n,$$

de sorte que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est une forme de déterminant $n$, dont le cercle représentatif passe par le point $\omega$ pour lequel $J' = J$. La réciproque est vraie si un point $\omega$ est sur un cercle tel que le précédent, dont les coefficients satisfont à l'équation $b^2 - ac = n$; il y a un module J' imaginaire conjugué de J. Les courbes $h = 0$ sont les représentations conformes de ces cercles par la fonction correspondante. Elles sont appelées *courbes de Smith*, du nom de leur inventeur. Les courbes de Smith ne sont d'ailleurs que les lignes qui, sur la surface $F_\psi$, ne changent pas par la transformation $WA = \frac{1}{n\omega}$; de sorte que le nombre de ces lignes égale le nombre des classes des formes primitives du déterminant $n$. Des considérations analogues s'appliquent à la transformation étendue; elles ont rapport aux formes primitives ou non.

Tout ce qui précède n'a rapport qu'aux formes à déterminant positif, mais la théorie des équations modulaires s'applique également aux formes à déterminant négatif. Cette application repose sur la considération des modules J singuliers, c'est-à-dire égaux à un module transformé J'. L'équation entre J et J' étant

$$f(J, J') = 0,$$

de tels modules sont évidemment donnés par l'équation

$$f(J, J) = 0$$

ou, en fonction de $\omega$,

$$G(\omega) = 0.$$

Ainsi les valeurs singulières de $\omega$ sont en nombre limité. Or on a

$$J' = J[R(\omega)],$$

de sorte que les valeurs singulières de $\omega$ satisfont à l'équation

$$\omega = R(\omega)$$

ou

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \qquad (ad - bc = n),$$

ou

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b = 0.$$

Posons

$$c = \mathrm{P}, \qquad d - a = \mathrm{Q}, \qquad -b = \mathrm{R};$$

on voit que $\omega$ est le point racine de la forme

$$\mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}xy + \mathrm{R}y^2,$$

dont le déterminant

$$\mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{PR} = (d - a)^2 + 4bc = (d + a)^2 - 4n = \varkappa^2 - 4n$$

sera négatif à condition que l'on ait

$$|\varkappa| < 2\sqrt{n}.$$

Réciproquement soient un nombre $n$ et un nombre $\varkappa$ moindre, en valeur absolue, que $2\sqrt{n}$, et une forme de déterminant négatif $\mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{PR} = -n$ ; il y a une valeur singulière de $\omega$ et une substitution correspondantes.

Le nombre de ces valeurs singulières est donc

$$\sum_{\varkappa} \mathrm{H}(4n - \varkappa^2), \qquad (-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}),$$

ou cette somme diminuée de 1 quand $n$ est un nombre carré, en désignant par $\mathrm{H}(\Delta)$ le nombre des classes de déterminant $-\Delta$.

C'est le degré de l'équation qui donne les valeurs singulières de J.

Ce degré peut se calculer d'après ce qu'on a dit plus haut sur la forme des équations modulaires, et, en le comparant à l'expression précédente, on trouve

$$\sum_{\varkappa} \mathrm{H}(4n - \varkappa^2) = \Phi(n) + \Psi(n), \qquad (-2\sqrt{n} < \varkappa < 2\sqrt{n}),$$

$\Phi(n)$ étant la somme des diviseurs du nombre $n$ ;
$\Psi(n)$ l'excès de la somme des diviseurs de $n$ qui sont plus grands que $\sqrt{n}$, sur la somme de ceux qui sont plus petits que $\sqrt{n}$.

Cette belle formule a été trouvée par Kronecker.

Une question qui a beaucoup de rapports avec les précédentes est celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. On sait que, $n$ étant un nombre entier, $p(nu \mid \omega_1, \omega_2)$, pour prendre cette fonction comme exemple, est fonction rationnelle de $p(u \mid \omega_1, \omega_2)$ et de $p'(u \mid \omega_1, \omega_2)$. Existe-t-il des nombres complexes $\mu$ tels que $p(\mu u \mid \omega_1, \omega_2)$ jouisse de la même propriété? Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\mu\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\mu\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

$a$, $b$, $c$, $d$ étant des nombres entiers, d'où facilement

$$\mu^2 - (a+d)\mu + ad - bc = 0,$$
$$\mu = \frac{\varkappa \pm i\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-Q \pm i\sqrt{\Delta}}{2P}.$$

$\omega$ devant être dans le demi-plan au-dessus de l'axe réel, on prendra

$$\mu = \frac{\varkappa + i\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \omega = \frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P} \qquad (\text{en supposant } c > 0).$$

On voit les rapports intimes qu'il y a entre les deux questions.

Les résultats précédents sont ensuite appliqués aux cas de $n = 5$ et $n = 7$.

Dans le Chapitre suivant on cherche à généraliser les résultats précédents pour les équations modulaires de degrés supérieurs, d'après les travaux de Kronecker, Gierster, Hurwitz. On applique particulièrement aux équations modulaires de l'icosaèdre relatives à la fonction $\zeta(\omega)$ (*voir* le Ier Volume). Cela donne alors des théorèmes sur les formes quadratiques binaires considérées dans leurs rapports avec le diviseur 5. L'exemple suivant donnera une idée du genre de théorèmes que l'on obtient. Soit

$$n \equiv 2 \pmod 5,$$

on a

$$3 \sum_{\varkappa \equiv 0 \pmod 5} H(4n - \varkappa^2) = 2\Phi(n).$$

L'auteur fait une étude complète de ces relations en examinant tous les cas possibles relativement aux restes de $n$ et de $\varkappa$ par

rapport à 5. Cette étude termine la IV$^e$ Section de l'Ouvrage.

Cette IV$^e$ Section n'était, comme nous l'avons dit au commencement, qu'une préparation à l'achèvement du problème fondamental exposé dans la I$^{re}$ Section : former des fonctions modulaires de degrés supérieurs. C'est à ce problème qu'est consacrée la V$^e$ Section.

Ici l'auteur fait intervenir une représentation géométrique qui n'est pas essentielle, mais qui est commode et intéressante, à savoir la représentation par les courbes normales elliptiques. Soit une fonction doublement périodique du premier degré, sa périodicité est représentée dans le plan des $u$ par une division en parallélogrammes. Soit $m$ le nombre de points d'un de ces parallélogrammes en lesquels la fonction prend une même valeur, nous pouvons, par le moyen de la fonction, représenter ce parallélogramme sur une surface de Riemann à $m$ feuillets $F_m$ qui est du genre 1. On sait (*voir* le I$^{er}$ Volume) que les fonctions algébriques de $F_m$, qui restent finies sur la surface, excepté peut-être en $n$ certains points, sont fonctions linéaires de $n-1$ spéciales. Or nous pouvons considérer les valeurs de ces $n-1$ fonctions en chaque point de la surface, comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $n-1$ dimensions. Ce point, dont les coordonnées sont fonctions d'un paramètre $u$, décrit dans cet espace une courbe $R_{n-1}$. A chaque point de la surface correspond un point de la courbe, et cette courbe est d'ordre $n$ ou $\frac{n}{\mu}$, suivant qu'à chaque point de la courbe correspond un ou $\mu$ points de la surface.

On saisira mieux cette idée générale, en remarquant que dans le cas particulier de $n=3$ on a la représentation bien connue des cubiques planes par les fonctions elliptiques.

Ces considérations donnent une forme géométrique aux problèmes de la division et de la transformation. Ainsi le problème de la division se ramène à la recherche de substitutions linéaires qui ne changent pas la courbe, et celui de la transformation à la recherche des polyèdres à $n$ faces dans l'espace à $n-1$ dimensions qui ne changent pas par les mêmes substitutions. Les équations des faces de ces polyèdres donnent des fonctions $X_\alpha$ qui sont du degré $n$, $2n$ ou $4n$ suivant que $n$ est impair ou $\equiv 0$ ou $\equiv 2 \pmod{4}$.

Ces fonctions sont étudiées particulièrement dans leurs rapports avec les substitutions S et T; ces substitutions transforment ces fonctions les unes dans les autres avec adjonctions de coefficients contenant l'irrationnelle $\sqrt{n}$ et les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Des combinaisons de ces formules donnent les séries singulières de Gauss

$$\sum_{h=1}^{p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e^{\frac{2hi\pi}{p}}.$$

Ensuite on étudie les fonctions qu'on obtient par combinaisons bilinéaires des $X_\alpha$, leurs développements en série suivant les puissances de $u$. Les coefficients de ces développements donnent des formes modulaires, et c'est un procédé général pour déduire des formes modulaires de fonctions modulaires elliptiques. Ces considérations sont ensuite appliquées à des valeurs particulières de $n$. Pour $n \leq 7$ on est naturellement amené à comparer ces résultats avec ceux trouvés pour ces mêmes valeurs de $n$, dans le I[er] Volume, et en particulier les développements suivant les puissances de $r = e^{2i\pi\omega}$. Dans les développements actuels, le calcul introduit comme coefficients des formes quadratiques, dans les développements précédents on avait des sommes de diviseurs; en identifiant, on trouve des formules dont la suivante qui correspond à $n = 3$ donnera une idée : *$m$ étant un nombre positif, le nombre des représentations de* $4m$, *sous la forme*

$$4m = x_1^2 + x_2^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2,$$

$x_i$ *étant congru avec* $y_i \pmod{2}$, *est égal à douze fois la somme des diviseurs de $n$ premiers avec* 3.

On examine ensuite le cas de $n > 7$ et en particulier celui de $n = 11$. Les fonctions obtenues sont nouvelles.

Enfin dans la VI[e] et dernière Section de l'Ouvrage est développée la théorie de la correspondance modulaire, dont nous avons parlé plus haut et qui est une généralisation de celle des équations modulaires. La correspondance modulaire donne d'ailleurs, comme les équations modulaires, des applications arithmétiques du plus haut intérêt.

Avant d'aborder cette théorie, on donne de nouveaux développements sur celle des surfaces de Riemann; intégrales de troisième

espèce, forme normale de ces intégrales, périodes, échange du paramètre et de l'argument, théorème d'Abel, toutes ces questions, qui seront bientôt classiques, ne sont ici qu'esquissées, mais de cette manière large et instructive dont M. Klein a le secret.

Ensuite on introduit dans la théorie des surfaces de Riemann la considération des formes, en posant

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

De sorte que $\varpi z_2^\nu$ ($\varpi$ étant fonction de $z$ et $\nu$ étant positif ou négatif) est une forme de $\nu^{\text{ième}}$ dimension.

En particulier, de la considération des intégrales de troisième espèce on déduit des formes dites primitives, non algébriques, qui, lorsque la variable décrit des chemins de périodes, se reproduisent à certains facteurs près. D'ailleurs, dans le cas où le genre de la surface est égal à 1, ces formes ne sont autres que des fonctions $\mathfrak{S}$.

Ces formes primitives servent à la représentation de toutes les fonctions algébriques et des intégrales de $F_n$, et au problème de l'inversion qui est traité d'après les principes de M. Weierstrass.

Le Chapitre suivant est consacré à la théorie générale de la correspondance algébrique. Considérons, par exemple, une courbe plane; on appelle correspondance algébrique $(\alpha\beta)$-voque une relation algébrique entre deux points $x$, $y$ de la courbe telle qu'à chaque position de $x$ correspondent $\alpha$ positions de $y$ différentes en général de $x$ et $\varpi$ coïncidant avec $x$, et à chaque position de $y$, $\beta$ positions de $x$ différentes en général de $y$, et $\varpi'$ coïncidant avec $y$. On démontre d'abord que $\varpi = \varpi'$, mais il y a $\nu$ positions spéciales de $x$ pour lesquelles un des points $y$ coïncide avec $x$. Le principe de correspondance s'exprime par l'égalité

$$\nu = \alpha + \beta + 2p\varpi,$$

$p$ étant le genre de la courbe.

Soit $\omega$ un point du plan; faisons-lui correspondre le point $n\omega$. Considérons d'autre part une surface $F_\mu$ correspondant à un groupe invariant de congruences $\Gamma_\mu$ de degré premier à $n$. Au point $\omega$ correspond sur la surface un point $u$, et au point $n\omega$ un point $y$. Mais si $x$ décrit sur la surface un contour fermé, cela

revient à remplacer $\omega$ par un point du demi-plan $v_i(\omega)$ équivalent par rapport à $\Gamma_\mu$; alors $n\omega$ est devenu $nv_i(\omega)$. Or de tous les points $nv_i(\omega)$ il y en a $\psi(n)$ inéquivalents par rapport à $\Gamma_{\mu 1}$. On a ainsi une correspondance $\psi$-voque, qui est dite correspondance modulaire.

On voit que, si le genre de $\Gamma_\mu$ est nul, on retrouve en particulier les équations modulaires.

Cette correspondance modulaire est étudiée avec plus de détails pour certaines valeurs particulières de $m$.

Elle donne naissance, comme la théorie des équations modulaires dont elle est une généralisation, à des identités arithmétiques.

Pour donner une idée de ces identités, citons par exemple la suivante, relative au degré 7 :

$$4\,\mathrm{H}(4n) = \Phi(n) + \Psi(n),$$

*$n$ étant non reste de 7.*

*Les formes réduites* (P, Q, P) *ne comptant que pour* $\frac{1}{2}$ *et les formes réduites* (P, P, P) *pour* $\frac{1}{3}$.

*$\Phi(n)$ désignant la somme des diviseurs de $n$.*

*$\Psi(n)$ désignant la somme* $\frac{1}{4}\sum\left(\frac{x}{7}\right)x$ *étendue à toutes les représentations du nombre $4n$ par la forme binaire quadratique*

$$4n = x^2 + 7y^2.$$

Toutes ces identités se tirent d'une double évaluation du nombre $v$ des coïncidences, par la formule d'Hurwitz ou directement.

On peut établir une correspondance analogue entre deux points d'une surface de Riemann. L'étude de cette correspondance est faite d'après M. Hurwitz.

En particulier on remarquera une formule donnant le nombre $v$ des coïncidences (*voir* plus haut).

La correspondance modulaire est un cas particulier de cette correspondance algébrique générale.

Enfin le dernier Chapitre est consacré à la représentation algébrique de la correspondance modulaire, que la relation $\omega' = n\omega$ donne sous forme transcendante. Comme cas particulier on re-

trouve les équations irrationnelles de Legendre et Jacobi dont nous avons parlé plus haut.

Il est toujours difficile de donner, dans une courte analyse, une idée exacte et suffisante d'un Ouvrage considérable, surtout s'il s'agit d'un Ouvrage d'applications comme celui dont nous nous occupons. Nous serons heureux si le résumé précédent, quelque imparfait qu'il soit, donne à nos lecteurs le désir de lire le Livre lui-même.

A ceux d'ailleurs qui seraient effrayés par ses dimensions (les deux volumes réunis n'ont pas moins de 1460 pages) s'adresse la Préface du second Volume. M. Fricke y donne un programme des matières du premier Volume indispensables à étudier, et l'ordre le plus avantageux à suivre dans cette étude. Ce n'est d'ailleurs évidemment là qu'une indication, chacun pouvant à son gré et suivant ses besoins particuliers modifier ce programme. Ceci est encore plus vrai pour le second Volume, à cause de son caractère plus particulier d'application.

Maintenant, quand on pense que cette théorie des fonctions modulaires, si considérable par elle-même, n'est, dans l'esprit de l'auteur, que la suite de ses leçons sur l'icosaèdre, et la préparation à la théorie générale des fonctions automorphes (à substitutions linéaires), on ne peut se défendre d'un sentiment d'admiration pour la grandeur de l'œuvre entreprise.

Alors que M. Poincaré s'est avancé d'un seul coup aux limites de cette théorie, mais en laissant derrière lui bien des régions inexplorées, M. Klein a voulu procéder avec plus de sûreté; les travaux des deux géomètres se compléteront et leurs noms resteront inséparables dans l'histoire de la Science.

E. Cahen.

# MÉLANGES.

## M. MAURICE CANTOR ET LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DE L'ANTIQUITÉ;

PAR M. H.-G. ZEUTHEN.

Dans la préface de la seconde édition du premier Volume de ses importantes *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, M. Maurice Cantor déclare qu'il a tâché de profiter de toutes les publications des derniers treize ans qui étaient à sa disposition, soit en insérant leurs nouveaux résultats dans son livre, soit en les citant sans leur donner son adhésion. La libéralité envers les adversaires scientifiques que fait voir ce dernier alternatif est entièrement dans l'esprit de la première édition, où très souvent l'auteur expose les raisons des adversaires si complètement qu'il fournit au lecteur tous les renseignements nécessaires pour juger dans le litige.

D'autant plus sévère devient le jugement porté indirectement par M. Cantor sur les recherches appartenant au cadre de son livre, dont il ne daigne pas faire connaître à ses lecteurs un seul des résultats assez divergents des siens. C'est cela qui a lieu pour les recherches sur la Géométrie supérieure des anciens, consignées à mon livre sur la théorie des coniques de l'antiquité ([1]).

Il est vrai que M. Cantor (p. 270) s'est joint à mon avis sur un point assez essentiel de l'histoire des Mathématiques élémentaires des Grecs (la connaissance d'Euclide de la résolution numérique des équations du second degré); je le note avec satisfaction, quand même le compliment que me fait M. Cantor à cet égard serait plutôt dû à M. Paul Tannery. Il cite même (p. 276) une de mes recherches sur la théorie des coniques, mais d'une manière qui donne une idée assez fausse de mon résultat. Je trouve aussi dans sa nouvelle édition quelques corrections de faits historiques qui n'étaient pas bien rapportés dans la première édition

([1]) H.-G. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum*. Deutsche Ausgabe (du travail publié originairement en danois dans les Mémoires de l'Académie de Danemark) besorgt von Dr. R. v. Fischer-Benzon.

*Voir*, dans ce *Bulletin*, l'analyse de M. P. Tannery, 2e série, t. X, p. 263; 1886.

et sur lesquels j'avais attiré l'attention, et je n'ai nullement lieu de me plaindre que M. Cantor ne m'a pas cité à l'occasion de ces corrections, car elles portent seulement sur des endroits d'auteurs assez connus. C'est son silence absolu sur tous les autres résultats de mes recherches qui en contient le jugement dont je demande ici la justification.

La forme indirecte de ce jugement a pour moi l'inconvénient que ses prémisses me restent entièrement inconnues. J'ai cherché en vain dans la nouvelle édition le rapport d'un seul fait qui n'était pas déjà mentionné soit dans la première édition, soit dans mon livre; une seule remarque sur un des derniers faits montre que, dans ce cas particulier, M. Cantor a gardé son opinion, mais n'explique pas pourquoi il a regardé la mienne comme indigne d'être citée. La valeur du jugement dépend donc exclusivement de l'autorité de M. Cantor.

Pour me défendre, il ne me reste donc qu'un seul moyen : celui d'affaiblir cette autorité quant aux questions qui m'ont occupé dans mon livre. Je me hâte d'ajouter qu'il serait aussi inutile qu'injuste d'essayer de rendre suspects aussi les fruits des recherches plus directement *historiques* de M. Cantor : le soin infatigable dont il a ramassé les faits historiques de tout côté possible, la sage critique dont il les a élaborés et la justesse dont il les a exposés sont trop légitimement respectés pour cela. Il serait même ingrat de ma part d'en élever aucun doute ; ce n'est en effet qu'en ayant égard à toutes les remarques historiques de M. Cantor et en consultant les auteurs cités par lui, que je me suis mis à l'abri du danger de donner des auteurs anciens une explication qui ne concorde pas avec le temps de leurs productions.

Les remarques suivantes, et celles que j'ai eu lieu de faire ailleurs, portent donc seulement sur son analyse mathématique des grands auteurs, ici en particulier de ceux de l'antiquité. Sa liste des résultats qu'on leur doit contient rarement de trop, mais assez souvent de trop peu, et très souvent ceux qu'il néglige ont été mieux étudiés dans les temps suivants que par M. Cantor, de façon qu'il a perdu un moyen de voir l'évolution postérieure des idées ; mais, avant tout, les jugements qu'il porte sur la valeur et sur la connexion de leurs différentes prestations montrent qu'il ne les a pas soumis à l'étude mathématique que méritent les travaux des grands géomètres.

Pour mettre à sa juste place un de ces chefs-d'œuvre, il ne suffit pas d'enregistrer les résultats connus aujourd'hui qu'il contient et de juger ces résultats d'après le rôle qu'ils jouent dans les Mathématiques actuelles et d'après la facilité qu'on a à les vérifier par les méthodes modernes; il faut se mettre aux pieds de l'auteur pour en apprendre, s'il est possible, les idées qui l'ont conduit à découvrir ces résultats, ou, du moins, les considérations si différentes des nôtres qui lui permettent de les établir d'une manière si complète. Il ne faut pas mesurer d'après les nôtres les facultés des anciens maîtres de se servir de procédés géométriques beaucoup moins développés que l'Algèbre de nos jours : ils en avaient appris l'usage difficile parce qu'ils avaient été renvoyés à s'y exercer et parce qu'ils étaient de grands hommes.

Un véritable jugement sur les grands savants des temps passés, même un rapport sur leurs prestations qui n'oublie rien d'essentiel, demande une étude de cette nature. Cependant, il faut convenir qu'elle aurait dérobé à M. Cantor trop du temps qu'il applique si utilement aux études plus historiques. S'il n'a pu toujours y joindre l'étude plus mathématique dont je viens de parler, il en résultera seulement que les parties de son livre où il y en aurait besoin ne sont pas à la hauteur des autres. Quant aux résultats de mes études de la Géométrie supérieure des anciens, il n'ŷ pouvait pas prendre position sans une nouvelle étude des auteurs en question et de mes recherches. S'il n'a pas eu le temps de la faire, je ne m'étonne pas qu'il ait gardé les opinions une fois acquises, mais alors il aurait dû avouer qu'il ne faisait que les réimprimer. Si, au contraire, après une étude sérieuse, il trouve mes résultats mal fondés, au point de vue historique, il lui doit être facile de le montrer par quelques exemples. On ne m'en a fait voir aucun depuis la publication de mon livre en 1886 [1].

Afin de ne me rendre pas coupable du même manque d'égards que je reproche à M. Cantor, je dois appuyer par des raisons la

---

[1] Sans doute, je ne puis attendre de l'unanimité sur les hypothèses *avouées* qui sont entremêlées à mes analyses des travaux anciens. Je défendrai, du reste, aussi la *probabilité* de ces hypothèses à l'exception de celle que j'ai faite sur les lieux *ad medietates* d'Érathostène : elle n'est au fond qu'un exercice à appliquer librement les méthodes des anciens.

critique de son étude des grands géomètres que contiennent les précédentes lignes.

Depuis longtemps il a montré son défaut d'intérêt particulier à ces auteurs, en publiant son Ouvrage sur *Euclide et son siècle* (¹) sans connaître directement les *coniques d'Apollonius*. Il est vrai qu'il en connaissait l'analyse faite par Housel, mais cela ne l'empêche pas de répéter certains malentendus traditionnels évités par l'auteur cité. Dans ses *Leçons*, il se réfère bien au texte conservé d'Apollonius, mais il préfère toujours les sources variées de l'historien aux importants documents mathématiques conservés des mains des grands géomètres.

On le voit, avant tout, à la manière dont il compare Apollonius à ses prédécesseurs. Pour constater les progrès dus à ce *grand géomètre* il renvoie à des remarques de Geminus et Pappus que sans doute aucun historien ne négligera impunément; mais de son côté M. Cantor néglige (entièrement dans la première édition) d'en contrôler la portée par la comparaison des œuvres d'Archimède et d'Apollonius. Il laisse échapper de cette façon une occasion de corriger l'erreur généralement répandue qui se rattache à la dénomination de *théorème d'Apollonius*. On donne à présent ce nom au théorème exprimant (pour l'ellipse et l'hyperbole) que les carrés des demi-cordes parallèles d'une conique sont proportionnels aux rectangles formés des segments interceptés sur le diamètre correspondant entre les cordes et les sommets. Ce théorème est très bien connu par Archimède et sert même de base aux recherches où il fait usage des coniques. M. Cantor n'en dit rien. Au contraire, en faisant passer pour un grand progrès *géométrique* la forme particulière que lui donne Apollonius, et à laquelle ce géomètre a rattaché les noms des trois coniques en usage aujourd'hui, il contribue essentiellement à cacher le fait important que je viens de rappeler (²). On le regrette d'autant plus que, sans la connaissance de ce fait, on ne comprend pas

---

(¹) *Zeitschrift für Math. und Phys.*, hist. lit., Abth., XII, p. 71 s.

(²) Le seul moyen de le trouver qu'il laisse à ses lecteurs, c'est la citation de mon livre dont j'ai déjà parlé (p. 276, note); mais il ne cite pas l'endroit de mon livre (p. 47 et suiv.), et ne m'attribue aucune opinion raisonnable : il se contente de m'attribuer une réponse affirmative à une série de questions trop aptes à cacher le fait en question pour que j'y puisse répondre.

comment Archimède a su trouver les propriétés de certaines surfaces du second ordre et les volumes de leurs segments, et faire ses autres applications de la théorie des coniques.

Selon le renseignement dû à Geminus, les prédécesseurs d'Apollonius n'auraient connu que les sections coniques faites aux cônes droits par des plans perpendiculaires à une de leurs génératrices. Après s'être contenté dans sa première édition de s'appuyer sur cette remarque, M. Cantor a trouvé juste de mentionner dans la seconde les preuves que fait voir Archimède (et peut-être déjà Euclide) de la connaissance d'autres sections elliptiques. Cependant, il n'est pas absolument heureux à cet égard. Il veut borner, en effet, à la page 320, la connaissance d'Archimède aux sections de cônes droits, quoique Archimède s'occupe en particulier de trouver un cône circulaire passant par une ellipse, et dont le sommet se trouve sur la droite menée perpendiculairement au plan de la conique par son centre. Ce cône devient évidemment oblique. Le problème posé originairement par Archimède est même encore plus général.

Cependant il est vrai, et personne ne l'a nié, qu'Archimède n'a occasion de parler que de sections elliptiques de cônes. M. Cantor peut donc très bien se passer de mon hypothèse (qu'il ne cite pas même) que les renseignements de Geminus, rapportés par Eutocius, n'ont égard qu'aux définitions stéréométriques des courbes et de leurs constantes. Alors, il a toutefois besoin d'y substituer une autre hypothèse : celle que Geminus aurait étendue aux ellipses un renseignement qui n'était juste que pour les paraboles et les hyperboles (¹).

Il n'est pas ici le lieu de discuter ces hypothèses. Quoi qu'il en soit, vu la familiarité d'Archimède avec les sections elliptiques ayant des positions différentes par rapport aux cônes droits et obliques, et vu le fait qu'on savait déjà surmonter dans le cas d'une position particulière les difficultés que cause l'extension aux hyperboles, aussi la valeur géométrique du second des progrès que M. Cantor attribue à Apollonius d'après Pappus et Geminus

(¹) A cet égard aussi M. Dorsten se joint à l'avis de M. Cantor dans sa *Inleiding op eene geschiedenis van de leer der Kegelsneden in de Oudheid*. Rotterdam, 1887.

se réduit essentiellement. Ce qu'il faut regretter le plus à cet égard, c'est que par la longue occupation de ces deux progrès, l'auteur se croit exempt de rendre compte de ceux qui se présentent immédiatement à la lecture des premiers livres d'Apollonius et à la comparaison de sa théorie générale avec les connaissances qui font la base des recherches d'Archimède sur les coniques. M. Cantor ne fait guère voir la grandeur de la théorie générale d'Apollonius, témoin en même temps de la bonne préparation due à ses prédécesseurs et à son propre génie. Il est vrai qu'il rend compte d'une grande partie des résultats qui s'y trouvent; mais il a si peu vu l'importance et l'état complet de ces résultats et la grandeur du travail indispensable pour les établir, qu'encore dans la nouvelle édition il résume ainsi le but des quatre premiers livres : qu'ils devaient contenir la partie de la Géométrie supérieure que devaient connaître les étudiants souhaitant posséder tout ce qui était nécessaire pour résoudre le problème Délique et des problèmes d'une difficulté (ou facilité) semblable ([1]).

Ces propos étonneront même ceux qui ne connaissent des quatre livres que les résultats mentionnés par M. Cantor, notamment ceux du troisième livre. On y trouve, par exemple, le théorème très général que l'on appelle à présent le théorème de Newton (il était connu en partie par Archimède), et le théorème sur la polaire d'un point arbitrairement donné, tandis que les résolutions du problème Délique ne dépendent que des premières notions d'une parabole rapportée à son axe et son sommet et d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. C'est aussi un type de problèmes infiniment plus difficile, qu'Apollonius cite lui-même dans sa préface, en disant qu'il a donné les suppléments des théories antérieures indispensables pour compléter les résolutions des *problèmes à trois et à quatre droites*.

M. Cantor partage l'admiration de tout le monde pour le cin-

---

([1]) Afin de ne faire pas tort à M. Cantor, je rends ici verbalement ses propos étonnants que je n'ai pas su traduire verbalement : « So musste das IV. Buch... gleichmässige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluss er gewissermassen für solche Mathematik studirende bildete, welche von der damaligen höheren Mathematik grade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, nothwendig war (*Cantor, I*, 2e édition, p. 325).

quième livre d'Apollonius; mais le modeste but, atteint selon lui dans les livres précédents, le porte à exagérer l'admiration de cette continuation, et à y voir plutôt un contraste à l'autre Géométrie des anciens qu'un de ses plus beaux fruits. Il me semble aussi peu conséquent de la part de M. Cantor d'admirer dans le sixième livre la résolution d'un problème qu'il a négligé dans son analyse des résultats du premier livre.

Il faut convenir à M. Cantor qu'il a très bien évité de trouver [*hinein zu lesen* (1)] dans les coniques d'Apollonius quelque chose qu'Apollonius n'a pas dit, sagesse qu'il faut certainement apprécier beaucoup dans un manuel historique; mais nous ne comprenons guère ce qu'il dit de ses tentations à cet égard. Avant d'y venir, il aurait fallu s'occuper de beaucoup de choses que dit Apollonius et que M. Cantor a omises. Il aurait pu, par exemple, donner une idée plus complète des principes des démonstrations, et citer les trois derniers théorèmes du troisième livre qui contiennent de fait la démonstration qu'une conique quelconque est un *lieu à trois droites*. Et M. Cantor a tort en disant qu'il donne le contenu *nu* (*nackte Inhalt*) de l'Ouvrage d'Apollonius; en effet, ses remarques citées sur le but des quatre premiers livres en *voilent* les plus plus grandes beautés.

Quant aux autres travaux d'Apollonius, je me contente de noter avec plaisir que, dans la nouvelle édition, M. Cantor n'attribue plus au grand géomètre le péché capital (ce qu'il serait aux yeux des anciens) de résoudre le problème dit *section de raison* au moyen de coniques.

J'espère avoir dit assez pour montrer que M. Cantor n'ajoute pas à ses autres grands et incontestables mérites celui d'être assez bon interprète d'Archimède et d'Apollonius pour en rendre superflues d'autres interprétations, et qu'il n'a nullement fait voir les qualités nécessaires pour juger de la valeur historique et géométrique des autres interprétations.

(1) *Cantor I* (2e édition), p. 327.

## SUR UN PROBLÈME DE JACOBI;

Par M. J. MESTSCHERSKY.

Le Problème des trois corps peut être résolu en quadratures dans le cas où les corps se meuvent sur une même droite et où les actions mutuelles sont inversement proportionnelles aux cubes des distances.

C'est Jacobi qui a donné la solution du problème pour ce cas dans son Mémoire : *Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium* (¹).

Dans cette Note je vais montrer que le problème de Jacobi peut être résolu en quadratures, même dans le cas où, outre les forces mentionnées, sont appliquées aux points (aux corps) *des forces centrales d'attraction ou de répulsion proportionnelles aux masses et aux distances et dont le centre se trouve sur la même droite que les points mobiles.*

Ce problème plus général peut être réduit au problème de Jacobi.

Ayant pris le centre des forces proportionnelles aux distances pour origine des coordonnées, nous avons les équations différentielles du mouvement sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{n_1}{(x_1-x)^3} - \dfrac{n_2}{(x_2-x)^3} - kx, \\[2ex] \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{n_2}{(x_2-x_1)^3} + \dfrac{n}{(x-x_1)^3} - kx_1, \\[2ex] \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{n}{(x-x_2)^3} - \dfrac{n_1}{(x_1-x_2)^3} - kx_2, \end{cases}$$

où $n, n_1, n_2, k$ sont des constantes, $k > 0$ dans le cas d'attraction, $k < 0$ dans le cas de répulsion.

Introduisons les nouvelles variables $\xi, \xi_1, \xi_2, \tau$, en posant

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\xi}{\sqrt{a\tau^2+2b\tau+c}}, \qquad x_1 = \dfrac{\xi_1}{\sqrt{a\tau^2+2b\tau+c}}, \qquad x_2 = \dfrac{\xi_2}{\sqrt{a\tau^2+2b\tau+c}}. \\[2ex] dt = \dfrac{d\tau}{a\tau^2+2b\tau+c}, \end{cases}$$

où $a, b, c$ sont des constantes.

(¹) JACOBI, *Gesammelte Werke*, Bd. IV, p. 533-539.

Nous avons

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{a\tau^2 + 2b\tau + c}}\left[(a\tau + b)x - \frac{dx}{dt}\right],$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{1}{(a\tau^2 + 2b\tau + c)^{\frac{3}{2}}}\left[(ac - b^2)x - \frac{d^2x}{dt^2}\right].$$

Soit

(3) $$ac - b^2 = k;$$

alors, d'après les équations (1) et (2), nous avons les équations

(4) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \frac{n_1}{(\zeta_1 - \zeta)^3} + \frac{n_2}{(\zeta_2 - \zeta)^3}, \\ \frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} &= \frac{n_2}{(\zeta_2 - \zeta_1)^3} + \frac{n}{(\zeta - \zeta_1)^3}, \\ \frac{d^2\zeta_2}{d\tau^2} &= \frac{n}{(\zeta - \zeta_2)^3} + \frac{n_1}{(\zeta_1 - \zeta_2)^3}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (4) sont les équations différentielles du problème de Jacobi, dont les intégrales sont données dans le Mémoire cité.

Les coefficients $a$, $b$, $c$ n'étant liés que par une équation (3), la transformation (2) peut être simplifiée; par exemple, quand $k > 0$, on peut supposer

$$a = k, \qquad b = 0, \qquad c = 1,$$

quand $k < 0$

$$a = c = 0, \qquad b^2 = -k.$$

Il est évident que ce que nous avons dit sur le problème de Jacobi peut être appliqué à un système quelconque dont les points sont soumis aux actions mutuelles et aux forces émanant d'un centre fixe, quand les unes et les autres sont inversement proportionnelles aux cubes des distances : le cas où, outre ces forces, agissent encore des forces émanant du même centre et proportionnelles aux distances, se réduit à l'aide de la transformation analogue à (2), au cas où les forces proportionnelles aux distances n'existent pas.

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CREMONA (L.). — *Elements of Projective Geometry*. Translated by Franz Leudendorf. 2e édition. In-8°, 324 p. London, Frowde. 12 sh. 6 d.

ESCARY (J.). — *Mémoire sur le Problème des trois corps*. 2e édition. In-8°, 96 p. Foix, impr. Francal. 6 fr.

GYLDÉN (H.). — *Théorie analytique des orbites absolues de huit planètes principales*. T. I. In-4°. Stockholm, Beyer. 25 kr.

WILLIAMSON (B.). — *Introduction to the Mathematical Theory of the Stress and Strain of Elastic Solids*. In-8°. London, Longmans. 5 sh.

HÉRON D'ALEXANDRIE. — *Les Mécaniques, ou l'Élévateur*, de Héron d'Alexandrie. Publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ Ibn Lúgá et traduites en français par M. le baron Carra de Vaux. In-8°, 218 p. Paris, impr. nationale.

WAALS (J.-D. VAN DER). — *La continuité des états gazeux et liquides*. Traduit de l'allemand et annoté par MM. Dommer et Pomey. In-8°, XVI-280 p. Paris, Carré.

1re P. T

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MOLENBROEK (P). — ANWENDUNG DER QUATERNIONEN AUF DIE GEOMETRIE. 1 vol. in-8°, XV-257 p. Leiden, E.-J. Brill, 1893.

Cette *Application des quaternions à la Géométrie,* que publie aujourd'hui M. Molenbroek, est une suite naturelle et comme indispensable de la *Théorie des quaternions* du même auteur, dont on a rendu compte ici récemment et dont on a signalé le caractère purement abstrait. Le Volume que nous annonçons aujourd'hui contient six Chapitres.

Les deux premiers sont consacrés, pour la plus grande partie, à la Géométrie et à la Trigonométrie sphérique ainsi qu'à l'étude du point, du plan, de la droite dans l'espace : on y trouvera établis, par la méthode des quaternions, les formules fondamentales de Trigonométrie sphérique, l'expression de l'excès sphérique, quelques-unes des propositions les plus fondamentales de la théorie du triangle plan, puis les problèmes classiques concernant les points, plans et droites : intersections de plans et de droites, distances, etc. Le troisième Chapitre constitue une théorie des surfaces du second degré : pôles et plans polaires, plan tangent, normale, centre, axes, diamètres conjugués, intersection de deux surfaces, sections circulaires, surfaces homofocales, cubiques gauches.

Le quatrième et le cinquième Chapitre se rapportent à la théorie générale des surfaces et des courbes : plan tangent, normale, indicatrice, courbure et torsion, etc. Nous y signalerons, en particulier, les remarques de l'auteur concernant l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Le dernier Chapitre enfin contient une élégante exposition de la théorie des congruences de droite, au point de vue des éléments infinitésimaux du premier ordre. J. T.

CESARO (E.). — CORSO DI ANALISI ALGEBRICA CON INTRODUZIONE AL CALCOLO INFINITESIMALE. 1 vol. in-8°; Palerma, 1894.

M. Cesàro a d'étranges amis : ceux-ci, nous dit-il, lui conseillaient de ne point publier ce *Cours d'Analyse algébrique*. Si M. Cesàro était capable de faire un mauvais livre, et s'il avait des amis assez courageux pour le dissuader de publier ce livre indigne de lui, il faudrait sans doute l'en féliciter; mais quelle raison les amis de M. Cesàro pouvaient-ils bien avoir pour lui conseiller de ne pas publier ce cours, qui est excellent? Le jugeaient-ils trop élémentaire? Mais plus un livre est élémentaire, plus grand est le nombre de ceux à qui il rend service, et, d'ailleurs, la qualité d'un livre n'est pas nécessairement en raison inverse du nombre de lecteurs auxquels il s'adresse. Jugeait-on qu'il y a déjà trop de livres sur cette matière? Il y en a en France, et de très bons; il s'en publie encore en ce moment, et s'il était écrit en français, le livre de M. Cesàro ne me paraîtrait faire double emploi avec aucun d'eux.

Ce *Cours d'Analyse algébrique* ressemble beaucoup à nos Traités d'Algèbre pour la classe de Mathématiques spéciales. C'est, à peu de chose près, les mêmes matières, le même genre de démonstrations. Il s'adresse toutefois à des élèves un peu plus mûrs et il est composé avec une plus grande liberté d'esprit : chez nous, les auteurs sont nécessairement guidés ou gênés par les programmes d'admission aux grandes Écoles et par les traditions des examens; pourtant, cette liberté de composer, M. Cesàro se plaint de ne pas l'avoir eue aussi complète qu'il voudrait; il y a aussi, en Italie, des nécessités d'enseignement qui l'ont obligé à traiter des matières hétérogènes, à en laisser de côté d'autres, qu'il a eu quelque peine à s'interdire de toucher. Il ne désespère pas de publier un jour des *Istutizione analitiche* qui comprendraient en un tout bien organisé l'ensemble des matières que l'on enseigne dans les trois chaires d'*Algèbre*, de *Géométrie analytique* et de *Calcul*.

En attendant, c'est un livre très éclectique qu'il nous donne, et qui ouvre des jours sur des parties assez différentes de la Science. Je lui trouve un grand et difficile mérite : il est à la fois

très substantiel et très *modéré;* l'auteur a su se borner. On a dit, il y a longtemps, que c'était une condition nécessaire pour savoir écrire; elle exige, en tout cas, que celui qui compose domine de loin son sujet. Je crois inutile d'insister sur la rigueur et la simplicité des démonstrations; l'auteur est manifestement au courant de tous les petits progrès qui se réalisent jour par jour, grâce à l'effort incessant et à l'heureuse concurrence de tous ceux qui enseignent; il a su choisir parmi les meilleures démonstrations et souvent il les a améliorées. Il a apporté un très grand soin au choix des exercices, qui sont instructifs, élégants et intéressants; beaucoup roulent sur des propositions importantes; l'auteur n'a pas manqué alors de donner au lecteur des indications très suffisantes pour qu'il ne risque pas d'être arrêté. Plusieurs de ces exercices se rapportent à des propriétés arithmétiques et sont très propres à donner aux étudiants le goût de la science des nombres.

Voici, très sommairement, l'ordre suivi et les matières traitées par l'auteur.

Après avoir établi les propositions fondamentales sur les déterminants et les équations linéaires (p. 1-79), l'auteur traite des nombres irrationnels, des limites, des séries à simple et double entrée (p. 79-184); le sujet est traité avec grand soin; quelques propositions très intéressantes sur les limites m'ont paru nouvelles. Viennent ensuite les théories des fonctions d'une variable réelle, les dérivées, la série de Taylor et les applications classiques, puis l'étude de diverses séries (p. 184-291). Les notions sur la continuité et les dérivées sont établies avec autant de simplicité que de rigueur; signalons le paragraphe sur les *séries de fonctions* où l'on trouvera la notion de convergence uniforme, les conséquences qu'elle entraîne et l'exemple dû à M. Weierstrass d'une fonction continue, sans dérivée, la démonstration de la formule de Stirling, des propriétés des nombres de Bernoulli et d'Euler, la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. Les nombres imaginaires (p. 291-320) sont introduits en suivant la voie géométrique, mais l'auteur a soin de donner des indications suffisantes sur les autres voies que l'on peut suivre. Il développe les propositions fondamentales sur les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives d'une variable. Dans une douzaine de pages (321-333) M. Cesàro a résumé très clairement, de

la théorie des quaternions, tout ce qui est nécessaire pour y pénétrer et en comprendre les applications immédiates. La théorie des équations (p. 334-460) occupe presque tout le reste du volume. On remarquera les quelques pages consacrées aux fonctions entières des racines d'une équation qui sont susceptibles de prendre plusieurs valeurs quand on y permute ces racines : l'auteur dit là juste ce qui lui sera nécessaire pour établir à la fin l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations, au delà du quatrième degré. A propos des fonctions symétriques, on trouvera d'importantes indications sur les invariants des formes binaires. Les propositions relatives aux équations numériques, à la séparation et au calcul des racines sont développées avec les détails nécessaires. Enfin, deux Chapitres sont consacrés l'un au calcul des différences (p. 460-475), l'autre aux factorielles (p. 475-487) : ce dernier constitue une petite étude de la fonction Γ. Quelques notes terminent l'Ouvrage : l'une d'elles est consacrée au théorème de Staudt et Clausen sur les nombres de Bernoulli. M. Cesàro a dédié son livre à M. Hermite. J. T.

---

HEFFTER (L.). — Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. 1 vol. in-8°, XIV-258 p. Teubner, 1894.

La théorie des équations différentielles linéaires depuis 1865 date de la première publication de M. Fuchs, a été, comme on sait, l'objet de travaux très importants et qui intéressent des branches très diverses des Mathématiques. Ce n'est pas l'ensemble de ces travaux que M. Heffter a eu en vue en composant son intéressante *Introduction à la théorie des équations différentielles linéaires à une variable,* mais bien les fondements mêmes de cette théorie. Il a voulu reprendre, pour la simplifier et la rendre plus systématique, l'exposition des principes; il a mis dans cette exposition une large part de travail personnel, qui se fait jour dès les premières pages du livre.

C'est l'étude de la façon dont se comportent autour d'un point les intégrales d'une équation différentielle linéaire qui est l'objet propre de l'auteur.

Supposant cette équation écrite sous la forme normale

$$(1)\qquad P_0 x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1} x y' + P_n y = 0,$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_n$ représentent des séries entières en $x$ qui ne s'annulent pas toutes à la fois pour $x = 0$, l'auteur montre comment on peut satisfaire à cette équation par une série de la forme

$$\eta = \sum_{(k)} c_k x^k,$$

où $k$ prend les valeurs $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots$. Il trouve ainsi des équations récurrentes entre les coefficients $c$ et montre tout d'abord que l'exposant initial $\alpha$ doit vérifier l'*équation déterminante*. Le point $x = 0$ est un *point de détermination* de l'équation différentielle si l'équation déterminante est de degré $n$. Les racines de cette équation se séparent en *groupes*, chaque groupe étant formé de racines dont les différences mutuelles sont entières. Si $x = 0$ est un *point régulier* de l'équation, c'est-à-dire si celle-ci peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

où $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$ sont des séries entières en $x$ dont la première comporte un terme indépendant de $x$, l'équation déterminante a pour racines les nombres $0, 1, \ldots, n - 1$.

L'auteur forme ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série vérifiant l'équation différentielle, au moins formellement, corresponde à une racine de l'équation déterminante; ces conditions sont vérifiées au moins pour une racine de chaque groupe, elles le sont pour chaque racine dans le cas des points réguliers; si les séries existent, elles sont convergentes, au moins dans un certain domaine; c'est ce qui arrive en particulier pour les points réguliers. Ces points acquis, M. Heffter développe la notion du *système fondamental d'intégrales*, montre comment celles-ci peuvent se continuer analytiquement, comment elles se transforment quand on décrit un circuit fermé et parvient à la notion du *groupe de l'équation différentielle*.

Il étudie ensuite la forme des intégrales autour d'un point singulier de l'équation différentielle. On sait que le point $x = 0$ est tel pour l'équation différentielle supposée mise sous la forme (2)

quand la série $p_0$ est nulle pour $x = 0$. Il désigne sous le nom de fonction *qui se comporte d'une façon déterminée au point* $x = 0$ toute fonction qui peut, dans les environs de ce point, se mettre sous la forme

$$\Psi_0 + \Psi_1 \log x + \Psi_2 \log^2 x + \ldots + \Psi_n \log^n x,$$

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ étant, à un facteur près, de la forme $x^\rho$, des séries entières en $x$. En un point de détermination, aux groupes de racines correspondent des groupes d'intégrales qui admettent la forme précédente. Ces groupes se partagent en sous-groupes, tels qu'un élément appartenant à un sous-groupe reproduise, quand on décrit un circuit fermé autour d'un point de détermination, des combinaisons linéaires des éléments de ce sous-groupe. Si, d'ailleurs, les intégrales d'une équation différentielle linéaire se comportent d'une façon déterminée autour d'un point, ce point est un point de détermination, dans le sens précédent.

L'auteur passe ensuite à l'étude de l'équation fondamentale, c'est-à-dire à l'équation du degré $n$, toute pareille à celle qui se présente dans la théorie des inégalités séculaires, et dont les racines, quand elles sont toutes distinctes, sont les coefficients par lesquels se multiplient les éléments d'un certain système fondamental d'intégrales quand la variable décrit un circuit fermé. La recherche de ces coefficients dépend, si l'on veut, de la réduction simultanée de deux formes bilinéaires, en sorte que la théorie des diviseurs élémentaires de M. Weierstrass trouve ici son application. A chaque point de détermination correspond une équation fondamentale, dont les racines $\omega_\alpha$ sont liées aux racines $r_\alpha$ de l'équation déterminante par la relation

$$\omega_\alpha = e^{2r_\alpha \pi i} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

A des racines $r_\alpha$, $r_{\alpha'}$, $r_{\alpha''}$, ... qui forment un groupe de $k$ éléments, correspond une racine multiple $\omega_\alpha$, d'ordre $k$, et un groupe de $k$ intégrales; aux *diviseurs élémentaires* correspondent les *sous-groupes*. Cette théorie s'étend d'ailleurs en partie au cas où la variable décrit un circuit fermé quelconque, puisque, à un pareil circuit, correspond encore une équation fondamentale.

En un point d'indétermination, certaines intégrales peuvent cependant se comporter d'une façon déterminée. L'étude de ce cas

se relie à la question de la *réductibilité* des équations différentielles linéaires. L'auteur consacre à ce sujet quelques pages intéressantes, où il expose les résultats obtenus par M. Frobenius. Un Chapitre particulier est consacré à la façon dont se comportent les intégrales à l'infini. Enfin les dernières pages de son livre se rapportent à la classe d'équations différentielles linéaires auxquelles est attaché le nom de M. Fuchs, et dont l'équation de la série hypergéométrique constitue l'exemple le plus simple. Quelques propositions, dont la démonstration aurait gêné la suite des idées, sont réunies et établies dans un appendice.

---

# MÉLANGES.

## RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

Le présent Rapport est une traduction abrégée de celui que publia le professeur Fr. Meyer, en 1892, dans le tome I du *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*. Cependant, les indications bibliographiques qui font précisément la richesse du Mémoire allemand sont restées les mêmes; les réductions n'ont été effectuées que sur les comptes rendus de certains travaux bien connus aujourd'hui et dont on peut d'ailleurs retrouver l'analyse dans le *Bulletin*. Si certains passages ont été réduits, nous croyons cependant avoir conservé le caractère que M. Meyer a donné à son Ouvrage. Toutefois, nous nous sommes permis d'ajouter çà et là des Notes concernant particulièrement les publications parues en France.

Ce travail, écrit M. Meyer, est loin d'être complet. En première ligne, on trouvera que la critique nécessaire y fait défaut. Mais je crois rendre un plus grand service au public mathématicien en exposant d'une façon impersonnelle ce que les différents savants ont produit qu'en indiquant ce qu'ils auraient dû produire. De plus, j'ai surtout cherché à faire ressortir

les lacunes dans nos connaissances actuelles, soit par l'enchaînement des matières, soit sous forme de questions.

Malgré le temps considérable que j'ai consacré aux renseignements bibliographiques, je ne prétends pas que ces derniers soient complets; seule l'abondance de la matière peut m'excuser. En particulier, un certain nombre de Mémoires publiés récemment ne m'ont pas été accessibles.

Le travail de ce modeste savant n'en constitue pas moins un exposé fort consciencieux de l'état actuel de la théorie des invariants algébriques.

Voici l'ordre adopté pour ce Rapport :

*Introduction.*

Coup d'œil rétrospectif sur l'ancienne période de 1841-1867. — Passage à la nouvelle période de 1868 au temps présent. — Délimitation du sujet. — Développement par degré de la notion de l'invariance.

Première Partie. — *Équivalence des formes.*

A. Formes quadratiques et bilinéaires.
B. Autres formes.

Deuxième Partie. — *Affinité des formes.*

A. Systèmes finis.
B. Irrationnalité des formes.
C. Méthodique. Opérations symboliques et invariantes.
D. Sur certains groupes de substitutions et sur certaines formes spéciales.

Il sera également tenu compte des travaux les plus importants parus au cours de ces deux dernières années. H. F.

Paris, juillet 1894.

---

## INTRODUCTION.

### COUP D'ŒIL RÉTROSPECTIF (¹) SUR L'ANCIENNE PÉRIODE 1841 A 1867.

La théorie des invariants vient de franchir son vingt-cinquième

(¹) Les renvois bibliographiques qui se rapportent au traité de Salmon, *Modern higher Algebra* (4ᵉ édition, Dublin; 1885), ouvrage traduit en allemand par Fiedler (2ᵉ édition, Leipzig; 1877) et en français (2ᵉ édition, Paris; 1890) par O. Chemin, porteront respectivement la mention *Salmon, Salmon-Fiedler, Salmon-Chemin*. Faà de Bruno, dans sa *Théorie des formes binaires* (Turin-Paris, 1876) présente un ensemble de renseignements bibliographiques relatifs à cette théorie. L'édition allemande de cet Ouvrage est due aux soins de Walter et de Noether (Leipzig, 1881). Cité suivant *Bruno* ou *Bruno, édition allemande*.

anniversaire. Cependant ses origines remontent à des temps plus anciens : rappelons simplement, d'une part, la théorie des formes quadratiques binaires et ternaires et à coefficients entiers, fondée par Lagrange et Gauss [1], d'autre part, la Géométrie projective [2] créée par Poncelet et développée par Chasles, Möbius, Plücker et Steiner.

Cependant, on ne fait partir la théorie proprement dite que du Mémoire de Boole [3] (*nov.* 1841) dans lequel le savant professeur anglais, non seulement démontre que la propriété d'invariance appartient aux discriminants en général, mais où il indique encore comment on peut former des invariants simultanés d'un système de formes.

Peu après, en février 1842, Boole [4] montre que les polaires d'une forme $f$ donnent naissance à une classe étendue de cova-

---

(1) Lagrange, *Mémoires de Berlin*, p. 265; 1773. — Gauss, dans ses *Disquisitiones arithm.* (1801) démontre l'invariance des discriminants des formes binaires et ternaires. *Consulter* Salmon, p. 343 et 344 (édition française, p. 491 et 492).

D'après Gordan (*Math. Ann.*, VII, p. 38), on trouve les germes de la représentation symbolique dans les travaux de Cauchy, Boole, Pfaff, Jacobi; le calcul des variations présente aussi certaines analogies (*l. c.*, p. 37).

Le théorème de la multiplication des déterminants, établi dans toute sa généralité par Cauchy, peut facilement être considéré comme un exemple présentant le caractère d'invariance d'un covariant appelé de nos jours *covariant identique*. Ce sont ces considérations qui forment précisément le point de départ des travaux de Cayley.

Dans cette période qui précède la théorie des invariants, il faut encore signaler la décomposition des formes quadratiques en sommes de carrés (Lagrange, Laplace, Cauchy, Lebesgue, Jacobi). Consulter à ce sujet le traité de Baltzer *Determinantentheorie* (5e édition, Leipzig, 1881), traduction française par Hoüel (Paris, 1861). Enfin il faut y joindre une série de théorèmes de Joachimsthal sur les discriminants, la série de Taylor, etc., ainsi que quelques exemples d'*invariants différentiels* que l'on trouve dans Cauchy.

(2) Les deux directions principales que nous prenons en considération ici se rapportent, l'une au rôle que joue le rapport anharmonique comme invariant absolu (irrationnel), l'autre à la théorie des polaires réciproques. Clebsch, dans sa *Biographie de Pluecker* (*Göttingerabh.*, XVI, p. 1-32) rend hommage à ces géomètres pour les services qu'ils ont rendus à l'Algèbre.

(3) *Cambr. Math. Journ.*, III, p. 1-20. — Boole généralise les transformations orthogonales des formes quadratiques. *Voir* les compléments dans le tome IV (nov. 1844), p. 167-171. — Il est bon de remarquer qu'en 1841 parut aussi le Mémoire de Jacobi sur les déterminants fonctionnels (*Journ. für Math.*, XXII, p. 319-359).

(4) *Cambr. Math. Journ.*, III, p. 106-119. — Boole étend les résultats de son premier Mémoire au cas de plus de deux formes, ces formes pouvant être d'ordre

riants, c'est-à-dire de formes invariantes contenant, outre les coefficients de $f$ (et ceux des formes linéaires auxiliaires), encore les variables.

Cayley (¹) s'engagea dans cette nouvelle voie et établit immédiatement une méthode symbolique lui permettant de déduire d'une forme unique un nombre quelconque d'invariants. Il donna à sa méthode le nom de *calcul des hyperdéterminants*.

« C'est de cette découverte de Cayley, écrit Salmon (²), que date la naissance de l'Algèbre moderne. »

Peu de temps avant (1844) Eisenstein (³) avait déjà reconnu

---

différent. En effectuant sur les formes proposées des différentiations totales, il ramène le problème à l'équivalence de formes différentielles de même ordre, mais le moins élevé posssible. Toutefois le rapporteur ne peut pas se rallier à l'opinion de Salmon (p. 344; édition française, p. 493) d'après lequel Boole ait, par ceci, fondé le principe que les invariants des polaires sont des covariants de la forme primitive.

(¹) *Collected Math. Papers,* vol. I, p. 80-94, 95-112. — Le second de ces Mémoires parut en 1846. — Dans le premier Mémoire (p. 80-94), la méthode se trouve développée à ce point que l'on peut reconnaître que toute forme binaire d'ordre pair possède un invariant quadratique. Pour terminer, l'auteur attribue à Boole le mérite d'avoir découvert le premier invariant cubique d'une forme biquadratique. *Cf.* Salmon, p. 343 (édition française, p. 492). *Voir* aussi plus bas la Note sur Eisenstein.

Les déterminants à plusieurs dimensions se trouvent déjà introduits par Cayley en 1843 (*l. c.*, p. 63-79, seconde Partie); les abréviations adoptées forment ici une première espèce de représentation symbolique. Plus récemment, Escherich (*Wien. Denkschrift,* XLIII, 1880), Gegenbauer (même recueil, XLIII, p. 15-32, 1881) et Zajaczkowski (Varsovie, 1881) ont encore appliqué à la formation des invariants les déterminants à plusieurs dimensions examinés par Gasparis, Armenante, Padova, Zehfuss et d'autres.

Le second Mémoire présente de réels progrès. *Comparer* Salmon, Lesson 14. *L'idée fondamentale est que l'on peut concevoir le déterminant fonctionnel de n fonctions à n variables, comme étant le résultat d'une opération différentielle effectuée sur une* SEULE *fonction, à savoir le produit de ces n fonctions écrite chacune au moyen d'une série différente de variables.*

La méthode symbolique qui en résulte n'est effectivement qu'une abréviation dans la représentation d'opérations *réelles*. Il en est autrement plus tard dans les travaux de Gordan, qui a étendu ce procédé aux formes symboliques. L'opération différentielle de Cayley, appelée par les Allemands Ω-*Process*, est devenue de nos jours d'une grande importance (*Cf.*, II, C. b. du présent Rapport).

(²) Salmon, p. 343 (édition française, p. 492).

(³) *Journ. für Math.,* XXVII. — Le covariant quadratique et le discriminant d'une forme binaire cubique figurent déjà dans la Note, p. 75-79, datée de dé-

les invariants et les covariants les plus simples des formes binaires cubiques et biquadratiques; en appliquant d'une façon élégante la théorie des déterminants, qui venait d'être complétée par Jacobi, Hesse ([1]) fit une étude approfondie du covariant qui porte son nom, et découvrit le rôle que joue celui-ci dans la théorie des courbes planes, en particulier celle du troisième ordre.

Il est important de rappeler que, dans le courant de cette même année (1844), Grassmann ([2]) présenta la théorie à laquelle il a donné le nom de *Ausdehnungslehre*. Les idées sur la notation au moyen de crochets (*Lückenausdrücke*) et sur les coordonnées de plusieurs espèces renferment le germe de la nouvelle forme qu'a prise la théorie des invariants.

Indirectement, la théorie de Galois ([3]) sur le groupe d'une équation a aussi exercé une certaine influence.

Si Aronhold ([4]) est le premier qui ait déterminé les invariants des

---

cembre 1843; comparer à cela son travail (p. 82-104) portant également la date de décembre 1843; les deux invariantes $i$, $j$ de la forme biquadratique se trouvent dans la Note connue *Sur la résolution des équations des quatre premiers degrés* (p. 81-83, 1er janvier 1844). Cependant Salmon (p. 343, édit. fr., p. 492) conteste que la propriété de l'invariance de ces fonctions ait été connue par Eisenstein. Celui-ci, pourtant, à la fin du dernier travail cité, annonce précisément une prochaine Note sur *les propriétés très remarquables de ces fonctions homogènes et leurs transformations*. Cette Note parut en effet dans le même volume, p. 319-321, où l'auteur attribue, d'une façon bien précise, la propriété de l'invariance aux *deux* covariants et au discriminant de la forme cubique.

Mais il est bien reconnu que c'est Boole, le premier, qui ait exprimé le discriminant de la forme biquadratique en fonction des deux invariants $i$ et $j$ (Cayley, I, p. 94; Salmon, p. 343).

([1]) *Journ. für Math.*, XXVIII, p. 68-107.

([2]) Les mérites de Grassmann se trouvent exposés dans sa biographie écrite par Sturm dans les *Math. Ann.*, XIV (*voir* en part. p. 25). Consulter aussi les *Math. Ann.*, VII, p. 12. Schlegel a publié un *Traité d'Algèbre* d'après les idées de Grassmann (Leipzig, 1875); un même essai a été fait par Schendel (Halle, 1885). Ces deux Ouvrages contiennent cependant des erreurs.

En France, les avantages de la méthode de Grassmann ont été signalés (1869) par Cremona dans les *Nouv. Ann.*, (1), XIX, p. 356-361. Tout récemment les bases de cette théorie ont été exposées avec beaucoup de clarté par Carvallo : *B. Soc. Math.*, t. XV, p. 158; *Nouv. Ann.* (3), t. X; 1891; p. 219-225, p. 341-345 et t. XI, p. 8-37. *Voir* aussi Caspari, dans le *Bulletin*, p. 202-240; 1889. H. F.

([3]) Les recherches de Galois, publiées déjà en 1829 ne sont cependant devenues généralement accessibles qu'en 1846 (Liouville, XI). D'ailleurs leur influence sur la théorie des invariants ne s'est fait sentir que dans une période plus récente.

([4]) *Journ. für Math.*, XXXIX, p. 140-159. — Deux ans plus tard, Aronhold

formes cubiques ternaires et leur rapport au discriminant (1849), nous trouvons déjà dans la série des publications de Sylvester [1] de 1851 à 1854, les bases d'une théorie générale renfermant les branches les plus diverses de cette partie de la Science.

En introduisant, dans un but bien déterminé, à côté des variables primitives, celles qui sont transformées par la substitution inverse, on a créé l'étude des contrevariants et des concomitants. Il en résulte une série de nouvelles opérations permettant de calculer des formes invariantes, en particulier le principe [2] de la différentiation réciproque (symbolique et non symbolique).

De plus Sylvester établit les bases (1851) de l'étude des formes

---

remit à la Faculté de Philosophie de Kœnigsberg un manuscrit qui n'a jamais été publié, dans lequel la théorie des invariants était exposée d'après une base uniforme. D'après sa correspondance avec Cayley, Aronhold devait, déjà à ce moment-là, être en possession d'équations différentielles vérifiées par les invariants. *Cf.* Salmon, p. 344, édit. franç., p. 494.

(1) *Cambr. and Dublin Math. J.*, VI, p. 186-200, 289-293; 1851; t. VII, p. 52-97; 1852; t. VIII, p. 62-64, 256-269; 1853; t. IX, p. 85-103; 1854; *cf.* Cayley, t. VII, 40-51, 97-98.

Les travaux de Sylvester ont été précédés de deux Mémoires de Boole, t. VI, p. 87-106, 107-113; 1851, dans lesquels l'auteur résume les résultats obtenus précédemment, en les complétant par quelques propositions nouvelles (*cf.* Salmon, 343).

C'est dans les Mémoires de Sylvester que l'on trouve pour la première fois les noms de *invariants, covariants, concomitants,* t. VI, p. 290; les expressions *congrédient, contragrédient,* t. VII, p. 53; *discriminant* (*Phil. Mag.*, p. 406; 1851; *combinant,* t. VIII, p. 63).

Une classe spéciale de contrevariants, les *formes adjointes,* se rencontrent déjà dans les travaux de Hermite, *Journ. für Math.*, XL, p. 263; 1851. Sylvester les nomme *évectants,* t. VII, p. 181.

(2) Il résulte du fait que $x_i$ et $\frac{\partial}{\partial u_i}$ sont congrédients, c'est-à-dire soumis aux mêmes substitutions; que si l'on remplace les variables $x$ d'une forme $f(x)$ par les dérivées par rapport aux $u_i$ d'une forme $\varphi(u)$, on obtient un contrevariant simultané de $f$ et $\varphi$ (t. VII, p. 194). De plus, puisque les puissances et les produits $x_1^n, x_1^{n-1}, x_2, \ldots$ sont aussi congrédients à $\frac{\partial^n}{\partial u_1^n}, \frac{\partial^n}{\partial u_1^{n-1}\partial u_2}, \cdots$, on pourra encore effectuer cette substitution dans une forme $f(x)$ d'ordre $n$ (t. VI, p. 96-179). *Cf.* Salmon, p. 346, édit. franç., p. 427. Le contrevariant obtenu de cette façon a été appelé plus tard par Gordan : $n^{te}$ *Ueberschiebung von f über* $\varphi$.

Jordan traduit ce terme par l'expression de *composé de f avec* $\varphi$ en désignant le mode de formation par *composition des covariants* (*Journ. de Math.*, (3), t. II, p. 178; 1876. Cayley et Salmon emploient les termes de *transvectants* et de *transvection,* expressions que l'on retrouve dans Salmon-Chemin, p. 459. H. F.

canoniques (¹) et en fait l'application à la représentation des formes binaires d'ordre impair (spécialement des quintiques) par une somme de puissances. Dans le cas important des formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables, il ouvre de nouvelles voies de recherches en formulant la *loi d'inertie* (²).

Dans ses travaux, l'auteur anglais reconnaît déjà l'importance du principe (³) des *diviseurs élémentaires* (1851), comme celle de la notion du combinant (1853) (⁴).

Il établit les équations différentielles auxquelles satisfont les formations invariantes de formes *quelconques*, en faisant usage d'une méthode de *transformations infinitésimales* (1852) (⁵).

Des progrès rapides accomplis dans cette partie de la Science, il est résulté une terminologie assez étendue, que l'on doit, en grande partie, à Sylvester et qui se trouve exposée par ce géomètre dans son grand Mémoire (⁶) sur les fonctions de Sturm (1853).

L'année 1854, avec laquelle se termine cette première série de travaux de Sylvester, doit être considérée comme l'une des plus mportantes de cette première période. Elle est surtout marquée

---

(¹) *Phil. Mag.*, p. 391-410; nov. 1851, tirage à part chez Bell, Londres, 1851. Comparer *Cambr. and Dublin Math. J.*, t. VI, p. 193, 194, 198, 293; à la page 123, l'auteur indique que le terme de *forme canonique* est dû à Hermite. La représentation de la forme cubique quaternaire en une somme de cinq cubes est indiquée pour la première fois à la p. 199 du *Cambr. and Dublin Math. J.*, VI. *Voir* les citations dans la biographie de Clebsch, *Math. Ann.*, VII, p. 17.

(²) *Phil. Mag.*, 1852, II, p. 138; *Phil. Trans.*, 1853, p. 407-548. — D'après Borchardt (*Journ. für Math.*, LIII, p. 275-283; 1857), Jacobi devait déjà, en 1847, connaître le principe en question. Consulter la démonstration de Hermite, même Recueil, p. 271, et Salmon-Fiedler, p. 471. Dans les *Phil. Trans.*, 1853 (*l. c.*), Sylvester applique la loi de l'inertie au *bézoutien*, et en tire une discussion pour la réalité des racines de $f = 0$. *Voir* Salmon-Chemin, 491; Hermite, *C. R.*, 1852, II; *Journ. für Math.*, LII, p. 39-51; 1856; Sylvester, *Phil. Mag.* (4), IV, p. 138; Jacobi (1847), voir *Journ. für Math.*, LIII, p. 275-280; 1857.

(³) *Phil. Mag.*, p. 119-140, mai 1851; applications aux coniques et aux quadriques. Sylvester examine, à l'aide de ce principe, le problème de l'équivalence des formes quadratiques, *Phil. Mag.*, p. 265-305; avril 1851; p. 415, mai 1851.

(⁴) *Cambr. and Dublin Math. J.*, VIII, p. 63. Dans les *Annali di Mat.* [(1) I, p. 344-348; 1858] Betti a donné pour les combinants un système d'équations différentielles *caractéristiques*.

(⁵) *Voir* plus haut la Note sur Aronhold p. 183, note (⁴). Salmon, p. 344 (édit. franç., 494).

(⁶) *Phil. Trans.*, p. 543-548; 1853. — Dans les *Papers*, IV, p. 594-608 (Extrait de l'*Encycl. Brit.*; 1860), Cayley donne l'explication des principaux nouveaux termes.

par les travaux si importants d'Hermite, qui d'ailleurs, déjà en 1851, avait enrichi la théorie par l'introduction de la notion des *évectants* (¹) et qui, par ses belles recherches sur la théorie des nombres avait semé de nombreux germes (²) pour l'étude de la théorie des formes.

Hermite établit la *loi de réciprocité* (³), en vertu de laquelle dans le champ binaire, les formes invariantes se rangent d'une façon remarquable par couples.

En choisissant, dans le cas des formes binaires d'ordre impair, comme nouvelles variables deux covariants linéaires, il ramène celles-là à la *forme-type* dans laquelle les coefficients sont eux-mêmes des invariants.

En relation étroite avec ce qui précède, se trouvent les systèmes de *formes associées;* toute autre formation invariante de la forme primitive est une *fonction rationnelle* de ces formes associées (⁴).

L'étude des formes du cinquième ordre offre à Hermite le premier exemple d'un *invariant gauche* (⁵). Il en donne l'expression en fonction des trois autres invariants et en fait une belle application à la discussion de la réalité des racines de l'équation du cinquième degré (*l. c.*, p. 198 et suivantes) (⁶).

Dans un travail subséquent (⁷) publié aussi en 1854, cet illustre savant, partant encore d'abord d'une question de la théorie des nombres, traite le problème de transformer une forme quadratique ternaire en elle-même au moyen d'une substitution linéaire

---

(¹) *Journ. für Math.*, XL, p. 263. *Cambr. and Dublin Math. J.*, VI, p. 292.

(²) *Journ. für Math.*, XL et XLI; 1850, 1851.

(³) *Cambr. and Dublin Math. J.* IX, p. 172-217, *voir* en part. p. 173-175. L'extension au cas de plus de deux variables a été examiné seulement récemment par Deruyts, *Belg. Bull.*, (3), XXII, p. 11-23; 1891; mais tandis que cette extension ne réussit que pour des formes spéciales, Hurwitz vient d'en donner une autre tout à fait générale (*Math. Ann.*, XLV, p. 381-404; 1894); ce travail jette aussi une nouvelle lumière sur les autres opérations différentielles.

(⁴) *Journ. für Math.*, LII, p. 1-38. Le terme de *covariants associés* se trouve introduit, p. 23.

(⁵) *Cambr. and Dublin Math. J.*, IX, p. 186 et suivantes. — Le rôle que joue cet invariant dans la résolution des équations du cinquième degré, a été développé par Hermite dans le *Journ. für Math.*, t. LIX, p. 304-305.

(⁶) Plus tard, Hermite en a encore donné un exposé dans les *Comptes rendus;* 1865, 1866, *voir* aussi sa Note dans *Salmon-Chemin*, p. 557-567.

(⁷) *Cambr. and Dublin Math. J.*, IX, p. 63-67. — *Comparer* Brioschi, *Journ. für Math.*, LII, p. 133-141; 1856.

effectuée sur les variables. Les coefficients de cette substitution sont exprimés en fonction d'un certain nombre de paramètres arbitraires. Cette question avait déjà été entièrement résolue, en 1846, par Cayley (¹) dans le cas particulier important d'une somme de carrés. Par contre, Cayley étendit les résultats d'Hermite aux formes quadratiques à $n$ variables (²) (1855).

Dans une autre voie, l'année 1854 nous a encore laissé des travaux importants. D'une part, Cayley donne une démonstration (³) des équations différentielles (citées plus haut) satisfaites par les invariants des formes binaires considérés comme fonctions des coefficients, tandis que, de son côté, Brioschi (⁴) établit les équations correspondantes par rapport aux racines de ces formes.

Enfin, c'est avec l'année 1854 que commence la série des travaux de Cayley (⁵), *Memoirs upon Quantics*, se terminant provisoirement en 1861 par le VIIᵉ Mémoire. Leur diversité, jointe à la façon complète dont sont traités certains cas, constitue, encore de nos jours, une source féconde de recherches pour l'algébriste comme pour le géomètre.

Cayley considère les formations invariantes des formes binaires comme solutions entières et rationnelles de leurs équations différentielles. Dans son second Mémoire (1856) il aborde déjà le problème important (⁶), à savoir : peut-on, pour une forme donnée, déterminer *a priori* le nombre des formes invariantes linéairement indépendantes, qui lui correspondent. Il obtient, en effet, ce nombre, étant donnés l'ordre et le degré de ces formes, au moyen

---

(¹) *Journ. für Math.*, XXXII, p. 119-123.

(²) *Journ. für Math.*, L, p. 288-299.

(³) *Journ. für Math.*, XLVII, p. 109-124.

(⁴) *Annali di Tortolini*, V, p. 207-211, en part. 209. *Comparer* Betti, *Annali di Mat.*, (1), I, p. 129-134; 1858. Dans le même journal (t. IX, p. 82; 1859) Brioschi donne une démonstration rigoureuse de l'équation différentielle de Cayley pour le cas des invariants des formes binaires et dans les *Annali di Mat.*, (1), I, p. 160, pour les formes à $n$ variables.

(⁵) Les six premiers Mémoires se trouvent dans le t. II des *Coll. Pap.*, p. 221-234, 1854; p. 250-275, 1856; p. 310-335, 1856; p. 513-526, 1858; p. 527-557, 1858; 561-599, 1859. — Le mot *quantic* correspond au mot français *forme* (allem. Form), voir *Salmon-Chemin*, p. 143.

*Consulter* aussi les notes critiques et bibliographiques que Cayley ajoute lui-même dans la nouvelle édition.

(⁶) Cayley prend comme point de départ les notions de covariants *asyzygétiques* et *irréductibles*, p. 2-50.

des coefficients du développement de la *fonction génératrice* (¹), qui avait déjà servi à Euler pour la décomposition des nombres. Il est vrai que cette série est basée sur une formule numérative, non entièrement démontrée.

Ce travail seul de Cayley a donné lieu à une foule de recherches qui ont été poursuivies jusqu'en ces derniers temps (*voir* dans ce Rapport, IIe Partie, A. c.).

Cependant, Cayley ne put réussir à achever d'une manière générale le problème si important posé par lui pour la première fois, et qui consiste à réduire la série illimitée des formations invariantes d'une forme binaire donnée, à des fonctions entières et rationnelles d'un nombre *fini* d'entre elles (²).

Le IVe Mémoire (1858) contient, au moins pour des cas particuliers, le principe fondamental de la composition de deux formes (*voir* p. 517). L'auteur en donne une expression simple, non symbolique qui, ces dernières années, a de nouveau pris une place importante.

La résolution (³) élégante des équations du troisième et du quatrième degré, basée sur la théorie des invariants, donna au développement de cette théorie encore si jeune une sérieuse impulsion (1858). Les applications des méthodes algébriques des formes binaires à la Géométrie (⁴) moderne exercèrent aussi quelque influence.

---

(¹) La fonction génératrice est mise sous la forme, p. 260,

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^nz)};$$

lorsqu'on la transforme convenablement, elle donne encore le nombre des covariants irréductibles.

La démonstration du théorème relatif au nombre des covariants asyzygétiques d'ordre $\mu$, a été complétée beaucoup plus tard par Sylvester (*Phil. Mag.*; 1878).

(²) *Voir* son Mémoire, p. 252, 253, 268, 270.

(³) *Ve Mémoire*. Cette résolution résulte directement des syzygies appartenant aux formes cubiques et biquadratiques. D'ailleurs il faut aussi tenir compte des travaux préliminaires de Boole (*Cambr. Math. J.*, III, p. 116), de Eisenstein (*Journ. für Math.*, t. XXVII, p. 89), de Hesse (*Journ. für Math.*, XXXVIII, p. 262) et de Sylvester (*Cambr. and Dublin Math. J.*, VI).

Cependant l'importance de cette méthode de résolution a été beaucoup exagérée : la théorie des formes ne fournit réellement la partie intégrale du problème que si l'on considère, comme l'a fait Klein, le groupe appartenant à l'équation comme un groupe de collinéation dans un espace d'ordre supérieur.

(⁴) Cette partie a été exposée avec beaucoup de détails par Fiedler (Leipzig, 1862).

En particulier, il est reconnu que les travaux de Cayley (VIe Mémoire, 1859) sur la détermination métrique projective pour l'espace à deux et à trois dimensions, ont servi plus tard de base au développement de la Géométrie non euclidienne ([1]).

A ces travaux systématiques se rattachent encore d'autres Mémoires du même auteur. Nous nous bornerons à les mentionner : recherches sur la partition des nombres ([2]) (1855-1856); un Mémoire important sur les fonctions symétriques ([3]) (1857) avec les règles relatives à leur poids et à leur degré, travail qui peut être considéré comme une introduction à la théorie des péninvariants développée plus tard; de plus, la transformation ([4]) féconde de la méthode d'élimination de Bézout (1857) et l'extension au cas des formes binaires ([5]) d'ordre pair de la méthode canonisante de Sylvester (1857).

Dans cette même direction se place immédiatement la découverte importante de Roberts ([6]) (1861), d'après laquelle un covariant (binaire) est entièrement caractérisé par son terme principal qu'il a appelé *source* (leading term, Leitglied). Cette remarque permet de remplacer toute relation (syzygie) entre covariants par la même relation entre les sources et réciproquement.

La source, de même que les invariants, est une fonction symétrique des racines, mais ne doit vérifier essentiellement qu'une seule équation différentielle. Roberts a étudié en détail l'application de sa méthode aux formes binaires du cinquième ordre ([7]).

Abordons encore, autant qu'il peut en être question, ce qui est relatif aux formes précitées et aux équations du cinquième ordre pendant cette période (1854-1861).

---

([1]) C'est à Klein que revient le mérite d'avoir reconnu le premier l'importance fondamentale des résultats de Cayley; voir *Math. Ann.*, t. IV et VI.

([2]) *Papers*, t. II, p. 235-249 (1855), 47-52 (1858). *Voir* en particulier : Sylvester, *Quart. Math. J.*, I, p. 141-152 (1855, juillet), ainsi que Brioschi et Sylvester dans les *Annali di Tor.*, t. VIII (1857), Bellavitis dans les *Annali di Mat.*, t. II (1859), Bruno dans le *Journ. für Math.*, t. LXXXV et les *Math. Ann.*, t. XIV. Bellavitis donne un aperçu bibliographique. Consulter aussi Hagen : *Synopsis der höheren Mathematik*, Berlin, 1891, p. 3.

([3]) *Papers*, t. II, p. 417-439. *Cf.* p. 454-464.

([4]) *Journal für Math.*, t. LIII, p. 366-367, ou *Papers*, t. IV, p. 38-39.

([5]) *Journal für Math.*, t. LIV, p. 48-58 et p. 292, ou *Papers*, t. IV, p. 43-53.

([6]) *Quart. Journ.*, t. IV (1861), p. 168-178, 324-328.

([7]) *Annali di Mat.*, (1), t. III, p. 340-344; 1860.

C'est encore ici Hermite qui trace les nouvelles voies suivies, après lui, par Brioschi et Cayley. Déjà en 1856 Hermite se sert d'une transformation rationnelle des variables dans laquelle le numérateur est un covariant du dénominateur, pour réduire l'intégrale elliptique de première espèce à une forme normale (1); deux ans plus tard ce même savant ramène la transformation de Tschirnhausen, depuis longtemps en usage en Algèbre, à une forme invariante (2) générale, de façon à mettre en évidence le caractère d'invariance de l'équation transformée qui, de plus, doit dépendre d'un nombre de paramètres le moindre possible.

La détermination des différentes résolvantes d'une équation proposée devient alors évidente. Dans le cas du cinquième ordre, ces résolvantes sont, comme l'on sait, l'équation modulaire et celle du multiplicateur, qui se présentent dans la transformation du cinquième ordre des fonctions elliptiques (3).

Mais ce ne fut que plus tard (4), qu'Hermite présenta à ce point de vue un exposé systématique des équations du cinquième ordre (1865 à 1866).

Aux trois éminents savants Cayley, Sylvester et Hermite, que nous avons le plus souvent cités jusqu'ici, vient se joindre, à partir de 1854, l'Italien Brioschi (5), sans cependant les égaler; il compléta et continua leurs recherches dans les directions les plus diverses. Mentionnons ses travaux les plus importants. En 1867, il établit, pour le résultant et le discriminant des formes binaires, le système remarquable d'équations différentielles (6), dont on a fait, tout récemment, une application dans la théorie des fonctions hyperelliptiques (7).

(1) *Journ. für Math.*, t. LII, p. 8. *Voir* Brioschi dans les *Annali di Mat.*, (1), t. IV, p. 192 (1861) et Pittarelli, *Rom. Acc. L. R.*, (4), t. IV, p. 509-513, 703-705; 1888.

(2) *Comptes rendus*, t. XLVI, p. 961 (1858). Cayley, *Journ. für Math.*, t. LVIII, p. 259 (1861) ou *Papers*, t. IV, p. 259-269.

(3) Consulter par exemple Clebsch, *Binaere Formen*, §§ 114, 115.

(4) *Comptes rendus*, 1863, 1864.

(5) Consulter principalement son exposé général d'une théorie des formes binaires dans les *Annali di Mat.*, 1re série, t. I, p. 296-309, 349-362 (1858); t. II, p. 82-85, 265-277 (1859); t. III, p. 160-168 (1860); t. VI, p. 186-194 (1861). — Le tirage à part, publié à Rome en 1861, est épuisé.

(6) *Journ. für Math.*, t. LIII, p. 372-376. *Voir* une Note de Noether, dans l'édition allemande de *Bruno*, § 25.

(7) *Voir* Wiltheiss, *Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 279; 1888.

On doit encore à Brioschi une extension de la théorie de la représentation typique (1), d'après Hermite, tout particulièrement en ce qui concerne les formes ternaires.

Si nous prenons en considération le développement remarquable pris peu à peu par les résultats isolés de notre théorie, nous devons être d'autant plus reconnaissant à Salmon, qui, déjà auparavant (2), avait fourni des travaux remarquables en Algèbre comme en Géométrie, d'avoir réuni ce vaste matériel en une monographie (3) serrée (1859). Cet Ouvrage s'est répandu en Allemagne (1863), grâce à la traduction (4) entreprise par Fiedler, qui d'ailleurs, déjà en 1862, avait publié un Traité élémentaire (5) accordant une large place aux applications de la théorie de Cayley à la Géométrie projective. A la même époque, Brioschi (6) donna un travail d'ensemble sur la théorie des formes binaires, qui rencontra en Italie de nombreux adeptes. En France, ce fut Bazin qui contribua, par sa traduction (7) de l'Ouvrage de Salmon, à répandre ces méthodes de l'Algèbre (1868).

Tandis que les mathématiciens anglais, français et italiens échangeaient activement leurs idées, donnant par là continuellement une nouvelle impulsion à cette branche de la Science, il n'en était pas de même en Allemagne, où l'on resta longtemps stationnaire.

---

(1) *Annali di Mat.* (1), t. I, p. 158-163; 1858; en part. p. 163; représentation typique des formes à $n$ variables. Quant à la représentation typique des formes quadratiques ternaires, déduites d'une cubique, *voir*, par exemple, *Comptes rendus*, 1863.

(2) *Consulter* le *Cambr. and Dublin Math. J.*, t. II, p. 74; t. IX, p. 32.

Dans sa première édition des *Higher plane Curves*, 1852, Salmon calcule d'abord les invariants et les covariants des formes binaires au moyen des fonctions symétriques. La deuxième édition de *Higher Algebra*, 1865, renferme un nouvel exposé des *systèmes complets* pour les formes binaires simultanées les plus simples.

(3) Dublin, 1859. — La quatrième édition parut en 1885.

(4) Leipzig, 1863. — Deuxième édition, 1877.

(5) Leipzig, 1862.

(6) *Voir* plus haut, p. 190, note (5). — Un exposé élémentaire de la théorie a été donné par Battaglini dans les *Atti di Napoli*, 1867 (suite dans le *Giorn. di Mat.*).

(7) Paris, 1868. — La deuxième édition, d'après la quatrième édition anglaise, est due à O. Chemin. Paris, 1890. — H. F.

Bien que les méthodes projectives de Hesse [1] et de Steiner se rapprochent beaucoup du champ d'étude des algébristes étrangers, leur conception n'avait cependant pas encore trouvé la forme adéquate à laquelle ici, plus que dans toute autre branche des Mathématiques, on doit attacher une grande importance.

Cette transition a été marquée seulement en 1858 par un exemple [2] classique de Aronhold, dans lequel l'auteur fait ressortir de la théorie de Hesse sur les formes cubiques ternaires leurs propriétés d'invariance en les présentant sous une forme bien définie, affranchie de tout ce qui pouvait paraître artificiel.

Plus tard (1863), Aronhold exposa dans toute leur généralité les idées fondamentales de ses recherches [3]. Nous donnerons un aperçu de cet important Mémoire. La place que nous lui accordons peut se justifier en ce sens qu'il a exercé une influence notable sur l'ordre adopté pour le présent *Rapport*.

Les efforts de Aronhold tendent à ramener à un point de vue unique les formations invariantes de natures si diverses, afin d'établir par là non seulement leurs relations réciproques, mais encore afin de justifier leur existence. L'auteur prend comme point de départ le problème [4] qu'il formule dans les termes suivants :

*Soient* $\mathrm{F}(x \mid a)$, $\mathrm{F}'(\xi \mid a')$ *deux fonctions homogènes quelconques et* TOUT A FAIT GÉNÉRALES, *d'ordre p par rapport aux variables respectivement* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; *on demande de déterminer les relations entre les coefficients a et a' pour que les deux fonctions puissent être transformées l'une dans l'autre par une substitution linéaire.*

Nous soulignons les mots TOUT A FAIT GÉNÉRALES, car, faute d'avoir toujours été strictement observés, ils ont donné lieu à des

(1) *Consulter* les biographies de Plücker, Hesse, Clebsch, citées à plusieurs reprises.

(2) *Journ. für Math.*, t. LV, p. 97-191.

(3) *Journ. für Math.*, t. LXII, p. 281-345.

(4) P. 282, 283. — Ce même problème pour deux ou plusieurs couples de formes se trouve déjà dans Boole, bien que formulé d'une façon moins précise. (*Cambr. and Dublin Math. J.* III et IV. *Voir* t. III, p. 115.)

malentendus ([1]). D'après le problème même, on ne peut disposer des coefficients $a$ et $a'$ que sous certaines réserves; les conditions cherchées seront nécessaires dans tous les cas, mais non suffisantes pour des formes F et F′ absolument quelconques, ce que Aronhold a clairement montré pour les formes cubiques ternaires dans plusieurs passages ([2]) de son Mémoire de 1858.

Si nous supposons éliminés les coefficients de substitution entre les conditions de la transformabilité, nous pourrons ordonner les équations finales de telle façon que le second membre devienne indépendant des $\delta$. Ce fait se trouve traduit par l'existence de $n^2$ équations linéaires aux dérivées partielles ([3]), qui peuvent être transformées de manière à ne plus contenir les quantités $\delta$. Réciproquement, on en déduit que les relations algébriques exprimant la transformation peuvent être représentées par des égalités entre des fractions, égalités dans lesquelles l'une des fractions est exactement la même fonction rationnelle des coefficients $a$ de F que l'autre par rapport aux coefficients $a'$ de la transformée F′.

Par ces fractions, — solutions rationnelles des équations différentielles citées, — se trouve déterminée l'existence des *invariants absolus* de F. Mais on obtient de plus le nombre de ces invariants rationnellement indépendants, grâce à une étude approfondie qui a montré que ces $n^2$ équations différentielles étaient linéairement indépendantes ([4]).

Les invariants ordinaires, dont on partit d'une façon empirique jusqu'à Aronhold, se présentent *a posteriori* comme numé-

---

([1]) Un tel malentendu semble ressortir des attaques que Veltmann a dirigées contre la démonstration de Aronhold (voir *Schlömilch. Zeitschr.*, XXII, p. 277-298; 1877, et XXXIV, p. 321-330; 1889). *Cf.* IB. *a*.

([2]) *Voir*, par ex., *Journ. für Math.*, LV, *loc. cit.*, p. 160.

([3]) T. LXII, p. 287-288, 293. — Plus tard, Maurer a examiné réciproquement dans quel cas un pareil système pouvait définir des invariants (*Münch. Ber.*, p. 103-150; 1888).

([4]) Aronhold en a donné une démonstration simple et directe dans le *Journ. für Math.*, LXIX, p. 185-189. La démonstration de Christoffel, t. LXVIII, p. 246-252, a été retirée par l'auteur lui-même et remplacée par une autre (*Math. Ann.*, XIX, p. 280-290; 1881). — Ce n'est que plus tard qu'il a été examiné si, entre ces $n^2$ équations différentielles, il existait des relations d'ordre supérieur; Study a démontré que, pour le cas $n = 3$, toutes les équations sont des conséquences de deux d'entre elles. *Voir* son traité : *Methoden*.... Leipzig, p. 167; 1889.

rateur et dénominateur des invariants absolus : ils satisfont à un système correspondant de $n^2$ équations différentielles.

Ce système (comme celui qui a été rappelé plus haut) est un *système complet*, d'après la démonstration de Clebsch (1865), c'est-à-dire qu'il est impossible de lui adjoindre de nouvelles équations linéaires par différentiation ou élimination des dérivées d'ordre supérieur ([1]).

Tandis que l'extension à un système de formes ([2]) ne présente pas de difficultés essentielles, Aronhold réussit à découvrir des propriétés remarquables ([3]) des contrevariants (*zugehörige Formen*) et des concomitants mixtes (*Zwischenformen*); c'est ce qui lui permit d'établir les relations étroites qui lient les diverses formes invariantes.

Dans ces développements, il est de toute importance qu'il n'y ait entre les coefficients de la forme originale aucune relation linéaire; ceci permet de remplacer cette forme par la puissance correspondante d'une forme linéaire (p. 292-293), grâce à quoi les opérations différentielles s'effectuent alors très facilement.

Quant à la forme, la méthode symbolique ainsi introduite ne diffère pas essentiellement de celle primitivement employée par Cayley, mais ce n'est que grâce aux bases sur lesquelles Aronhold a établi la théorie que celle-ci a pu recevoir le développement remarquable qu'elle a trouvé dès lors en Allemagne.

C'est ici que Clebsch intervient avec beaucoup de succès. Le Mémoire de Aronhold (1858) lui permet de faire reposer ([4]) la théorie uniquement sur cette méthode symbolique (1861) et de ramener l'étude des formes d'ordre supérieur à celle des formes linéaires.

Avec la méthode des Anglais, on se contente de fournir des formes invariantes en nombre quelconque; celle de Clebsch, au contraire, représentant symboliquement les invariants par un ensemble de déterminants, permet non seulement d'en déduire toutes ces formes, mais encore elle sert à définir ces dernières, en

---

([1]) *Journ. für Math.*, LXV, p. 257-268.

([2]) T. LXII, §§ 8 et 10. — *Consulter* t. XXXIX, p. 150 et suivantes.

([3]) T. LXII, §§ 11 et 14.

([4]) *Journ. für Math.*, LIX, p. 1-67.

se limitant toutefois au cas où il n'y a qu'une série de variables, et celles qui leur correspondent par dualité.

En se basant sur le caractère général de cette méthode, Clebsch se trouve conduit, entre autres, au principe de translation (¹) (*Uebertragungsprincip*), théorème bien connu, qui permet d'établir une relation étroite entre les formes de $n$ et celles des $n+1$ variables.

A la même époque, Clebsch donne une série d'applications intéressantes à la Géométrie des courbes et des surfaces algébriques; nous citerons, comme particulièrement remarquable, son travail (²) sur le problème des normales dans le cas des figures du second ordre.

Nous pouvons restreindre au strict nécessaire les renseignements sur les travaux de Clebsch, vu qu'il existe déjà, à ce sujet, un exposé (³) détaillé, mettant en lumière les différentes branches qui se rattachent aux œuvres du grand savant.

Les Mémoires précités de Clebsch (1861) et de Aronhold (1863) donnent naissance à une nouvelle époque, que l'on reconnaît en ce que notre Science prend alors un développement systématique qui, dès ce moment, a son centre en Allemagne.

On constate, peu à peu, deux directions principales qui, en certains points, se distinguent très nettement l'une de l'autre.

L'une, inaugurée par Clebsch, se propose d'approfondir, à l'aide des méthodes de ce dernier, l'étude du champ illimité des formes invariantes, afin de déterminer les rapports que celles-ci peuvent avoir entre elles; l'autre prend comme point de départ le *problème de l'équivalence* posé par Aronhold, c'est-à-dire celui de la transformabilité linéaire d'une forme dans une autre.

En attendant, il se passe encore quelques années avant qu'il se produise, des deux côtés, un mouvement sensible. On s'accorde pour faire partir celui-ci de l'année 1868, époque à laquelle furent publiées la démonstration (⁴) de Gordan sur le nombre fini des systèmes de formes binaires, et les recherches de Weierstrass sur

(¹) *Loc. cit.*, § 7.

(²) *Journ. für Math.*, LXII, p. 64-109; 1863.

(³) *Math. Ann.*, VII, p. 1-50; *voir*, en part., p. 37-50; 1874.

(⁴) *Journ. für Math.*, LXIX, p. 323-354.

l'équivalence des formes et faisceaux de formes bilinéaires (et quadratiques) basés sur l'étude des diviseurs élémentaires ([1]).

Il y a donc lieu d'exposer seulement plus loin et en rapport avec les recherches de la nouvelle époque, les travaux ([2]) de Clebsch et de Gordan (1867) sur les représentations typiques des formes binaires, ainsi que ceux de Kronecker ([3]) et de Christoffel ([4]) sur les formes bilinéaires, bien que, en apparence, ces Mémoires appartiennent à l'ancienne époque. (*A suivre*).

---

([1]) *Berl. Ber.*, p. 310-338; 1868.

([2]) *Annali di Mat.* (2), I, p. 23-79.

([3]) KRONECKER, *Journ. für Math.*, LXVIII, p. 273-285.

([4]) CHRISTOFFEL, *Id.*, p. 253-272.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. KIRCHOFF. — Vorlesungen ueber mathematische Physik. IV$^{\text{ter}}$ und letzter Band : *Theorie der Wärme;* herausgegeben von Dr *Max Planck* (Leçons de Physique mathématique. IVe et dernier volume : *Théorie de la chaleur;* publié par le Dr *Max Planck*). Gr. in-8°, x-210 p., Leipzig, B.-G. Teubner; 1894.

G. Kirchhoff avait formé le projet de réunir et de publier l'ensemble de ses *Leçons sur la Physique mathématique;* il n'a mis ce projet à exécution que pour le premier volume de son œuvre, pour celui qu'il a intitulé *Mécanique;* après sa mort, ses élèves ont voulu réaliser le plan qu'il s'était tracé et, en s'aidant des notes dont il faisait usage dans ses Cours, nous faire connaître sa pensée sur l'ensemble des problèmes de la Physique théorique; M. Kurt Hensel s'est chargé de publier les *Leçons sur l'Optique;* M. Max Planck, après avoir reproduit les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* nous donne aujourd'hui le IVe et dernier Volume de cette série, consacré aux *Leçons sur la chaleur.* La haute compétence de M. Max Planck, professeur de Physique théorique à l'Université de Berlin, auteur d'importantes recherches touchant la Thermodynamique, nous est un sûr garant de l'exactitude avec laquelle ce livre reproduit la pensée de G. Kirchhoff.

G. Kirchhoff consacre les premières pages à marquer la division de son œuvre en trois parties, qu'il nomme la *pure théorie de la chaleur,* la *Thermodynamique,* la *théorie mécanique de la chaleur;* ces pages nous semblent jeter, sur la manière dont G. Kirchhoff concevait la Physique, un jour qu'on chercherait peut-être en vain dans toute autre partie de son œuvre; aussi croyons-nous bien faire en donnant aux lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques* la traduction *in extenso* de ces pages.

## I.

« Le but de la Physique est d'étudier certaines classes de phénomènes, nommés *phénomènes physiques,* de les classer dans un

ordre facile à embrasser du regard, et de les exposer de la manière la plus simple possible. Parmi tous les phénomènes physiques, les plus simples, c'est-à-dire les plus immédiatement accessibles à l'entendement, sont les *phénomènes de mouvement,* qui forment l'objet de la *Mécanique*. Ce sont ceux qui exigent le plus petit nombre de concepts fondamentaux; ils supposent seulement les notions d'espace, de temps et de matière. Une foule d'autres notions, il est vrai, interviennent dans l'étude de ces phénomènes : telles sont les notions de vitesse, d'accélération, de force, de travail, etc. Mais ce ne sont pas des notions premières; ce sont des notions qui se déduisent, par un procédé mathématique rigoureux, des concepts premiers. Elles s'introduisent parce qu'elles servent à énoncer plus aisément les lois du mouvement. Dans les autres parties de la Physique, nous voyons intervenir de nouvelles notions, essentiellement distinctes des précédentes; ainsi, en Optique, interviennent les notions d'intensité lumineuse, de couleur, d'état de polarisation. Il est vrai que, si l'hypothèse qui se trouve à la base de la théorie ondulatoire de la lumière est exacte, ces notions se peuvent ramener à celles de la Mécanique; la lumière consiste alors en vibrations dont la force vive représente l'intensité lumineuse, dont la durée caractérise la couleur et dont la direction détermine l'état de polarisation. Cette hypothèse est si simple; les conséquences que l'on en peut déduire rigoureusement concordent si bien avec l'expérience, quoique cette concordance n'ait pas lieu dans tous les cas, que cette hypothèse semble très propre à servir de point de départ dans l'exposition des phénomènes optiques.

» On a fait l'hypothèse que tous les phénomènes physiques, et, en particulier, ceux qui sont occasionnés par la *chaleur* et qui nous occuperont dans ces Leçons, sont réductibles à des mouvements, en sorte que toute la Physique se ramène à la Mécanique. Si cette réduction était effectuée, on aurait atteint, dans l'exposé de la Physique, au plus haut degré de simplicité qui se puisse concevoir; cette réduction de la Physique à la Mécanique est donc un but qu'il est extrêmement désirable d'atteindre. Mais ce but n'est-il pas illusoire? Tous les phénomènes physiques sont-ils vraiment réductibles à des mouvements? Cette question est équivalente à celle-ci : les plus petites parties de la matière peuvent-elles

éprouver des modifications autres que des changements de position dans l'espace? Il semble que le témoignage immédiat de nos sens nous permette de trancher cette question par l'affirmative; les changements d'état d'agrégation, de propriétés chimiques, de température, d'état électrique, d'autres propriétés encore, nous *paraissent* ne pas être des mouvements; mais le témoignage immédiat de nos sens n'est pas compétent pour juger la question. Même lorsqu'on les suppose armés de tous les moyens que l'art a créés pour les aider, nos sens ne peuvent percevoir les volumes dont les dimensions sont inférieures à certaines limites; ils ne peuvent reconnaître ce qui se passe à l'intérieur d'un tel volume. Ils perçoivent seulement une sorte de moyenne des événements qui se produisent à la fois dans un grand nombre de ces petits volumes; ils reçoivent la même impression que si la matière remplissait l'espace d'une manière *continue*, que si le mouvement variait d'un point à l'autre d'une manière continue; c'est seulement le long de certaines surfaces, le long des surfaces de contact de deux corps différents qu'il nous est possible de reconnaître de brusques changements dans la nature et dans le mouvement de la matière. A l'intérieur des espaces qui, par leur extrême petitesse, échappent à notre perception, se produit-il des différences dans la nature et le mouvement de la matière? Les plus petites parties de la matière, par exemple, sont-elles séparées par des espaces vides? Il nous est impossible, en tout cas, de nous en apercevoir; s'il se produit des variations dans d'aussi petits espaces, nous ne pouvons les reconnaître comme telles. Il est possible que les variations de température, de l'état d'agrégation, etc., consistent en des mouvements qu'éprouvent les unes par rapport aux autres les plus petites parties de la matière. C'est précisément l'hypothèse que l'on prend pour base lorsque l'on admet que tous les phénomènes physiques sont réductibles à des mouvements.

» Vous vous attendez, peut-être, à ce que je commence par préciser l'hypothèse en question touchant les phénomènes de la chaleur, pour en déduire ensuite les conséquences et comparer ces conséquences aux faits observés. Mais il est impossible de suivre cette méthode, du moins actuellement; car l'image que les physiciens se sont faite du mouvement qui constitue la chaleur est encore trop obscure, et l'on ne peut encore la soumettre au

calcul d'une manière pleinement satisfaisante. C'est dans le cas des gaz que cette représentation a acquis sa plus grande perfection. On admet que les molécules des gaz (qui sont en nombre immense dans les plus petits volumes dont nous puissions encore percevoir les dimensions) s'agitent en désordre comme des mouches qui bourdonnent en essaim. Chacune de ces molécules marche en ligne droite, jusqu'à ce qu'elle en choque une autre qui la relance dans une autre direction. La nature de ces chocs est encore très obscure; selon la constitution que l'on attribue aux molécules, on est amené à se les représenter d'une manière ou d'une autre. Plus grande est notre ignorance touchant le mouvement des molécules dans les corps solides ou fluides; une seule hypothèse demeure certaine; c'est qu'ici encore règne un extrême désordre, en sorte qu'au même instant des molécules extrêmement voisines les unes des autres présentent toutes les vitesses et toutes les directions de mouvement possibles. Si l'on observe que l'instrument mathématique, sous sa forme actuelle, n'est pas assez puissant pour déterminer avec précision le mouvement de trois corps célestes regardés comme des points matériels qui s'attirent suivant la loi de Newton, on comprendra aisément que l'hypothèse touchant la constitution des corps que je viens d'exposer n'est guère propre à servir de point de départ à des déductions rigoureuses; qu'elle ne peut guère servir à rendre plus nette la définition des notions auxquelles ont conduit les phénomènes. Pour parvenir à comprendre nettement ces notions, il nous faut partir d'hypothèses immédiatement issues de l'expérience et dont les conséquences se laissent aisément soumettre au calcul. Voilà pourquoi nous conserverons tout d'abord une hypothèse, qui se retrouve également à la base de la Mécanique, et qui est la suivante : les corps ne se composent pas de molécules distinctes; la matière remplit d'une manière *continue* l'espace qu'occupent les corps; si les diverses parties de la matière se meuvent les unes par rapport aux autres, le mouvement varie d'une manière *continue* d'un point à l'autre. Tant que nous opérons de la sorte, nous devons, il est vrai, renoncer à ramener à la Mécanique les notions de la théorie de la chaleur; il nous faut admettre que les parties de la matière sont susceptibles d'éprouver non seulement des changements de position dans l'espace, mais encore d'autres modifications

(qualitatives), et parmi ces modifications nous devons ranger les variations de la température.

» A parler rigoureusement, il n'y a pas de phénomène physique dans lequel, à côté des mouvements, d'autres modifications de la matière ne semblent se produire; au point de vue auquel nous nous sommes placé plus haut, nous pouvons aussi bien dire : ne se produisent. Jamais les changements de température ne font entièrement défaut; dans tout mouvement intervient le frottement et le frottement engendre de la chaleur. Mais, dans beaucoup de phénomènes de mouvement, les variations de la température et des autres propriétés de la matière ont peu d'importance; ce sont ces phénomènes qui forment l'objet de la *Mécanique*, ou, selon une locution qui me semble préférable, de la *pure Mécanique*. D'un autre côté, il ne se produit jamais de variations de température sans qu'il se produise des mouvements; car, lorsque la température d'un corps varie, son volume varie également; et tout changement de son volume entraîne un mouvement relatif de ses diverses parties. Mais, dans beaucoup de phénomènes, les mouvements qui accompagnent les variations de température sont d'une nature telle qu'on peut les laisser de côté. Ces phénomènes, c'est-à-dire les phénomènes dans lesquels on n'a à considérer que des *variations de température*, forment l'objet d'une branche de la Physique qui nous occupera au début de ces Leçons et que l'on peut justement nommer la *pure théorie de la chaleur*. Nous considérerons ensuite la *théorie mécanique de la chaleur*, c'est-à-dire les phénomènes dans lesquels on a à la fois à considérer des variations de température et des mouvements. »

## II.

Ce que G. Kirchhoff nomme *la pure théorie de la chaleur* coïncide avec ce que l'on nomme habituellement *la théorie de la conductibilité calorifique*. Après avoir posé les principes fondamentaux de cette science, il consacre deux Leçons à l'étude détaillée du cas où les surfaces isothermes sont des plans parallèles, c'est-à-dire du cas où la température $\mathfrak{T}$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial z^2}.$$

Il intègre cette équation pour diverses formes de conditions aux limites et applique les résultats trouvés à l'étude d'un certain nombre de problèmes intéressants : oscillations diurnes de la température du sol, époque de la solidification de l'écorce terrestre (d'après W. Thomson), etc. Il traite ensuite le problème de la conductibilité dans une barre dont la section est très petite par rapport à sa longueur; ce problème dépend, comme l'on sait, de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial z^2} - f^2 \mathfrak{J}.$$

L'étude de l'état stationnaire donne la théorie de la méthode employée par Desprez, puis par Wiedemann et Franz, pour déterminer les coefficients de conductibilité; l'étude de l'état variable, au contraire, rend compte de la méthode beaucoup plus parfaite imaginée par F.-E. Neumann.

G. Kirchhoff complète cette étude, très sommaire et très simple, de la conductibilité au sein des substances isotropes en examinant le problème du mouvement de la chaleur dans un prisme rectangulaire de section finie, dont les faces sont soumises au rayonnement, et dans une sphère à laquelle les surfaces isothermes sont supposées concentriques.

Passant ensuite au cas des substances cristallisées, il établit brièvement les principaux théorèmes de Lamé touchant les équations du mouvement de la chaleur dans ces substances, et il démontre que, dans une plaque indéfinie, limitée par deux plans parallèles, on peut obtenir un mouvement de la chaleur où les lignes isothermes tracent à la surface de la plaque des ellipses concentriques et homothétiques.

Malgré leur extrême concision, on peut dire que les quatre premières Leçons de G. Kirchhoff renferment tout ce qu'il peut être utile au physicien de connaître sur la théorie de la conductibilité; on ne doit pas oublier, en effet, que cette théorie a servi bien moins au progrès de la Physique qu'à l'étude des équations aux dérivées partielles, étude à laquelle elle a fourni de nombreux problèmes.

## III.

Après ce bref exposé de la *pure théorie de la chaleur*, G. Kirchhoff aborde la *théorie mécanique de la chaleur ;* dans les premières Leçons qu'il consacre à cette science, il continue à regarder la température comme une qualité des corps, sans se soucier de la ramener au mouvement ; on sait que, depuis un certain nombre d'années, cette manière de faire, qui détache le plus complètement possible la théorie de la puissance motrice du feu ou *thermodynamique* de toute hypothèse touchant la nature mécanique de la chaleur, tend de plus en plus à prévaloir dans la science ; l'enseignement de G. Kirchhoff n'a certainement pas été étranger à cette tendance.

La première Leçon de Thermodynamique (la V^e de tout l'Ouvrage) est consacrée à exposer très succinctement, trop succinctement peut-être, les deux principes sur lesquels repose cette science : le principe de la conservation de l'énergie et le principe de Carnot, donnés tous deux comme des lois extraites de l'expérience par l'induction ; dans cette même Leçon, se trouve la définition de la température absolue, présentée selon la méthode de W. Thomson, la définition de l'énergie interne et de l'entropie.

La deuxième (VI^e) Leçon de Thermodynamique est consacrée aux applications les plus générales des deux principes ; Kirchhoff y montre, en premier lieu, comment toutes les équations de la Thermodynamique peuvent s'obtenir en écrivant que $(\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} - d\mathfrak{T}_e)$ et $\frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}$ sont deux différentielles totales ; puis il introduit la notion d'*énergie libre* ou *potentiel thermodynamique interne ;* regrettons, à ce propos, que, tout en citant le mémorable travail de M. Helmholtz, il ait omis de rappeler les droits antérieurs de M. Massieu et de M. Gibbs ; il établit les conditions de possibilité d'une transformation et montre qu'elles ne sont pas d'accord avec le principe du travail maximum ; il étudie ensuite les systèmes dont l'état physique ne dépend que de deux paramètres, et, en particulier, les gaz parfaits.

Cette étude est poursuivie dans la troisième (VII^e) Leçon, où sont exposées les recherches de Joule sur la compression adia-

batique de l'eau et sur la traction adiabatique des corps solides, ainsi que les expériences de Joule et W. Thomson sur l'écoulement des gaz voisins de l'état parfait.

La quatrième (VIII$^e$) Leçon est consacrée aux propriétés essentielles de la vaporisation : tension de vapeur saturée, relation de Clapeyron, chaleur spécifique de la vapeur saturée, énergie interne d'un système renfermant un mélange de liquide et de vapeur saturée.

Les travaux de Van der Waals et de Clausius sur la continuité entre l'état liquide et l'état gazeux et sur la détermination des éléments de la vapeur saturée au moyen de l'isotherme théorique forment l'objet d'une partie de la cinquième (IX$^e$) Leçon; la fin de cette Leçon est consacrée à étudier l'influence que la pression exerce sur la température de fusion et sur la chaleur de fusion.

La sixième (X$^e$) Leçon est un exposé abrégé du Mémoire de G. Kirchhoff sur la dilution de l'acide sulfurique; elle suggère une remarque que nous avons déjà eu occasion de faire à propos d'autres Ouvrages didactiques du grand physicien, à savoir que celui-ci est d'une remarquable sobriété dans l'exposé de ses propres travaux; il évite toujours de leur donner, dans son enseignement, une place hors de proportion avec celle qu'il accorde aux travaux d'autrui; peut-être même pourrait-on l'accuser de manquer de mesure à son détriment et de ne pas mettre en une suffisante clarté l'importance de certaines de ses recherches.

La septième (XI$^e$) Leçon est une de celles dont la nouveauté saisira le plus les lecteurs accoutumés à la Thermodynamique : elle traite d'une manière générale de l'application de cette science aux fluides en mouvement, en tenant compte de la viscosité; les équations générales obtenues dans cette Leçon sont appliquées dans la suivante à divers problèmes importants : écoulement d'un gaz par un orifice, écoulement d'un jet de vapeur humide, etc.

## IV.

Ici s'arrête le développement de la Thermodynamique proprement dite et commence l'exposé des recherches faites par les physiciens touchant la nature de la chaleur. G. Kirchhoff se borne à traiter, très complètement d'ailleurs, la théorie cinétique des gaz;

il ne parle pas des efforts tentés par M. Boltzmann, par Clausius et par M. H. von Helmholtz pour ramener la loi de Carnot aux principes fondamentaux de la Dynamique.

Les cinq premières Leçons touchant la théorie cinétique des gaz sont consacrées à exposer, avec une grande perfection de forme, la théorie de Maxwell. Nous y trouvons d'abord deux démonstrations de la loi de distribution des vitesses des molécules à un instant donné (loi de Maxwell), puis l'application de cette loi aux propriétés fondamentales d'un gaz ou d'un mélange de gaz en équilibre conduisant dans ce dernier cas à la loi d'Avogadro. La théorie est étendue ensuite aux gaz en mouvement, conformément au mode d'exposition de Maxwell. Arrivant au calcul du rapport $\frac{C_p}{C_v}$ des deux chaleurs spécifiques, G. Kirchhoff montre que la théorie cinétique attribuerait à ce rapport la valeur inacceptable $\frac{5}{3}$ si les molécules étaient assimilées à de simples points matériels; avec Clausius, il admet que leur forme doit être plus compliquée et, suivant un calcul de M. Boltzmann, il prouve que l'on peut alors retrouver pour le rapport des chaleurs spécifiques la valeur 1,40 donnée par l'expérience.

Pour rendre compte des lois du frottement intérieur et de la conductibilité calorifique des gaz, G. Kirchhoff admet, avec Maxwell, que les molécules des gaz se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance. Il applique les conséquences de cette hypothèse au mélange de deux gaz et à la diffusion.

La méthode suivie par Clausius dans l'exposé de la théorie cinétique des gaz permet de rendre compte du frottement intérieur et de la conductibité calorifique des gaz, sans faire intervenir cette force répulsive inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance. Mais cette méthode, à laquelle G. Kirchhoff consacre sa dernière Leçon, paraît conduire à des contradictions.

P. Duhem.

HÉRON D'ALEXANDRIE. — Les Mécaniques ou l'Élévateur, publiées pour la première fois sur la version arabe de Costâ-ibn-Lûqâ, et traduites en français par M. le baron *Carra de Vaux*. Petit in-8°, 194 pages de texte français, 110 de texte arabe. Paris, Leroux, 1894.

On savait par Pappus, qui nous en a conservé d'importants extraits, que Héron d'Alexandrie avait rédigé trois Livres de *Mécaniques* ou plutôt d'*Introductions mécaniques*, car ce dernier titre, indiqué par Eutocius, semble plus authentique. Le texte grec de cet Ouvrage est perdu, mais il en existe une version arabe remontant au IX^e siècle et dont le mathématicien et orientaliste Golius a apporté en Occident un manuscrit datant du XV^e siècle. Il en fit une traduction latine, restée inédite, sauf un court fragment publié, en 1785, par Brugmans dans les *Mémoires de la Société royale de Gœttingue*. On n'a pu retrouver cette traduction qui paraît avoir été peu intelligible.

La publication du texte arabe, d'après le manuscrit de Golius actuellement à la Bibliothèque de Leyde, n'en était pas moins d'autant plus désirable que, pour les éléments de la Mécanique chez les Grecs, nous ne possédons absolument aucun Ouvrage qui puisse le remplacer. Cette tâche a été entreprise par M. Carra de Vaux dans le *Journal Asiatique;* il a donné en même temps une traduction française qui rend désormais l'Ouvrage de Héron parfaitement accessible et comble ainsi une grave lacune de notre connaissance de la Science antique.

La première révélation que nous apportent les *Mécaniques* de Héron est malheureusement de nature à causer une certaine déception; malgré quelques doutes qui s'étaient élevés, on pouvait jusqu'à présent, d'après les autres Ouvrages attribués à l'auteur, le considérer comme un savant original et appartenant encore à la période antérieure à la conquête de l'Orient par les Romains. Désormais on doit le juger tout autrement; ses *Mécaniques* sont évidemment une compilation qui laisse singulièrement à désirer; malgré son renom et sa compétence réelle, l'auteur n'est qu'un mathématicien de troisième ordre, inférieur sans contredit à Pappus, lequel pourtant n'est guère, lui aussi, qu'un compilateur. Enfin, Héron est probablement, au plus tôt, du second siècle de

notre ère; M. Carra de Vaux en indique une preuve décisive : l'auteur des *Mécaniques* décrit, comme un appareil bien connu, la petite presse à vis et sans levier qui, d'après Pline (*Hist. nat.*, XVIII, 31), aurait été inventée du temps de ce dernier. Il suffit, d'autre part, de remarquer la façon dont Héron parle des anciens (pages 108, 112, etc.) pour reconnaître qu'il est aussi éloigné d'Archimède et de Ctésibios que Ptolémée l'était d'Hipparque.

Le caractère de compilation que je signalais tout à l'heure est aggravé par le désordre dans lequel nous est parvenu le premier Livre, sinon tout l'Ouvrage; le traducteur arabe a certainement rendu avec fidélité et avec une intelligence suffisante le texte qu'il avait sous les yeux; mais ce texte était acéphale, comme il le remarque lui même, et le copiste grec semble n'avoir, pour le premier Livre surtout, fait que des extraits, en supprimant les préambules, les transitions et les considérations d'ordre général. Il faut ajouter que, par suite de l'imperfection du texte primitif, et de cette circonstance que le manuscrit arabe est de date récente et défectueux, un certain nombre de détails de la traduction française sont forcément douteux ou obscurs. La publication du texte arabe était donc essentielle et il est à désirer que les efforts des orientalistes parviennent à éclaircir ce qui reste encore sujet à controverse.

Dans l'état actuel, le manuscrit arabe porte un titre qui doit se traduire par celui d'*Élévateur* et correspond au grec βαρουλκος. Il débute *ex abrupto* par un Chapitre (I) consacré à la description d'un train d'engrenages pouvant augmenter la puissance dans le rapport de 1 à 40. Le texte grec de ce passage existe comme dernier Chapitre du traité de Héron *Sur la Dioptre* (publié par Vincent, *Notices et extraits*, XIX, en 1858), auquel il a été évidemment rattaché par une simple fantaisie de copiste. D'autre part, dans son Livre II des *Mécaniques*, 21, Héron revient sous une autre forme sur la même question.

Nous savons pertinemment par Vitruve que le terme *barulcus* ne s'appliquait pas à une machine spéciale, mais à l'ensemble des procédés pour la traction ou l'élévation des fardeaux. Pappus, d'autre part, parle d'un Ouvrage de Héron qui aurait porté ce titre. Était-ce seulement une partie des *Mécaniques*, celle qui concernait plus particulièrement la manœuvre des fardeaux, ou

bien était-ce un traité spécial? M. Carra de Vaux se range à la première hypothèse, que je partageais moi-même, avant d'avoir pris connaissance de l'ensemble des *Mécaniques;* aujourd'hui la seconde me paraît plus probable. Nous aurions donc, de fait, un fragment de ce *Barulcus* de Héron, que, après une lacune (réservée pour un titre au minium qui n'aura pas été mis), le copiste grec aura fait suivre de l'ensemble des *Mécaniques*.

Le premier Chapitre (II) que nous possédions de ce dernier ouvrage est consacré : à l'explication des circonstances du mouvement de deux cercles égaux ou inégaux se commandant par roulement; à celle de la différence du roulement simple et du roulement avec glissement; à celle de la composition de deux mouvements rectilignes; questions déjà traitées dans les *Mécaniques* d'Aristote.

Suit (III) une description des moyens à employer pour décrire une figure plane ou solide semblable à une figure donnée et dans un rapport donné avec celle-ci. A ce propos, Héron donne son élégante construction des deux moyennes proportionnelles, qu'il a également reproduite dans ses *Belopœïca* (armes de jet), et qui a été conservée, d'autre part, par Pappus et par Eutocius. Quant aux appareils qu'il indique, ils semblent plus ingénieux que pratiques, surtout celui destiné aux figures solides ([1]). Mais, à une époque où la main-d'œuvre ne comptait guère, ils peuvent avoir été réellement employés; en tout cas, la question paraît plutôt concerner l'histoire de l'art grec, pour les reproductions à différentes échelles de statues, etc., que l'histoire de la Mécanique proprement dite.

Viennent ensuite (IV) des remarques assez peu coordonnées sur la possibilité de mouvoir un fardeau avec une force aussi petite que l'on veut (par la considération du plan incliné); sur les moyens employés pour diminuer le frottement dans la traction des fardeaux; sur la force nécessaire pour leur élévation au moyen d'une poulie simple ou sur un plan incliné. Héron considère un cylindre et paraît tomber dans une erreur analogue à celle de Pappus; mais toutes ces questions sont traitées très succinctement.

---

([1]) Ces descriptions sont au reste assez obscures et réclameraient une étude approfondie que mérite le sujet.

Nous arrivons à la définition du centre de gravité (V) et à la démonstration de son existence; cette partie doit dériver du traité perdu d'Archimède *Sur les balances;* mais Héron cite également une définition physique du centre de gravité due au stoïcien Posidonius.

La fin du premier Livre (VI) est consacrée, en dehors de détails exacts sur les conditions d'équilibre d'un levier (droit ou courbe) actionné par des forces parallèles, à la question de la répartition sur les supports du poids d'une poutre chargée uniformément ou non. Le point de départ de toute cette exposition est bien encore cette fois dans les travaux d'Archimède et Héron nous apprend que le géomètre de Syracuse avait écrit un traité spécial *Sur les supports*. Il me semble toutefois difficile de croire qu'il en ait reproduit exactement la doctrine; sa solution, pour le cas d'une poutre reposant sur deux appuis qu'elle dépasse, est en effet erronée, tandis qu'il est bien clair qu'Archimède possédait tous les éléments nécessaires pour résoudre exactement ce problème. Quant au cas de plusieurs supports, je me contente de remarquer qu'il est traité en admettant que la répartition se fait toujours comme si la poutre était coupée au-dessus de chaque support. Il est très possible qu'Archimède ait étudié les conséquences de cette hypothèse, mais peut-on croire qu'il l'ait admise catégoriquement?

Le Livre II s'ouvre (Chap. I) par la description des cinq machines simples, treuil, levier, moufle, coin, vis sans fin; nous possédions déjà dans Pappus le texte grec de cette description. Suit la théorie de ces machines (II), fondée sur la considération de l'équilibre des forces parallèles agissant sur des cercles concentriques. Il est expliqué (III) comment on doit s'y prendre, en combinant au besoin diverses machines simples, de même genre ou de genres différents, pour mouvoir une résistance donnée avec une puissance donnée. Le principe que l'on perd en vitesse ce que l'on gagne en force est nettement posé et développé.

Nous retrouvons ensuite (IV), avec un certain étonnement, une série de questions (17) tout à fait analogues à celles des *Mécaniques* d'Aristote; six au moins sont d'ailleurs empruntées à cet ouvrage et résolues dans le même esprit. Par exemple : « Pourquoi arrache-t-on les dents avec des pinces et non avec la main? Pourquoi les galets sur les rivages de la mer sont-ils arrondis? etc. »

Enfin le Livre se termine (V) par la détermination du centre de gravité de la surface des polygones, et de celui de poids placés au sommet de polygones. La répartition du poids du triangle horizontal sur des supports soutenant les sommets est donnée exactement. Ce Chapitre dérive évidemment d'Archimède.

Le Livre III est le plus intéressant au point de vue de la Mécanique pratique des anciens, mais, au contraire, le plus pauvre comme théorie. Il décrit, en premier lieu, les procédés employés pour l'élévation des pierres de taille; cette description, dont le début est copié à la fin du Livre VIII de Pappus, complète les indications fournies par Vitruve. Comme nouvelles données, on y voit que les anciens évitaient d'enrouler des cordes autour des pierres de taille. Ou bien ils pratiquaient à la partie supérieure une entaille en queue d'hironde où ils introduisaient un coin muni d'un crochet; ou bien encore ils se servaient d'un système de tiges de fer dont ils engageaient les extrémités, recourbées à angle droit, dans des entailles pratiquées à la partie inférieure de la pierre. L'Ouvrage se termine par la description des presses à levier et à vis employées dans les exploitations agricoles pour la fabrication de l'huile et du vin. Cette partie, dont quelques détails restent malheureusement obscurs, présente un intérêt historique considérable.

La rapide analyse que nous venons de donner de l'Ouvrage suffit pour marquer son caractère de compilation, assez mal ordonnée en somme. Il est à peine utile de dire que, dans cette compilation, Héron a pu introduire des morceaux rédigés par lui-même, notamment pour les descriptions d'appareils nouveaux, ceux qui ne sont pas, par exemple, indiqués par Vitruve. Les auteurs dont il s'est servi, en dehors d'Archimède, doivent naturellement être cherchés dans la liste des mécaniciens que donne l'architecte romain, et les principaux sont sans doute Ctésibios, que Héron a utilisé dans ses autres Ouvrages, et surtout Philon de Byzance, dont les écrits subsistaient à côté des siens et leur étaient assimilés au temps de Pappus et même de Proclus.

Je ne crois pas avoir besoin d'insister à nouveau sur l'intérêt qui s'attache à la publication de M. Carra de Vaux et sur l'importance majeure qu'elle présente pour l'histoire de la Mécanique, qui présente encore tant d'obscurités. Mais je remarquerai inci-

demment que, si l'époque où vivait Héron d'Alexandrie doit être descendue d'environ deux siècles, celle de son prétendu maître Ctésibios semble devoir être, au contraire, reculée d'au moins un siècle. Il a vécu très probablement, ainsi que son contemporain Philon de Byzance, sous les premiers Ptolémées, et non pas sous le second Évergète, ainsi que l'affirme un auteur cité par Athénée (le grammairien). Cette dernière affirmation repose probablement sur une confusion qu'Athénée lui-même soupçonnait, l'orgue hydraulique, construit par Ctésibios dans le temple de Vénus-Zéphyritis à Alexandrie, ayant été célébré par un poète contemporain de Théocrite. D'autre part, il serait tout à fait inexplicable que, dans leurs Ouvrages sur les machines de guerre, Ctésibios et Philon de Byzance, s'ils avaient vécu après Archimède, n'eussent pas fait la moindre allusion au célèbre siège de Syracuse.

PAUL TANNERY.

---

JULII FIRMICI MATERNI MATHESEOS LIBRI VIII. Primum recensuit CAROLUS SITTL. Pars I, libri I-IV. 246 pages. Leipzig, Teubner, 1894.

Julius Firmicus Maternus n'a pas écrit sur les Mathématiques, mais simplement sur l'Astrologie. Son Ouvrage date des dernières années de Constantin le Grand (entre 333 et 337), mais il semble que nous ayons une seconde édition dédiée en 354 à un Mavortius, consul désigné. Le texte, pour les quatre premiers Livres, repose sur des manuscrits dont les plus anciens remontent aux x^e^ et xi^e^ siècles; pour les quatre derniers, au contraire, on n'a pas de copies antérieures au xv^e^ siècle.

La publication d'une édition critique était d'autant plus désirable que Firmicus a utilisé des auteurs que nous ne possédons plus; son traité est par suite une source précieuse pour l'histoire de l'Astrologie, qui est actuellement un chaos, mais qu'il faudra débrouiller pour étendre notre connaissance de l'Astronomie antique. Malheureusement Firmicus semble parfois avoir singulièrement interprété les textes grecs qui lui ont servi; j'en donnerai un exemple : Livre II, Chap. IX, il donne, pour sept climats distincts, le temps de lever de chacun des douze signes; mais il tra-

duit par *annus* le grec χρόνος (temps), qui, dans ce cas, désigne la trois cent soixantième partie du jour sidéral. On voit par là combien les renseignements historiques utiles qu'il peut fournir sont sujets à caution.

Le texte a été établi avec soin par M. Sittl; mais il était en si mauvais état et les manuscrits paraissent tellement défectueux qu'il y aurait encore besoin d'un assez grand nombre de corrections plus ou moins conjecturales; j'indiquerai les suivantes, qui me semblent indispensables : P. 17, l. 24, lire *patimur ea* au lieu de *petimur et*. P. 20, 16, *commenta* au lieu de *commeata*. P. 56, 29, *CCCXXX* au lieu de *DCCXXX*. P. 63, 8, *CCCLX* au lieu de *CCCIX*. P. 65, 2, *signa XII* au lieu de *signa VII*. P. 78, 17, *vivendi* au lieu de *videndi*. P. 83, 17, *mobile* au lieu de *nobile*. P. 222, 8, *horoscopo* au lieu de *hora*.

P. 62, 22, le texte des manuscrits *Signis solidis* a malencontreusement été corrigé, depuis l'édition princeps, en *Signis solis;* voici la traduction du passage : « Les hexagones les plus puissants sont ceux pour lesquels les signes intermédiaires sont tropiques ou doubles; ceux au contraire qui passent sur les signes solides sont sans efficacité. »

Si malheureusement une longue lacune du livre II de Firmicus nous prive des détails qu'il donnait sur la nomenclature astrologique concernant les signes, nous savons, par assez d'autres auteurs, que les Grecs appelaient *tropiques,* le Bélier, le Cancer, la Balance, le Capricorne; *doubles* (δίσωμα), les Gémeaux, la Vierge, le Sagittaire et les Poissons; *solides* (στερεά) le Taureau, le Lion, le Scorpion et le Verseau. On sait également que l'aspect *hexagone* est celui de deux signes séparés par un seul intermédiaire; le sens de la phrase est dès lors suffisamment clair et il n'y a pas à toucher au texte des manuscrits.

Paul Tannery.

# MÉLANGES.

## RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

Par M. Fr. MEYER (de Clausthal).

Traduction annotée par H. FEHR.

(*Suite*).

### PASSAGE A LA NOUVELLE PÉRIODE DE 1868 AU TEMPS PRÉSENT.

L'année 1868 offre encore d'autres faits remarquables. Avant tout, il est important de remarquer que ce n'est qu'à partir de cette date qu'il devient possible, grâce à la publication *Fortschritte der Mathematik,* fondée par Ohrtmann et Müller (1), publication unique en son genre dans les Sciences mathématiques, d'avoir une vue générale sur ce qui se publie dans cette science.

Dans le courant de cette même année paraissent deux Traités : *Neue Geometrie des Raumes* de Plücker (2) et *Geometrie der Lage* (3) de Reye, qui ont eu pour effet d'augmenter largement l'influence de la Géométrie sur l'Algèbre. A ce sujet, nous devons mentionner, comme modèle, le travail remarquable de Klein (4) (1868) dans lequel ce dernier applique à un faisceau de formes quadratiques la réduction précitée de Weierstrass, afin de répartir en plusieurs espèces les complexes linéaires du second ordre.

Le théorème de Gordan sur le nombre fini des systèmes de formes une fois démontré, il y avait à faire une étude analogue pour d'autres formes particulières. Cela donna lieu à une foule de

(1) Le premier Cahier du premier Tome (compte rendu de l'année 1868) parut en février 1871. A partir du Tome XX, les *Fortschr. der Math.* sont publiés par Lampe avec la collaboration, etc.

(2) Le tome II a été publié l'année suivante par Klein.

(3) Ouvrage traduit en français par O. Chemin. Paris, 1881, chez Dunod, éditeur.

(4) *Dissertation Bonn*, reproduite dans les *Math. Ann.*, XXIII, p. 539-578.

travaux auxquels Clebsch et Gordan prirent part en première ligne, et nécessita la création d'une nouvelle publication, des *Mathematische Annalen* (premier Cahier, décembre 1868) qui, dès lors, a toujours particulièrement favorisé notre théorie.

DÉLIMITATION DU SUJET (¹).

Nous adopterons comme bases du présent exposé les deux directions fondamentales que nous venons d'indiquer : l'*équivalence* et l'*affinité des formes* (Formenverwandtschaft).

Il n'y a guère de branche en Mathématiques dans laquelle la théorie des transformations linéaires n'ait pénétré avec succès : aussi est-il nécessaire de bien délimiter le champ de nos considérations.

Depuis 1870 les travaux (²) de Klein et de Lie ont eu spécialement pour but de montrer comment les propriétés des expressions qui restent invariantes pour une classe quelconque de transformations étaient essentiellement définies par le *caractère du groupe* de ces dernières, c'est-à-dire par la propriété particulière de la multiplicité finie des transformations qui se reproduit toujours pour une combinaison quelconque de celles-ci.

Dans le cas des transformations linéaires, le caractère du groupe ressort d'une façon très nette, car il est évident *a priori* que deux transformations linéaires, effectuées l'une après l'autre, peuvent toujours être remplacées par une seule. A chaque groupe de substitutions linéaires des variables correspondrait à la rigueur une théorie spéciale (³) des invariants; aussi ne prendrons-nous en considération que les principales classes.

---

(¹) L'ordre adopté pour les citations de ce paragraphe et du suivant n'a qu'un caractère provisoire.

(²) *Voir*, par exemple, *Math. Ann.*, IV, p. 50-84, 1872, et particulièrement KLEIN, *Erlanger Programm* de 1872.

Dans ce qui suit, nous aurons souvent à renvoyer au Traité de LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, II et III, Leipzig, 1888, 1890 et 1893, publié par Engel. Nous le citerons pour abréger suivant LIE-ENGEL. *Voir aussi* LIE-SCHEFFERS, *Anwendungen der Gruppentheorie*, Leipzig; 1893.

Comparer à cela la part que prend Kronecker dans cette question fondamentale, voir *Berl. Ber.*, p. 99 et suivantes, 1890.

(³) Il est vrai que dans ce sens il n'a été produit encore que fort peu de chose,

En Algèbre, on examine surtout les formes dont les coefficients sont considérés ou comme indépendamment variables ou comme dépendant d'un certain nombre de paramètres arbitraires : d'une façon analogue, on peut également envisager comme variables continues les coefficients de la substitution linéaire à laquelle on soumet les variables de la forme. Dans ce cas, on aura un *groupe continu et fini* ([1]).

Cependant cette règle présente des exceptions importantes. Ainsi pour les formes transformables linéairement en elles-mêmes, il se présente des substitutions dont le nombre est fini et dont les coefficients possèdent par conséquent des valeurs numériques fixes. Ces groupes, portant le nom de *groupes de Galois*, se présenteront aussi dans le problème de l'équivalence. Ils établissent en même temps un lien avec la théorie des équations.

Par contre, dans la théorie des nombres et dans les branches qui en dépendent (dans la théorie moderne des fonctions automorphes), la variabilité des coefficients des groupes de transformations se trouve réglée par les lois arithmétiques; cette partie rentre donc dans le champ des variables discontinues.

Les invariants (arithmétiques et transcendants) qui appartiennent à ces sortes de groupes *discontinus* ([2]) demandent à être traités par des méthodes essentiellement différentes de celles qui se présentent en Algèbre; d'ailleurs les problèmes qui s'y rattachent prennent une autre direction, aussi ne ferons-nous qu'effleurer ce sujet.

Il en est de même des nombreuses recherches sur les formes et équations différentielles obtenues en soumettant les variables indépendantes à des transformations absolument quelconques. Dans ce cas les différentielles des variables se transforment bien encore

---

car les méthodes développées jusqu'ici font, soit directement, soit indirectement, un usage continuel de différentiations par rapport aux coefficients de substitutions, ces derniers étant par conséquent pris dans toute leur généralité.

Tout récemment Maurer a caractérisé d'une façon générale les différentes classes de groupes de substitutions (*Journ. für Math.*, CVII, p. 89-116; 1891).

([1]) Pour ce qui est de la répartition des groupes de transformations, *comparer* Lie-Engel, I, Introduction.

([2]) A ce sujet, nous renvoyons brièvement aux travaux de Poincaré et Picard, d'une part, et à ceux de Klein, Hurwitz, Fricke, Bianchi, Stouff, etc., d'autre part.

linéairement et l'on pourra encore jusqu'à un certain point [1] appliquer la théorie algébrique des invariants, mais les coefficients de substitution contiennent les fonctions des variables elles-mêmes, dont le caractère arbitraire n'est restreint que par certaines conditions d'intégrabilité.

Nous ne nous arrêterons donc à ces *groupes infinis* que dans certains cas où leur caractère spécifique n'intervient pas et où l'on peut mettre en évidence les développements de la théorie des formes.

Dans le champ de l'Algèbre proprement dite, il convient même de faire certaines restrictions.

Depuis les travaux remarquables de Cremona, d'une part, et ceux de Riemann, d'autre part, la théorie des courbes et des surfaces algébriques (c'est-à-dire celle des fonctions à une ou à deux variables) offre une série de propriétés importantes, ne dépendant ni de substitutions linéaires des variables, ni en général de transformations (algébriques) uniformes.

Il est vrai qu'en principe ces dernières peuvent être ramenées à des transformations linéaires [c'est-à-dire aux $\varphi$-*Gebilde* [2]]; cependant l'examen des questions de ce genre, au point de vue de la théorie des invariants projectifs, n'a été entrepris que récemment.

Inversement, certaines questions, dépassant dans une autre voie les limites de l'Algèbre, sont inévitables.

Un des théorèmes les plus importants de Lie indique que l'on peut toujours *prolonger* [3] le champ d'un groupe de transformations continu et fini, en lui joignant les dérivées (jusqu'à un ordre quelconque) des variables non indépendantes prises par rapport aux variables indépendantes. Les invariants de cette nature, appelés *invariants différentiels,* présentent, si le groupe primitif est projectif, une grande analogie avec les invariants ordinaires. Ceci justifie donc la place que nous accordons sur ce

---

(1) Lie lui-même, qui a le plus examiné le problème en question, ne s'étend pas davantage sur les considérations relatives à la théorie des formes.

(2) *Voir* pour des développements à ce sujet, par exemple, le Traité de Klein-Fricke, *Modulfunktionen*, IIIe Partie, Chap. II, Leipzig, 1890, et, pour le cas particulier du genre $p = 3$, Wiltheiss, *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 1-13; 1891.

(3) Lie-Engel, I, Chap. XXV.

point aux travaux de Halphen et de Sylvester et des disciples qu'a formés ce dernier.

Enfin, quant aux applications de notre théorie aux autres branches mathématiques, ce dont l'étendue exigerait un rapport spécial, il ne peut être question que de certains points qui nous paraissent tout particulièrement intéressants et qui permettront par là même d'illustrer et de donner plus de vie à ce rapport.

Si, de cette façon, le champ des substitutions projectives se présente comme relativement restreint, son importance cependant se montrera dans des directions très diverses.

D'ailleurs la méthode spécifique développée ici pourra précisément servir de modèle pour d'autres théories.

Non seulement l'étude des substitutions linéaires et de leurs invariants forme une introduction naturelle à celles des transformations plus générales, mais encore on se proposera toujours, par une marche inverse, de ramener au premier cas ces problèmes plus généraux.

A ce sujet rappelons seulement qu'à tout groupe continu et fini correspond un groupe projectif, isomorphe par rapport au premier, et que le problème de la détermination des groupes d'une structure donnée appartient précisément à la théorie des invariants de certaines formes trilinéaires.

### DÉVELOPPEMENT PAR DEGRÉ DE LA NOTION D'INVARIANCE.

Étant donné un système de formes, si l'on soumet les différentes séries de variables à un certain groupe de substitutions linéaires, ces dernières représentent un groupe de substitutions (holoédriquement isomorphe) des coefficients donnés. Tout invariant homogène de ce groupe de coefficients, c'est-à-dire toute fonction analytique des coefficients, homogène par rapport à chaque série de coefficients, qui ne change pas pour les transformations du groupe, serait, dans le sens le plus général du mot, un *invariant absolu* du système de formes.

En particulier, si le groupe primitif des variables est le groupe projectif général (les coefficients étant de nature quelconque), les invariants rationnels du groupe de coefficients sont les fractions, déterminées par Aronhold, dans lesquelles les numérateurs et les

dénominateurs correspondent aux invariants ordinaires (ou relatifs) entiers et rationnels du système de formes.

Si donc on veut faire entrer dans la définition ci-dessus ces dernières formes (et les invariants relatifs en général), il suffit de remplacer le groupe des variables par le sous-groupe que l'on obtient en donnant au déterminant de la substitution des premières la valeur fixe un.

Après ces considérations qui permettent d'envisager à un point de vue unique les cas spéciaux indiqués plus bas, nous revenons au développement historique en traçant brièvement les principales étapes.

On partit naturellement des fonctions entières et rationnelles des coefficients, qui, par une transformation linéaire des variables, se trouvaient reproduites à une puissance (entière) près du module de la substitution. Le cercle de ces formes fut bientôt agrandi en ce que l'on introduisit encore comme arguments les variables primitives et leurs congrédientes.

A côté de cette définition relative plutôt à la forme, vient se placer, plus tard, cette autre plus matérielle de Cayley qui considère les formes invariantes comme solutions entières et rationnelles de leurs équations différentielles.

Il vient ensuite une troisième définition due à Clebsch, envisageant ces formes comme un ensemble de produits symboliques.

De plus, dans la première manière de définir les invariants, on a supprimé, pour le facteur provenant de la transformation, le caractère spécial et inutile d'être une puissance du module de la substitution, en exigeant simplement qu'il dépende d'une façon générale des coefficients de la transformation (mais non de ceux de la forme); cela résulte d'ailleurs de la première propriété citée, comme l'ont démontré plusieurs auteurs (1).

Puis, on examina les formes primitives contenant plusieurs sé-

---

(1) CLEBSCH, *Binäre Formen*, p. 306; 1872. GRAM, *Math. Ann.*, VII, p. 234; 1874. D'OVIDIO, *Batt. Giorn.*, XV, p. 187-192; 1877. CAPELLI, *Mem. d. Linc.*, p. 582; 1882. HOELDER, *Böcklen. Mitt.*, I, p. 59-65; 1884. ELLIOT, *Mess.*, XVI, p. 5-8; 1888. MANSION, *Mess.*, XVI, p. 127-129; *Brux. S. sc.*, XII, A, p. 47-49; 1887-88. STUDY, *Methoden*, p. 32 et suivantes; 1889. DERUYTS, *Théorie générale des formes algébriques*, p. 49; Liége, 1891. *Voir* aussi la démonstration de Kronecker, *Berl. Ber.*, p. 609 et suivantes; 1889.

ries de variables, celles-ci étant soumises seulement aux transformations congrédientes ou contragrédientes.

En 1872 (¹), Clebsch établit parallèlement les variables qui correspondent aux différents éléments du premier ordre dans l'espace à $n$ dimensions.

Plus tard, Gordan (²) et Capelli (³) ont été conduits à considérer les formes que l'on obtient en effectuant sur plusieurs séries de variables des substitutions indépendantes entre elles.

Tant que les formes invariantes, déduites d'un système donné de formes, sont entières et rationnelles par rapport aux différentes séries de variables, on peut les obtenir facilement, d'après Clebsch et Aronhold, au moyen de la notion primitive de l'invariance (dans le sens étroit) : dans ce but, il suffit d'adjoindre au système donné des formes linéaires auxiliaires.

Une généralisation effective ne devient possible que si l'on étend cette notion fondamentale de l'invariance au champ irrationnel et transcendant. Si nous restons dans les limites de l'Algèbre, nous n'avons principalement à tenir compte que de racines d'équations irréductibles dont les coefficients sont des invariants entiers et rationnels. Les recherches les plus récentes (³) de Hilbert, Klein et Gordan ainsi que celles de Frobenius montrent que de telles formes irrationnelles se présentent effectivement si l'on suppose la forme primitive donnée sous une certaine forme canonique irrationnelle ou, ce qui revient au même, si l'on fait une extension convenable du champ primitif de rationnalité des coefficients.

Dans son Traité (⁴) (1889), Study a fait ressortir avec beaucoup de clarté les différents degrés de la notion de l'invariance, en

(¹) *Göttinger Abh.*, XVII, p. 1-62.

(²) Gordan, dans le cas de la résolution des équations du cinquième ordre, *Math. Ann.*, XIII, p. 375-404, en part. p. 379; 1878.

Capelli, dans l'étude des formes binaires doublement quadratiques, *Batt. G.*, XVII, p. 69-148; 1879.

Le système étudié par Gordan dans le cas d'une certaine forme doublement linéaire permet à Klein et Fricke (*Modulfunktionen*, t. II, p. 127 et suivantes; 1892) d'établir des équations modulaires. *Comparer* Klein, *Leçons sur l'icosaèdre*, p. 232 et suivantes, et *Leipziger Dissertationen*, Fischer (1885) et Fiedler (1885), ou encore *Wolf. Zeit.*, XXX, p. 129-229.

(³) *Voir* au Chap. II, B. de ce Rapport.

(⁴) *Consulter* d'abord les *Leipzig. Ber.*, 1887, puis l'introduction de son Traité, *Methoden*, Leipzig, 1889 (*Théorie des formes ternaires*).

les plaçant en parallèle avec les bases arithmétiques des différentes espèces de grandeurs algébriques, d'après Kronecker. En particulier, cet habile géomètre réussit à présenter une conception bien précise de la notion si délicate des covariants irrationnels.

Christoffel ([1]) et, tout récemment, Maurer ([1]), ont fait des efforts dans une autre voie, en considérant des invariants tels, le groupe des coefficients restant projectif, que les expressions donnant la transformation des variables deviennent rationnelles. La forme caractéristique des équations différentielles reste encore la même.

Enfin, il faut encore mentionner la détermination des formes invariantes, entières et rationnelles, basée sur leurs sources. Ces dernières sont les invariants d'un certain sous-groupe du groupe primitif et satisfont, par conséquent, à une partie des équations différentielles des invariants ordinaires.

Ces dernières années, Mac-Mahon et Cayley ont établi, pour le cas des formes binaires, une théorie spéciale des péninvariants (seminvariants). En vertu de leur méthode symbolique assez curieuse, cette théorie est en relation étroite avec celle des fonctions ([2]) symétriques. D'un autre côté, Sylvester et Perrin ont réduit ces formes à des expressions encore plus simples ([3]).

La signification des sources permet, d'après Faà de Bruno ([4]) et Hilbert ([5]), de déterminer les formes correspondantes à l'aide d'un procédé unique que l'on peut même étendre aux formes de plus de deux variables. (*A suivre*).

---

([1]) Christoffel, *Math. Ann.*, XIX, p. 280-290; 1881. Maurer, *Münch. Ber.*, p. 103-150; 1888, et *Journ. für Math.*, CVII, p. 89-116; 1891.

([2]) Cayley, *Quart. J.*, XIX, p. 131-138; 1883. *Amer. J.*, VII, p. 1-25, p. 59-73; 1884. Mac-Mahon, *Amer. J.*, VI, p. 131-164; 1883; t. VII, p. 26-47; 1884; t. VIII, p. 1-18; 1885.

([3]) Sylvester, *Amer. J.*, V, p. 79-137; 1882; Perrin, *Bull. Soc. Math.*, XI, p. 88-107; 1883.

([4]) *Amer. J.*, III, p. 154-164; 1882, ou *Journ. für Math.*, XC, p. 186-188; *cf.* Stroh, *Math. Ann.*, XXII, p. 402; 1883.

([5]) *Math. Ann.*, XXX, p. 15-29, en part. p. 17.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KRONECKER (L.). — Vorlesungen ueber Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. — Erster Band : *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale.* Herausgegeben von *Netto.* 1 vol. in-8°; x-345 p. Leipzig, Teubner, 1894.

La publication des leçons de Kronecker ne peut manquer d'être bien accueillie, et il faut se réjouir qu'on n'ait point tardé à l'entreprendre. C'est M. Netto qui s'est chargé du premier volume, relatif à la théorie des intégrales simples et multiples, et l'on peut souhaiter qu'il n'en reste pas là. Le travail d'arrangement qu'il a eu à faire n'était pas sans difficultés : Kronecker est revenu en effet, dans son enseignement, cinq fois sur ce même sujet; dans les notes, évidemment très complètes, que M. Netto a eues à sa disposition, dans les papiers de Kronecker, dans celles de ses publications qui se rapportaient au sujet, il a fallu choisir, grouper, coordonner. M. Netto a su nous donner un livre qui n'est nullement un recueil de morceaux séparés, mais où la pensée se suit et se développe : il semble d'ailleurs avoir conservé avec un soin pieux le style même du maître, ses digressions pleines d'aperçus historiques, de vues philosophiques et où se mêle parfois un grain d'ironie et de malice. A lire ces leçons, on comprend l'action que Kronecker a eue sur ses auditeurs.

Sans doute, ce Volume ne renferme rien d'absolument nouveau et Kronecker a développé ailleurs, souvent avec plus d'étendue, la plupart des sujets qui y sont traités ; mais il y a grand plaisir à le lire sous cette forme ; l'enchaînement de ses idées se saisit mieux que dans ses communications ; il se laisse aller d'ailleurs, de temps en temps, à dire le fond de sa pensée, et c'est tout profit pour le lecteur.

Le Volume contient dix-neuf leçons dont nous allons très sommairement indiquer les sujets. Le problème du Calcul intégral est posé comme le problème inverse du Calcul différentiel ; il est rattaché à la recherche de la limite d'une somme ; Kronecker insiste avec le plus grand soin sur la notion de limite ; il donne la con-

dition de Riemann pour qu'une fonction soit intégrable entre des limites données, étudie la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$, rattache à cette dernière question la notion d'intégrale double, traite du changement de variable et donne l'application classique à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$; il s'arrête sur l'intégrale curviligne, portant sur une différentielle exacte, et relative à un contour fermé, établit de diverses manières la proposition fondamentale relative à de telles intégrales, proposition dont le théorème de Cauchy sur les intégrales à variable complexe n'est qu'une simple transformation : en quelques mots heureux, il caractérise le rôle et l'importance de ce théorème. Il traite ensuite avec détail des deux théorèmes de la *moyenne*. Trois leçons très intéressantes sont consacrées à l'intégrale de Dirichlet et aux séries trigonométriques. Après avoir déduit la formule

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x_1} f(x)\,\frac{\sin wx\pi}{x}\,dx = f(0)\,\frac{\pi}{2}$$

du second théorème de la moyenne, et avoir traité des conditions sous lesquelles elle est valable, il donne des indications sur un Mémoire d'Hamilton qui remonte à 1843, et qui semble trop peu connu. Avant M. P. du Bois-Reymond, Hamilton avait eu l'idée de mettre à la place du sinus d'autres fonctions, *oscillant* comme le sinus, et qu'il appelle des *fluctuasing functions*. Kronecker, après avoir établi la formule fondamentale de Fourier et de Dirichlet, rattache à cette formule l'intégrale de Poisson, critique la démonstration de Lagrange, expose rapidement celle de Dirichlet et donne diverses applications. En particulier, la formule bien connue

$$\pi\left(\frac{1}{2} - v\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2nv\pi}{n} \qquad (0 < v < 1),$$

qu'il est aisé d'obtenir directement en partant du développement de $\log(1 - re^{2v\pi i})$ suivant les puissances de $r$, conduit inversement à une nouvelle démonstration de la formule de Fourier; une autre application amène l'auteur à parler des nombres de Ber-

noulli, auxquels il est conduit par la considération des sommes

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{\sin 2\alpha x\pi}{(\alpha\pi)^{2n-1}}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{\cos 2\alpha x\pi}{(\alpha\pi)^{2n}}.$$

Une autre belle application se rapporte aux *sommes de Gauss*, dont l'évaluation fournit une démonstration si simple de la loi de réciprocité.

Deux leçons sont ensuite consacrées aux quadratures mécaniques et aux formules sommatoires, notamment à la formule d'Euler-Maclaurin. Kronecker expose rapidement les recherches de Newton et de Cotes, de Gauss et de Jacobi sur les quadratures approchées. La formule de Maclaurin peut être regardée en un certain sens comme répondant au problème inverse de celui que résolvent ces recherches; Kronecker l'obtient d'abord par induction; il donne quatre formes du reste. En partant de la relation évidente

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)g^{(n)}(-x)\,dx$$
$$= \sum_{h=1}^{h=n} \int_{x_0}^{x} d[f^{(h-1)}(x)g^{(n-h)}(-x)],$$

dont il indique d'ailleurs diverses applications simples et intéressantes, Kronecker établit la formule sommatoire générale

$$\sum_{k=0}^{k=r} f(x_k)[\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_{k+1})]$$
$$= \sum_{k=1}^{k=r} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi'_k(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)g(-x)\,dx,$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=n} [f^{(h-1)}(x_0)g^{(n-h)}(-x_0) - f^{(h-1)}(x_r)g^{(n-h)}(-x_r)],$$

où l'on doit supposer

$$\varphi_0(x_0) = 0, \qquad \varphi_{r+1}(x_r) = 0,$$

où $\varphi_1(x)\varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$ sont des fonctions données admettant des dérivées entre $x_0$, $x_r$ et où enfin la $n^{\text{ième}}$ dérivée $g^{(n-1)}(x)$ de

la fonction $g(x)$ est déterminée par les conditions

$$g^{(n-1)}(x) = \varphi_k(x), \quad \text{pour} \quad x_{k-1} < x < x_k,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

On déduit de là, en particulier, la forme qu'a donnée Poisson à la formule de Maclaurin dans son Mémoire *Sur le calcul numérique des intégrales définies*, et cette formule même fournit à Kronecker l'occasion de diverses remarques intéressantes.

L'auteur établit ensuite les conséquences les plus importantes pour la théorie des fonctions du théorème de Cauchy sur l'intégrale, prise le long d'un contour, d'une fonction d'une variable complexe. En dehors de ces applications, fort classiques, signalons un moyen très élégant pour parvenir, en considérant l'intégrale

$$\int \frac{e^{\frac{2\pi i}{n} z^2}}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz,$$

à l'évaluation des sommes de Gauss. Il passe ensuite aux fonctions $\mathfrak{I}$ définies par la relation

$$\mathfrak{I}(\zeta, w) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left[\frac{n^2}{4} w - n\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)\right]\pi i};$$

le fait que le rapport

$$\frac{\mathfrak{I}(\zeta, w)}{-i q^{\frac{1}{4}}(z - z^{-1}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2})},$$

où l'on suppose $z = e^{\zeta\pi i}$, est indépendant de $\zeta$, est déduit de ce que ce rapport reste fini quel que soit $\zeta$, et qu'il est toujours uniforme et continu, ainsi que sa dérivée.

La considération de la fonction

$$\mathrm{F}(q, x, y) = \frac{\sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu q^{\frac{1}{4}\mu^2} \times \sum (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\nu^2} (x^\nu y^\nu - x^{-\nu} y^{-\nu})}{\sum (-q)^{n^2} x^{2n} \times \sum (-q)^{n^2} y^{2n}},$$

où $m$, $n$ doivent prendre toutes les valeurs entières positives et négatives et $\mu$, $\nu$ toutes les valeurs impaires et positives et celle de

l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(q, x, z)}{z-y}\,dz,$$

étendue à la limite d'un anneau circulaire concentrique à l'origine, anneau dont la circonférence intérieure s'approchera du point o, tandis que la circonférence extérieure grandira indéfiniment, permet d'établir la relation

$$\frac{\mathfrak{I}'(0, w)\,\mathfrak{I}(\xi+\eta, w)}{\mathfrak{I}\left(\xi+\frac{1}{2}w, w\right)\mathfrak{I}\left(\eta-\frac{1}{2}w, w\right)} = 2\pi i\, e^{\xi+n\pi i+\frac{1}{2}w\pi i}\,F(q, x, y),$$

où $\xi$, $\eta$ sont liés à $x$, $y$ comme $\zeta$ à $z$; cette relation contient la suivante

$$\frac{\mathfrak{I}'(0)\,\mathfrak{I}_1(\xi+\eta)}{\mathfrak{I}_1(\xi)\,\mathfrak{I}_1(\eta)} = 4\pi\sum_{\mu,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu}\sin(\mu\xi+\nu\eta)\pi,$$

$$(\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots)$$

dont Kronecker donne ensuite une démonstration arithmétique, et dont on connaît le rôle capital dans la théorie des fonctions elliptiques.

Deux leçons se rapportent ensuite à l'étude des intégrales de la forme

$$\int \frac{e^z}{z} f(z)\,dz,$$

et en particulier à celles pour lesquelles $f(z)$ est égale à 1; on rencontre tout d'abord le *logarithme intégral* défini par l'égalité

$$\operatorname{li} e^{-\xi} = \int_{-\infty}^{-\xi} e^{x}\frac{dx}{x},$$

où $\xi$ est un nombre positif, et qui fournit, pour la fonction $\operatorname{li} e^{-\xi} - \log\xi$ un développement intéressant en série entière, puis l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi+yi}\, d\log(\xi+yi) = \frac{1+\operatorname{sgn}\xi}{2},$$

où le paramètre $\xi$ et la variable d'intégration $y$ sont réels, et où $\operatorname{sgn}\xi$ désigne, selon l'habitude du maître, $+1$ ou $-1$, suivant que $\xi$ est positif ou négatif. A cette égalité se rattachent, entre

autres, les formules

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int_0^\infty e^{\varepsilon x}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,b,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varepsilon x}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,dx = \frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(\alpha-\beta)]$$

$$(\alpha,\ \beta > 0);$$

qui seront d'un usage continuel dans les dernières leçons sur les intégrales multiples, pour permettre, par l'emploi d'un *facteur de discontinuité,* de ramener les limites d'intégration à être $-\infty$ et $+\infty$. Une première et importante application de cette dernière notion concerne la détermination des coefficients $c_n$ d'une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{-z\lambda_n},$$

dont la somme $z\mathrm{F}(z)$ est donnée, et où les $\lambda_n$ désignent des nombres positifs qui croissent avec $n$. Les dernières leçons sont consacrées aux intégrales multiples; l'auteur traite d'abord du changement de variable et de l'extension de la notion de volume à une multiplicité à $n$ dimensions. Il est amené, en généralisant un peu le problème, à considérer les intégrales $n^{\text{uples}}$ de la forme

$$\int e^{-p\sum\limits_1^n z_k}\prod_1^n z_k^{q_k-1}\,dz_k$$

$$\left(z_k > 0, \qquad \sum_1^n z_k < 1, \qquad p,\ q_k > 0\right),$$

que l'introduction du facteur de discontinuité permet immédiatement de réduire à des intégrales simples. Il est ainsi conduit à la fonction Γ, dont il fait une étude rapide. Traitant ensuite de la différentiation d'une intégrale multiple qui contient un paramètre, il est amené à généraliser la notion d'*aire;* il développe les formules de Green et leurs conséquences essentielles, toujours en supposant l'intégrale $n^{\text{uple}}$. Les quatre dernières leçons se rap-

portent au *potentiel*, en restant toujours dans la même généralité. Après avoir traité de l'équation de Poisson, en discutant soigneusement les hypothèses qu'impliquent les diverses démonstrations, et du potentiel mutuel de deux masses, Kronecker développe la solution de ce problème : Déterminer une fonction connaissant sa valeur par tous les points de la limite d'une multiplicité sphérique $n^{\text{uple}}$ et son $\Delta$ pour tous les points intérieurs. Il donne, dans cet ordre d'idées, la généralisation de la fonction de Green et des fonctions sphériques. Il développe ensuite les propriétés caractéristiques du potentiel (Dirichlet), et en donne l'application à la vérification de l'expression du potentiel pour une multiplicité ellipsoïdale à $n$ dimensions. Il termine enfin par le calcul de cette même expression au moyen du facteur de discontinuité. Ce calcul est d'abord présenté largement, sans tenir compte des inquiétudes que peuvent faire naître les passages à la limite. Chaque « point critique » de la démonstration est ensuite étudié en détail : l'auteur parvient à mettre la différence entre le potentiel cherché et son expression finale sous forme d'une somme de termes dont on montre en toute rigueur que chacun peut être supposé nul.

A ces leçons M. Netto a joint quelques remarques brèves, la plupart d'un caractère bibliographique : on y trouvera, en particulier, l'indication des Notes ou Mémoires dans lesquels Kronecker a développé les sujets traités dans ces leçons : ces indications montrent combien étaient mêlés, chez l'illustre savant, l'enseignement et le travail de recherche. Il enseignait ce qui était l'objet de sa préoccupation actuelle, ce qu'il venait de découvrir, peut-être même ce qu'il allait découvrir, et cette conversation sur son travail, il la reprenait volontiers chez lui, plus vive et plus familière, entouré de ses élèves, qu'il recevait volontiers le soir, avec une affabilité dont le souvenir a été gardé, même dans ce pays-ci.

J. T.

---

MORITZ CANTOR. — VORLESUNGEN UBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. — Dritter Band, erste Abtheilung. 252 pages in-8°. Leipzig, Teubner, 1894.

Le savant professeur d'Heidelberg déploie en ce moment une surprenante activité ; depuis deux ans, il nous a donné, avec le

second volume de son Histoire de la Mathématique (depuis 1200 jusqu'en 1668), une réédition de son premier tome (depuis l'origine jusqu'en l'an 1200). Voici maintenant un nouveau fascicule du troisième et dernier volume, qu'il se propose d'arrêter à l'année 1759 (date des premiers travaux de Lagrange) et dont il annonce comme prochaine la publication intégrale.

La partie qui en est déjà parue va de l'année 1668 (débuts scientifiques de Leibniz et de Newton) à l'année 1699 (commencement des débats de priorité pour l'invention du Calcul infinitésimal). Elle nous offre donc, en dehors d'une revue complète des travaux mathématiques de la même époque, l'histoire de cette invention capitale et de ses premiers développements. L'auteur, avec le soin minutieux qui le caractérise quand il s'attache à préciser les questions qui offrent un intérêt spécial, s'est particulièrement efforcé de bien établir l'ordre chronologique des découvertes, pour faire ressortir la part de chaque savant et l'influence qu'il a pu exercer sur d'autres. Il a singulièrement réussi dans cette tâche, et son œuvre apporte, sur bien des points obscurcis par la passion et la rivalité nationale, une lumière inattendue.

Je n'ai pas besoin de dire qu'il est rigoureusement impartial et qu'il ne cherche nullement à déguiser les petites manœuvres qui entachent le caractère même d'un Leibniz ou d'un Newton; en tous cas, non seulement il affirme la complète indépendance du premier, mais il invoque de très graves motifs pour réduire l'étendue de ce qui a été présenté comme trouvé par Newton avant les publications faites par Leibniz.

Je ne puis avoir la prétention de retracer ici une histoire qui doit être étudiée dans le détail, ainsi que l'a fait M. Cantor; je me bornerai à signaler l'ingénieuse supposition qu'il a émise pour expliquer le singulier revirement qui eut lieu dans les relations entre Leibniz et les Anglais; il montre que Newton appartenait au parti tory, tandis que Leibniz eut, pour l'électeur de Hanovre, à se mêler activement de la politique anglaise dans le sens whig. De là des froissements qui se traduisirent facilement en rupture ouverte, dès que les questions personnelles furent mises en jeu.

J'aurais également à soumettre à l'illustre historien quelques objections de détail. Page 66, il remarque que la formation des coefficients du binome par addition (comme nombres figurés)

était connue depuis Michel Stifel, mais il attribue à Newton la découverte de leur formation par multiplication. Or il a lui-même (vol. II, p. 712) signalé cette formation comme explicitement donnée par Pascal pour les nombres figurés, et il est bien clair, par les applications à la sommation des puissances numériques, que Pascal, comme tous les vrais mathématiciens de l'époque, savait parfaitement quels nombres figurés formaient les coefficients d'un binome. La priorité de la découverte appartient d'ailleurs à Fermat qui, dès le 4 novembre 1636, avait communiqué à Roberval la loi de formation par multiplication.

C'est également par inadvertance que M. Cantor dit (page 93) que la correspondance de Fermat, Brouncker, Frenicle et Wallis ne fut publiée qu'en 1693 dans l'édition des Œuvres de Wallis. Elle avait paru, par les soins de ce dernier, dès 1658 (vol. II, p. 708).

Pour l'histoire des idées de Newton, le point essentiel serait évidemment de savoir si la *Methodus fluxionum*, rédigée en 1671, mais publiée seulement en 1736, n'a pas été modifiée ou augmentée par l'auteur pendant qu'il la gardait en manuscrit. M. Cantor signale la théorie des rayons de courbure comme dépendant des découvertes de Huygens, d'autre part la détermination des points d'inflexion comme empruntée à Fermat; il y aurait donc là, d'après lui, des additions postérieures, la première à 1673 (date de la publication de l'*Horologium oscillatorium*), la seconde à 1679 (date des *Varia Opera*).

Cette conclusion peut être révoquée en doute. Nous savons aujourd'hui, par la correspondance de Huygens, que l'application des arcs de cycloïde aux horloges a été connue d'assez bonne heure en Angleterre pour que Brouncker, par exemple, essayât, dès 1662, de démontrer le tautochronisme de la cycloïde. Mais cette application donnait, pour le développement d'une courbe, un exemple pratique qui ne devait pas moins émerveiller les géomètres que la propriété du tautochronisme. Il n'y a dès lors rien d'étonnant à ce que Newton ait été conduit à étudier ce problème et qu'il ait ainsi retrouvé, bien avant la publication de l'*Horologium oscillatorium*, ce que Huygens avait déjà découvert.

Quant aux points d'inflexion, Fermat en a traité dans un écrit, *Doctrinam tangentium*, dont la date, si elle ne peut être précisée,

est certainement antérieure à la mort de Descartes; cet opuscule fut communiqué en manuscrit aux correspondants de Fermat à Paris et doit également avoir été envoyé en Italie. Qu'une copie soit passée en Angleterre par les soins de Fermat, je le considère à la vérité comme très douteux, quoique Digby eût pu servir d'intermédiaire; mais il n'en est pas moins clair que la solution donnée par Fermat d'un problème aussi intéressant que celui de l'inflexion a pu être connue, d'une façon ou d'autre, par Newton bien avant l'impression des *Varia Opera*.

M. Cantor insiste à bon droit sur la portée de la déclaration de Leibniz, affirmant qu'il a trouvé l'idée du triangle différentiel caractéristique des courbes, non pas dans les *Lectiones* de Barrow, mais dans le *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal. Des témoignages précis de cette nature donnent une certitude à laquelle ne permettent pas d'atteindre les conjectures sur les influences qui ont déterminé telle ou telle découverte. Ainsi M. Cantor admet que ce sont les travaux de Huygens qui ont servi de guide à Lahire pour la théorie des épicycloïdes; il est bien clair que, pour les développées, le second est dans une dépendance étroite du premier. Mais le principe du centre instantané de rotation dans le roulement (pour le tracé des tangentes) n'appartient pas à Huygens; il est exposé très clairement dans la lettre de Descartes à Mersenne du 23 août 1638 (Clerselier, III, 65), et il est très probable que, si Huygens en était en possession avant la publication de la correspondance de Descartes en 1667, ce principe lui avait été suggéré par l'élégante solution cartésienne du tracé de la normale à la cycloïde, solution qui était bien connue depuis longtemps.

PAUL TANNERY.

---

VIVANTI (GIULIO). — IL CONCETTO D'INFINITESIMO E LA SUA APPLICAZIONE ALLA MATEMATICA, SAGGIO STORICO. 134 p. in-8°. Mantoue, Mondovi, 1894.

Cette brochure renferme un exposé très clair, bien méthodique et appuyé de nombreux textes heureusement choisis, des conceptions théoriques auxquelles les infiniment petits ont historiquement donné lieu, et des conflits amenés par la divergence de ces conceptions jusqu'à l'achèvement de leur évolution.

Je saisis cette occasion pour remarquer qu'on se fait généralement une idée inexacte de la façon dont Fermat a été conduit à formuler sa règle pour le calcul des maxima et minima. Ainsi M. Vivanti répète, après bien d'autres, que cette règle de Fermat est la traduction arithmétique de la remarque de Képler, dans sa *Stereometria doliorum*, que, près du maximum ou du minimum, la variation est insensible; il répète aussi qu'en égalant, suivant le langage moderne, $f(x+\varepsilon) = f(x)$, Fermat n'établit qu'une approximation et que, s'il doit en tirer une relation rigoureusement valable, $f'(x) = 0$, il ne démontre nullement l'exactitude de ce résultat.

A prendre à la lettre le texte de la *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* ces assertions sont parfaitement vraies; mais nous savons aujourd'hui que la genèse des idées de Fermat a été tout autre. Il l'a lui-même très nettement exposée dans sa *Methodus de maxima et minima* (imprimée dans le Tome I de la nouvelle édition de ses Œuvres, p. 147 et suivantes); je vais reprendre cet exposé en me servant des notations modernes.

Soit à déterminer la valeur $x_1$ d'une variable $x$ en correspondance avec le maximum (ou minimum) $a$ d'une expression $f(x)$ rationnelle en $x$ [1]; Fermat part de ce fait algébrique que, si l'on égalait $f(x)$ à une valeur possible voisine de $a$, on aurait deux racines réelles voisines de $x_1$; pour $f(x) = a$, les deux racines deviendraient égales; au delà elles seraient imaginaires.

Il s'agit donc de faire en sorte que l'équation $f(x) = a$ ait deux racines égales à $x_1$, avec la condition $f(x_1) = a$. Pour cela, il faut et il suffit que l'expression $f(x) - f(x_1)$ soit divisible par $(x - x_1)^2$.

Descartes ramène, lui aussi, le problème des tangentes à la formation d'une équation ayant deux racines égales, mais il se sert, pour cette formation, de la méthode des coefficients indéterminés. L'artifice de Fermat est plus simple; il se borne à un simple développement, mais, pour le faciliter pratiquement, il fait

---

[1] La méthode de Fermat ne s'applique en principe qu'à des expressions rationnelles; il ne l'a étendue à celles qui contiennent des irrationnelles qu'au moyen de transformations purement algébriques; ce n'est qu'en Géométrie, pour trouver les tangentes des courbes transcendantes, comme la cycloïde, qu'il substituera l'un à l'autre deux infiniment petits infiniment voisins.

un changement d'inconnue. Posons $x = x_1 + y$; l'équation $f(x_1 + y) = f(x_1)$ doit avoir en $y$ deux racines égales à o. Si nous développons algébriquement

$$f(x_1) + y f'(x_1) + \frac{y^2}{2} f''(x_1) + \ldots = f(x_1),$$

il s'ensuit la condition

$$f'(x_1) = 0,$$

que l'on peut considérer maintenant comme une équation en $x_1$.

Les dérivées ne figurent ici, ainsi qu'on le voit, que comme des expressions purement analytiques, au sens de Lagrange; il n'y a ni infiniment petits ni limites; enfin, en tant que procédé donnant deux racines égales, et pour les expressions auxquelles elle est supposée applicable, la méthode est rigoureusement fondée.

Quant au postulat qui a servi de point de départ, que la racine double correspond à un maximum ou à un minimum, Fermat ne l'a nullement emprunté à Képler, dont probablement il n'avait pas lu les ouvrages; ce postulat est une simple induction, une généralisation d'une observation déjà faite par les Anciens sur les cas où l'équation $f(x) = a$, quadratique ou bicarrée, peut être résolue algébriquement en $x$, et où le maximum ou minimum $a$ se détermine dès lors par la condition que les radicaux ne soient pas imaginaires. Fermat avait trouvé cette observation dans Pappus, et quoique le traducteur Commandin n'en eût pas saisi le sens, elle était assez simple pour que nous voyions à la même époque Roberval, avant l'invention de sa méthode particulière, appliquer à la recherche des tangentes le procédé des Anciens pour la détermination du maximum ou minimum (Lettre du 11 octobre 1636; *Œuvres de Fermat*, t. II, p. 82).

L'induction était au reste, à cet égard, suffisamment d'accord avec l'intuition géométrique pour que les mathématiciens du temps n'en cherchassent pas davantage, et il est à peine utile de remarquer que les restrictions auxquelles cette induction doit être soumise correspondent précisément aux lacunes de la méthode de Fermat.

En résumé, la notion de l'infiniment petit a été introduite en Mathématiques par les méthodes de quadratures remontant à l'antiquité; le Calcul infinitésimal n'a été fondé que lorsque la

liaison entre le problème des quadratures et celui des tangentes a été reconnue; mais cette liaison n'a été constatée qu'assez tard et, semble-t-il, empiriquement, alors que depuis longtemps on pratiquait effectivement des différentiations de fonctions algébriques par des procédés purement analytiques, soit celui de Fermat, soit celui de Hüdde qui est déduit des principes de Descartes.

PAUL TANNERY.

---

# MÉLANGES.

## NOTE SUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES DE CONGRUENCES RECTILIGNES;

PAR M. ALPHONSE DEMOULIN,
Répétiteur à l'Université de Gand.

Nous considérons dans cette Note :

1° Les congruences sur les deux nappes de la surface focale desquelles les lignes asymptotiques se correspondent;

2° Les congruences telles que les lignes asymptotiques de l'une des nappes de la surface focale correspondent à un système conjugué tracé sur l'autre nappe.

Soient :

$(\Sigma_1)$ et $(\Sigma_2)$ les deux nappes de la surface focale d'une congruence rectiligne;

$F_1$ et $F_2$ les points focaux d'une droite quelconque de la congruence;

V l'angle des plans focaux relatifs à cette droite;

$R_1$ et $R'_1$ les rayons de courbure principaux de $(\Sigma_1)$ en $F_1$;

$R_2$ et $R'_2$ les rayons de courbure principaux de $(\Sigma_2)$ en $F_2$.

Les congruences de la *première classe* jouissent de la propriété suivante, à laquelle Ribaucour a fait allusion dans son *Étude sur les élassoïdes* et dont nous avons donné récemment une démonstration dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 29 janvier 1894) :

*Lorsque les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale d'une congruence, on a, pour toute droite de cette congruence,*

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4.$$

La réciproque de ce théorème a été énoncée et démontrée par M. Cosserat (*Comptes rendus*, séance du 12 février 1894) [1].

Enfin, M. E. Waelsch (*Comptes rendus*, séance du 2 avril 1894) a fait connaître la propriété suivante, qui caractérise les congruences de la *deuxième classe :*

*Pour toute droite d'une congruence telle que les lignes asymptotiques de l'une des nappes de la surface focale correspondent à un système conjugué tracé sur l'autre nappe, on a*

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = -\overline{F_1 F_2}^4,$$

*et réciproquement.*

Nous nous proposons de faire voir que les théorèmes de MM. Cosserat et Waelsch sont susceptibles de démonstrations géométriques fort simples. Pour être complet, nous reproduirons ici notre démonstration du théorème de Ribaucour, mais auparavant nous établirons plusieurs lemmes sur lesquels nous aurons à nous appuyer dans le cours de ce travail.

Lemme I. — *Soient* $F_1$ *et* $F_2$ *deux points pris arbitrairement sur une génératrice rectiligne* G *appartenant à une surface réglée* ($\Sigma$); V *l'angle des plans tangents en ces points;* $R_1$ *et* $R'_1$ *les rayons de courbure principaux de* ($\Sigma$) *en* $F_1$; $R_2$ *et* $R'_2$ *les rayons de courbure principaux de* ($\Sigma$) *en* $F_2$. *Entre ces différentes quantités existe la relation*

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4. \tag{1}$$

Soient O le point central de la génératrice G, $\beta$ son paramètre

(1) Il résulte de cette réciproque que les congruences ($\Gamma_1$) de notre Note des *Comptes rendus* sont identiques aux congruences de la première classe. Faisons observer, en outre, que les congruences ($\Gamma_2$), considérées dans la même Note, sont nécessairement de la première classe.

de distribution, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les angles que le plan tangent en O fait avec les plans tangents en $F_1$ et $F_2$. On a

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{OM_1}{\beta}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{OM_2}{\beta},$$

d'où, en soustrayant et observant que $\varphi_1 - \varphi_2 = V$,

$$(2) \qquad \frac{M_1 M_2}{\sin V} = \frac{\beta}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}.$$

On a, d'autre part ([1]),

$$R_1 R'_1 = -\frac{\beta^2}{\cos^4\varphi_1}, \qquad R_2 R'_2 = -\frac{\beta^2}{\cos^4\varphi_2},$$

d'où, par multiplication,

$$(3) \qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 = \frac{\beta^4}{\cos^4\varphi_1 \cos^4\varphi_2}.$$

La comparaison des égalités (2) et (3) donne la relation qu'il fallait établir.

Si l'on appelle $\tau_1$ et $\tau_2$ les rayons de torsion des asymptotiques qui passent respectivement par les points $F_1$ et $F_2$, on a, en vertu du théorème d'Enneper,

$$\tau_1^2 = -R_1 R'_1, \qquad \tau_2^2 = -R_2 R'_2,$$

et la formule (1) devient

$$(4) \qquad \tau_1 \tau_2 \sin^2 V = \overline{F_1 F_2}^2.$$

Cette égalité renferme, comme cas particulier, une propriété des courbes de M. Bertrand, reconnue par M. Schell (*voir*, à ce sujet, une Note de M. Mannheim, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 23 juillet 1877).

Lemme II. — *Si deux surfaces se touchent suivant une ligne* (C) *et si, en un point* M *de cette ligne, elles ont des courbures totales égales, ou bien la tangente en* M *à la ligne* (C) *sera une direction asymptotique commune aux deux surfaces, ou bien les deux indicatrices coïncideront.*

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 309.

Si la tangente $Mx$ à la ligne (C) est une direction asymptotique commune aux deux surfaces, le lemme est démontré; dans le cas contraire, la droite $Mx$ admet, comme tangente conjuguée par rapport à chacune des deux surfaces, la même droite $My$. Relativement aux axes $Mx$, $My$, les indicatrices de ces surfaces auront pour équations

$$(5) \qquad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 1, \qquad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R''} = 1.$$

De l'égalité des courbures totales au point M, on déduit $R' = R''$, et par suite les deux indicatrices coïncident.

Il est à observer que chacun des deux cas prévus dans l'énoncé du lemme actuel se présentera réellement. Pour le premier cas, la chose est évidente; quant au deuxième, les surfaces $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2 + y^3$ en offrent un exemple. Elles se touchent, en effet, suivant la parabole $y = 0$, $z = x^2$ et ont même courbure totale en tous les points de cette courbe; or cette dernière n'est pas une ligne asymptotique du paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$.

Lemme III. — *Si deux surfaces se touchent suivant une ligne* (C), *et si, en un point* M *de cette ligne, elles ont des courbures totales égales et de signes contraires, les directions asymptotiques de chacune des surfaces sont conjuguées par rapport à l'autre.*

La tangente $Mx$ à la ligne (C) ne sera jamais une direction asymptotique commune aux deux surfaces, car, s'il en était ainsi, ces surfaces auraient, au point M, des courbures totales égales et de *même signe;* c'est ce dont on s'assurera aisément par la considération de la torsion géodésique de la ligne (C). En conséquence, les équations des indicatrices seront nécessairement de la forme (5); or, par hypothèse, $R' = - R''$; le lemme est donc démontré.

Lemme IV. — *Deux surfaces* (S') *et* (S'') *touchent une surface* (S) *suivant deux courbes* (C') *et* (C'') *respectivement, et admettent, en un point* M, *commun à ces deux courbes, une direction asymptotique commune. Si, au point* M, *les tan-*

*gentes aux courbes* (C′) *et* (C″) *sont conjuguées par rapport à la surface* (S) *et si, en outre, les courbures totales des surfaces* (S′) *et* (S″) *sont égales, la courbure totale de la surface* (S) *sera égale, en valeur absolue, à la courbure des surfaces* (S′) *et* (S″).

Soient M$x$ et M$y$ les tangentes aux courbes (C′) et (C″). Par rapport à ces axes, les indicatrices des surfaces (S), (S′) et (S″) ont respectivement pour équations

$$\frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{R'} = 1, \qquad \frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{\rho'} = 1, \qquad \frac{x^2}{\rho''} + \frac{y^2}{R'} = 1$$

et l'on a, par hypothèse,

$$\frac{R}{\rho'} = \frac{\rho''}{R'}, \qquad R\rho' = R'\rho'';$$

on déduit de là

$$R = \varepsilon\rho'', \qquad R' = \varepsilon\rho' \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'où

$$RR' = \varepsilon R\rho' = \varepsilon R'\rho''.$$

Si $\varepsilon = +1$, les trois indicatrices coïncident; c'est ce qui se produit, à l'origine des coordonnées, pour les trois surfaces

(S) $\qquad z = x^2 + y^2,$

(S′) $\qquad z = x^2 + y^2 + x^3,$

(S″) $\qquad z = x^2 + y^2 - y^3.$

Au contraire, à l'origine des coordonnées, $\varepsilon$ est égal à $-1$ pour les trois surfaces

(S) $\qquad z = \quad x^2 + y^2,$

(S′) $\qquad z = \quad x^2 - y^2 - x^3.$

(S″) $\qquad z = -x^2 + y^2 + y^3.$

Lemme V. — *Si deux surfaces* (S′) *et* (S″), *qui touchent une surface* (S) *suivant deux lignes* (C′) *et* (C″) *ont, en un point* M, *commun à ces deux lignes, une direction asymptotique commune et des courbures totales égales entre elles et égales à la courbure totale de la surface* (S), *prise en signe contraire, les tangentes en* M *aux courbes* (C′) *et* (C″) *sont conjuguées par rapport à la surface* (S).

En vertu du lemme III, les directions asymptotiques de la surface (S), au point M, sont conjuguées par rapport aux surfaces (S′) et (S″); cette remarque, jointe à l'hypothèse que les indicatrices des surfaces (S′) et (S″) ont une asymptote commune, montre clairement que les involutions de diamètres conjugués relatives à ces indicatrices coïncident.

Cela posé, soient $Mx$ et $My$ les tangentes aux courbes (C′) et (C″), $Mx'$ et $My'$ les tangentes conjuguées de $Mx$ et $My$, par rapport à la surface (S). Les tangentes $Mx$ et $Mx'$ sont conjuguées par rapport à la surface (S′), et les tangentes $My$ et $My'$ sont conjuguées par rapport à la surface (S″); il est donc nécessaire que $Mx$ et $My'$ coïncident (et qu'il en soit par suite de même de $Mx'$ et de $My$), sinon les indicatrices des surfaces (S) et (S′) auraient en commun plus d'une paire de diamètres conjugués.

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments nécessaires à la démonstration des théorèmes qui font l'objet de cette Note.

Théorème I. — *Lorsque les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale d'une congruence rectiligne, on a, pour toute droite de cette congruence,*

$$(A) \qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4. \qquad \text{(Ribaucour.)}$$

Soient $(A_1)$ l'une des deux asymptotiques de $(\Sigma_1)$ qui se croisent en $F_1$, et $(\Sigma)$ la surface de la congruence circonscrite à $(\Sigma_1)$ suivant $(A_1)$. Cette surface touche la nappe $(\Sigma_2)$ suivant un asymptotique $(A_2)$ de cette nappe et admet évidemment comme asymptotiques les lignes $(A_1)$ et $(A_2)$. Désignons par $\tau_1$ et $\tau_2$ les rayons de torsion des lignes $(A_1)$ et $(A_2)$ aux points $F_1$ et $F_2$; on aura, en vertu de l'égalité (4),

$$\tau_1^2 \tau_2^2 \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4,$$

et, en mettant dans cette relation pour $\tau_1^2$ et $\tau_2^2$ leurs valeurs

$$\tau_1^2 = - R_1 R'_1, \qquad \tau_2^2 = - R_2 R'_2,$$

on obtiendra la formule (A).

Théorème II. — *Si, pour toute droite d'une congruence*

*rectiligne,*

$$(A)\qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4,$$

*les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.* (Cosserat.)

Faisons décrire au point $F_1$ une asymptotique $(A_1)$ de la nappe $(\Sigma_1)$, le point $F_2$ décrira, sur la nappe $(\Sigma_2)$, une ligne $(A_2)$ : il s'agit de démontrer que c'est une asymptotique de $(\Sigma_2)$. A cet effet, observons que la surface réglée $(\Sigma)$, lieu de la droite $F_1F_2$, touche $(\Sigma_1)$ suivant $(A_1)$ et $(\Sigma_2)$ suivant $(A_2)$, et qu'en outre les surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma_1)$ ont même courbure totale en chacun des points de $(A_1)$. Rapprochant cette remarque du lemme I et de la formule (A), on voit que les surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma_2)$ ont des courbures totales égales en tous les points de $(A_2)$. Par suite, en vertu du lemme II, ou bien la ligne $(A_2)$ sera une asymptotique sur les deux surfaces, ou bien les indicatrices coïncideront en tous les points de cette ligne. Or cette dernière hypothèse est à rejeter, car, si elle avait lieu, la droite $F_2F_1$ serait une tangente asymptotique de $(\Sigma_2)$, ce qui est impossible.

Théorème III. — *Pour toute droite d'une congruence telle que les asymptotiques de l'une des nappes de la surface focale correspondent à un système conjugué tracé sur l'autre, on a* (¹)

$$(B)\qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = -\overline{F_1 F_2}^4. \qquad \text{(Waelsch).}$$

Soient $(A_1)$, $(A'_1)$ les asymptotiques de $(\Sigma_1)$ qui se croisent en $F_1$, et $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ les surfaces engendrées par une droite de la congruence lorsque l'un de ses points focaux décrit successivement les lignes $(A_1)$ et $(A'_1)$. Désignons par $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k'}$ les courbures totales

---

(¹) Dans notre Note des *Comptes rendus*, citée plus haut, nous avons démontré ce théorème dans le cas particulier où le système conjugué est celui qui est formé des lignes de courbure. La faute de signe que contenait notre formule, et qui provenait de ce que nous n'avions considéré que des valeurs absolues, a été signalée par M. Cosserat (*loc. cit.*).

des surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$ au point $F_2$. On a, en vertu du lemme I,

$$(6) \qquad R_1 R'_1 k \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4,$$

$$R_1 R'_1 k' \sin^4 V = \overline{F_1 F_2}^4,$$

d'où $k = k'$. Observons maintenant que les surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$ ont, au point $F_2$, une tangente asymptotique commune, à savoir la génératrice $F_2F_1$; enfin, par hypothèse, les tangentes en $F_2$ aux courbes de contact de la nappe $(\Sigma_2)$ avec les surfaces $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$ sont conjuguées par rapport à $(\Sigma_2)$. Toutes les conditions requises pour l'application du lemme IV étant vérifiées, nous pouvons écrire $k = \pm R_2 R'_2$. Le signe $+$ est à rejeter, car alors la droite $F_2F_1$ serait une tangente asymptotique de $(\Sigma_2)$. On a donc $k = - R_2 R'_2$ et, en portant cette valeur de $k$ dans la relation (6), on obtiendra la formule (B).

Théorème IV. — *Si la relation*

$$(\mathrm{B}) \qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 \sin^4 V = - \overline{F_1 F_2}^4$$

*est vérifiée pour toute droite d'une congruence, il existe sur chacune des nappes de la surface focale un système conjugué auquel correspond sur l'autre nappe le système des lignes asymptotiques.* (Waelsch.)

Reprenons les surfaces réglées $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$ définies ci-dessus. Du lemme I et de la relation (B), on déduit qu'elles ont, au point $F_2$, des courbures totales égales entre elles et égales à la courbure totale de la surface $(\Sigma_2)$, prise en signe contraire; en outre elles ont, au point $F_2$, une direction asymptotique commune : concluons de là, par l'application du lemme V, le théorème énoncé.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SERRET (J.-A.). — COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. 5e édition, 2 vol. in-8°, VI-647 et 694 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1885. — COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. 4e édition, augmentée d'une Note sur la théorie des fonctions elliptiques, par M. *Ch. Hermite*. Tome Ier : Calcul différentiel. In-8°, XVII-617 pages. Tome II : Calcul intégral, XIII-904 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894.

Il suffira évidemment d'annoncer la réimpression de ces excellents Ouvrages dont les mérites sont connus et appréciés depuis longtemps. Avant sa mort, M. Serret avait eu le temps de fixer d'une manière définitive le texte de l'Algèbre supérieure qui servira longtemps encore d'excellente introduction à l'étude des Mémoires de Lagrange et des anciens géomètres ainsi que des travaux plus récents relatifs à la théorie des substitutions. Le *Cours de Calcul différentiel et intégral* reproduit en substance les Leçons que notre illustre maître a si longtemps professées à la Sorbonne. L'enseignement de cette branche de l'Analyse se modifie sans doute sous l'influence des recherches modernes relatives à la théorie des fonctions; mais il est permis de penser que cette modification qui se prépare s'opérera lentement et que l'Ouvrage de M. Serret rendra longtemps encore les services les plus appréciés. Les lecteurs auront la bonne fortune d'y trouver une Notice, fort étendue puisqu'elle comprend 170 pages, de M. Hermite relative à la théorie des fonctions elliptiques. Ce sont les vues d'ensemble, les aperçus profonds que l'on rencontrait déjà dans la Note publiée à la fin d'une édition du petit Traité de Lacroix; mais avec des accroissements très notables qui la recommandent à l'attention de tous et qui ajoutent la plus haute valeur à la nouvelle édition du Cours de M. Serret. G. D.

Paul APPELL et Édouard GOURSAT. — Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales; étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann; 1^er fascicule. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894.

I. Soit l'équation

$$u^2 = A(z-e_1)\dots(z-e_n),$$

où A est une constante différente de zéro, $e_1, \dots, e_n$, $n$ constantes différentes. Si $n = 2p+1$, concevons deux feuillets plans superposés sur le plan des $z$; faisons dans chacun d'eux $p$ coupures, assujetties à ne pas se croiser, allant de $e_1$ à $e_2, \dots,$ de $e_{2p-1}$ à $e_{2p}$, et de $e_{2p+1}$ au point à l'infini; le long de chaque coupure, soudons le bord de chaque feuillet au bord opposé de l'autre feuillet, de telle sorte que le point $z$, étant supposé placé sur l'un des feuillets, passe sur l'autre feuillet quand il traverse une coupure soudée, ou *ligne de passage*. En deux points $z$ placés l'un au-dessus de l'autre, sur les deux feuillets, les déterminations de $u$ sont égales et de signes contraires. La surface à deux feuillets ainsi obtenue s'appelle *surface de Riemann*. On appelle *point analytique* $(z, u)$ l'ensemble d'une valeur de $z$, et de l'une des déterminations correspondantes de la fonction $u$.

A chaque point analytique correspond un point unique de la surface de Riemann, et réciproquement. Les points $e_1, \dots, e_{2p+1}$ et le point $\infty$ sont appelés *points de ramification*. Si $n = 2p+2$, on prendra une surface de Riemann à deux feuillets, les lignes de passage étant tracées de $e_1$ à $e_2, \dots,$ de $e_{2p+1}$ à $e_{2p+2}$. Il y a deux points à l'infini, un sur chaque feuillet; d'ailleurs, toute fonction rationnelle sur une surface de Riemann pour laquelle $n = 2p+2$ peut se ramener à une fonction rationnelle sur une surface de Riemann pour laquelle $n = 2p+1$. Il suffit, dans la relation

$$u^2 = A(z-e_1)\dots(z-e_{2p+2}),$$

de faire le changement de variable $\dfrac{z-e_1}{z-e_{2p+2}} = z'$.

Imaginons une surface de Riemann à deux feuillets. Soit $(z_0, u_0)$ un de ses points, distinct d'un point de ramification. Sur le feuillet où il est situé, traçons un cercle, de centre $(z_0, u_0)$, et

de rayon $\delta$ assez petit pour que ce cercle ne contienne aucun point de ramification : les points situés dans ce cercle constituent ce qu'on appelle le *domaine* du point $(z_0, u_0)$. On appelle *domaine d'un point de ramification* $e_i$ l'ensemble des points analytiques que l'on peut atteindre en partant du point $e_i$, dans l'un ou l'autre feuillet, le module de $z - e_i$ restant plus petit qu'un certain nombre $\delta$, moindre que la distance du point $e_i$ au point de ramification le plus rapproché.

Si $n = 2p + 2$, il y a deux points à l'infini. Soit $\infty_1$ celui qui est situé sur le premier feuillet. Le *domaine* de ce point sera la portion du plan située dans le premier feuillet, à l'extérieur d'un cercle de centre O, et de rayon R assez grand pour que tous les points de ramification soient dans ce cercle. Si $n = 2p + 1$, le point $\infty$ est un point de ramification : la circonférence de rayon très grand qui limite son domaine aura deux tours.

Une fonction $v$ de $z$ est dite *uniforme* sur une surface de Riemann quand elle ne prend *qu'une* valeur en chaque point $(z, u)$ de cette surface. Soit $v = f(z, u)$ une telle fonction. La fonction $v$ est dite *régulière* au point ordinaire $(z_0, u_0)$ si, dans le domaine $\delta$ de ce point, elle est développable en une série de la forme

$$v = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (z - z_0)^\nu.$$

Si

$$v = (z - z_0)^m [A_m + A_{m-1}(z - z_0) + \ldots] \qquad (A_m \neq 0),$$

le point $(z_0, u_0)$ est dit un *zéro d'ordre m* de la fonction. Si la fonction $v$ est régulière dans le domaine du point de ramification $e_i$, on a, dans ce domaine

$$v = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (z - e_i)^{\frac{\nu}{2}}.$$

Si elle est régulière au point $\infty_1$ ($n = 2p + 2$),

$$v = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu z^{\nu}$$

dans le domaine de ce point.

Si elle est régulière au point $\infty_1 (n = 2p + 1)$,

$$v = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu z^{-\frac{\nu}{2}}$$

dans le domaine de ce point.

Un point où la fonction $v$ n'est par régulière est un *point singulier*. On ne considère que des fonctions ayant des points singuliers *isolés*.

Dans le domaine $\delta$ *d'un point singulier,* on aura

$$v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (z - z_0)^\nu$$

pour un point ordinaire $(z_0, u_0)$;

$$v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (z - e_i)^{\frac{\nu}{2}}$$

pour le point $e_i$;

$$v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu z^{-\nu}$$

pour le point $\infty_1 (n = 2p + 2)$;

$$v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu z^{-\frac{\nu}{2}}$$

pour le point $\infty (n = 2p + 1)$. La partie de ce développement qui contient les puissances négatives de $z - z_0$, ou de $z - e_i$, ou de $\frac{1}{z}$ s'appelle la *partie principale de* $v$ au point singulier. Si la partie principale est de degré $q$ en $\frac{1}{z - z_0}$, ou en $\frac{1}{(z - e_i)^{\frac{1}{2}}}$, ou en $z$, ou en $z^{\frac{1}{2}}$, le point singulier est *un pôle d'ordre* $q$.

La valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int v\,dz$, prise *dans le sens positif* sur le contour du domaine $\delta$ d'un point singulier, est ce qu'on nomme le *résidu* relatif à ce point singulier.

Si la partie principale est une série *illimitée,* le point singulier est dit *essentiel*. Laissons de côté les points singuliers essentiels.

Dans le voisinage de tout autre point, la fonction peut se mettre sous l'une des formes qui suivent :

(1) $$v = (z - z_0)^k [B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \ldots],$$

dans le voisinage du point $(z_0, u_0)$;

(2) $$v = (z - e_i)^{\frac{k}{2}} \left[B_0 + B_1(z - e_i)^{\frac{1}{2}} + B_2(z - e_i) + \ldots\right],$$

dans le voisinage du point $e_i$;

(3) $$v = \frac{1}{z^k}\left(B_0 + B_1 \frac{1}{z} + B_2 \frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

si $n = 2p + 2$, dans le domaine du point $\infty_1$;

(4) $$v = \frac{1}{z^{\frac{k}{2}}}\left(B_0 + B_1 \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + B_2 \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

si $n = 2p + 1$, dans le domaine du point $\infty_1$.

$k$ est un nombre entier, positif, négatif ou nul, et $B_0 \neq 0$; $k$ s'appelle l'*ordre* du point considéré : c'est le résidu de la fonction $\frac{d\mathrm{L}v}{dz}$ relatif à ce point. Si $k > 0$, le point est un *zéro* d'ordre $k$; si $k < 0$, c'est un pôle d'ordre $(-k)$.

Soit $v = \mathrm{R}(z, u)$ une fonction *rationnelle* de $z$ et de $u$; c'est une fonction *uniforme* sur la surface de Riemann, n'ayant à distance finie ou infinie que des pôles. *Réciproquement*, une fonction $v$, uniforme sur la surface de Riemann, et n'ayant pas d'autres points singuliers que des pôles, est une fonction rationnelle de $z$ et de $u$. On pourra mettre la fonction $v$ sous la forme

$$v = \frac{\mathrm{P}(z) - u\,\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{R}(z)},$$

où $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(z)$, $\mathrm{R}(z)$ désignent des polynomes entiers en $z$, sans facteurs communs. D'ailleurs, l'expression générale d'une fonction *uniforme* sur toute la surface de Riemann est

$$v = \varphi(z) - u\,\psi(z),$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions uniformes de $z$. Remarquons que toute fonction $v$, uniforme sur la surface de Riemann, et régulière en tous les points de cette surface, à distance finie ou infinie, est une constante.

Si la fonction n'a qu'un nombre *fini* de points singuliers, parmi lesquels peuvent être des points singuliers essentiels, la somme des résidus relatifs à tous les points singuliers, à distance finie ou infinie, est *nulle*. Comme conséquence de ce théorème, le nombre des zéros d'une fonction rationnelle de $z$ et de $u$ sur toute la surface de Riemann est égal au nombre des infinis (ou pôles) de cette fonction, chacun des zéros et chacun des infinis étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre. On appelle *ordre total* d'une fonction rationnelle $v$ de $z$ et de $u$ le nombre de ses infinis, chacun d'eux étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre. L'équation $v - C = 0$, où C désigne une constante arbitraire, a, sur toute la surface de Riemann, un nombre de racines égal à l'ordre total de $v$.

Voici, d'après M. Weierstrass, la définition du *genre* d'une relation algébrique

$$u^2 = A(z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_n),$$

avec $n = 2p + 1$ ou $n = 2p + 2$.

Si une fonction $v$, rationnelle en $z$ et en $u$, devient infinie en *un seul* point analytique $(z_0, u_0)$, *pris arbitrairement,* l'ordre de cet infini ne peut pas être moindre qu'un certain nombre entier. Cet ordre minimum, diminué d'une unité, se nomme le *genre* de la relation algébrique entre $u$ et $z$, ou le genre de la surface de Riemann correspondante. Le genre des surfaces de Riemann précédemment étudiées, à deux feuillets et à $n$ points de ramification, $n$ étant égal à $2p + 1$, ou à $2p + 2$, est égal à $p$. Il existe une fonction rationnelle admettant le point $(u_0, z_0)$ comme pôle d'ordre $(p + 1)$. Elle contient deux constantes arbitraires, A et C. Elle est de la forme

$$v = A + C\,\frac{u_0 + \dfrac{u'_0}{1}(z - z_0) + \ldots + \dfrac{u_0^{(p)}}{1.2\ldots p}(z - z_0)^p + u}{(z - z_0)^{p+1}}.$$

Remarquons qu'une fonction ayant un seul zéro placé en un point de ramification (qui n'est pas, par suite, un point arbitraire) peut y devenir infinie d'un ordre moindre que $(p + 1)$. Exemple, $\dfrac{1}{z - e_i}$ est infinie du deuxième ordre au seul point $e_i$.

On peut chercher à former une fonction $v$, rationnelle en $z$ et

en $u$, ayant $q$ pôles *arbitrairement choisis* $(a_1, b_1), \ldots, (a_q, b_q)$, distincts des points de ramification, avec des ordres donnés, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Cette fonction sera d'ordre total égal à $r = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q$; elle n'existe que si l'on a $n \geq p + 1$.

Soit

$$v = \frac{P(z) - uQ(z)}{R(z)}; \qquad R = (z - a_1)^{\alpha_1} \ldots (z - a_q)^{\alpha_q},$$

à un facteur constant près. P est de degré au plus égal à $r$, Q de degré au plus égal à $r - p - 1$. Le numérateur, $P + uQ$, développé par la formule de Taylor, doit contenir $(z - a_1)^{\alpha_1}$ en facteur dans le voisinage du point $(a_1, -b_1), \ldots, (z - a_q)^{\alpha_q}$ en facteur dans le voisinage du point $(a_q, -b_q)$. Le polynome Q étant choisi arbitrairement, de degré $r - p - 1$, le polynome P est de la forme $P = AR + P_1$, A désignant une constante, et $P_1$ un polynome de degré $(r - 1)$, entièrement déterminé par les conditions précédentes [1].

L'expression de $v$ est

$$v = A + \frac{P_1(z) - uQ(z)}{R(z)}.$$

Les $r$ coefficients des parties principales sont liés par $p$ relations.

Ainsi, supposons $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 1$, $q = r$, on aura

$$v = A + A_1 \frac{u + b_1}{z - a_1} + \ldots + A_r \frac{u + b_r}{z - a_r}$$

avec les $p$ relations

$$A_1 a_1^k + \ldots + A_r a_r^k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, p - 1).$$

Remarquons que, si les points $(a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)$ n'étaient pas variables indépendamment les uns des autres, la fonction $v$ pourrait exister pour $r < p + 1$. Ainsi, si l'on prend les points $(a_1, b_1), (a_1, -b_1)$, $v = \frac{A_1}{z - a_1}$ admet ces deux points comme pôles du premier ordre.

II. Soit $v$ une fonction rationnelle de $z$ et de $u$, l'intégrale

$$J(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} v \, dz,$$

---

[1] Hermite, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 70.

prise le long d'un chemin tracé sur la surface de Riemann, est une intégrale abélienne attachée à la relation

$$u^2 = A(z - e_1)\dots(z - e_n);$$

on l'appelle intégrale *hyperelliptique*. Quand le chemin d'intégration varie, les extrémités $(z_0, u_0)$, $(z, u)$ restant fixes, les différentes valeurs que peut avoir l'intégrale ne diffèrent que par certaines constantes additives appelés *modules de périodicité*.

Si, en un point à distance finie de la surface de Riemann, la fonction $v$ est régulière, l'intégrale $J(z, u)$ est aussi régulière en ce point.

Soit $(a_k, b_k)$ un pôle de $v$ d'ordre $m$, placé en un point ordinaire de la surface, à distance finie. Soit $R_k$ le résidu de $v$ en ce point. Si $R_k$ est nul, l'intégrale $J(z, u)$ est uniforme dans le domaine $\delta$ du point $(a_k, b_k)$ qu'elle admet comme pôle d'ordre $(m - 1)$. Si $R_k$ n'est pas nul, l'intégrale n'est plus uniforme dans le domaine $\delta$. Elle augmente de $2i\pi R_k$ quand le point $(z, u)$ décrit, à l'intérieur de $\delta$, un contour fermé tournant une fois, dans le sens positif, autour de $(a_k, b_k)$. On dit alors que le point $(a_k, b_k)$ est un *point singulier logarithmique* de l'intégrale.

Soit maintenant un point de ramification $e_i$ que la fonction $v$ admet comme pôle d'ordre $m$, le résidu étant $R_i$. Lorsque le résidu $R_i$ est nul, l'intégrale est uniforme dans le domaine $\delta$ du point $e_i$ qu'elle admet comme pôle d'ordre $m - 2$, tant que $m$ est supérieur à 2; si $m = 1$, elle est régulière au point $e_i$ : le cas $m = 2$ ne peut se présenter avec l'hypothèse $R_i = 0$; lorsque $R_i$ n'est pas nul, l'intégrale n'est plus uniforme dans le domaine du point $e_i$; elle augmente de $2i\pi R_i$ quand le point $(z, u)$ tourne deux fois autour de $e_i$, dans le sens direct. Le point $e_i$ est un point singulier logarithmique de l'intégrale.

Soit $n = 2p + 2$; dans le domaine du point $\infty_1$, en appelant $R_\infty^{(1)}$ le résidu relatif à ce point, si $R_\infty^{(1)}$ est nul, l'intégrale est uniforme. Si $v$ admet le point $\infty_1$ comme pôle d'ordre $m$, J l'admet comme pôle d'ordre $m + 1$. Si le résidu $R_\infty^{(1)}$ n'est pas nul, l'intégrale n'est plus uniforme dans le domaine du point $\infty_1$; elle augmente de $2i\pi R_\infty^1$ quand le point $(z, u)$ décrit, dans le sens positif, à l'intérieur du domaine considéré, un cercle de centre $z = 0$. Le point $\infty_1$ est alors un point singulier logarithmique. Pour que

$J(z, u)$ soit régulière au point $\infty_1$, il faut que $v$, dans le voisinage de ce point, soit un infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, ou d'un ordre supérieur. Mêmes remarques pour le point $\infty_2$.

Soit $n = 2p + 2$, lorsque le résidu $R_\infty$ est nul, J est uniforme dans le voisinage du point $\infty$. Si $v$ admet ce point comme pôle d'ordre $m$, J l'admet comme pôle d'ordre $m + 2$. Si $R_\infty$ n'est pas nul, l'intégrale n'est plus uniforme dans le domaine du point $\infty$ : elle augmente de $2i\pi R_\infty$ quand le point $(z, u)$ décrit dans le domaine du point $\infty$, dans le sens positif, une circonférence fermée (deux tours). Le point $\infty$ est alors un point singulier logarithmique. Pour que l'intégrale soit régulière au point $\infty$, il faut que $v$ soit un infiniment petit de l'ordre de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{2}}$, ou d'un ordre supérieur.

Dans le voisinage d'un point singulier logarithmique $(a, b)$, on a, pour $J(z, u)$, un développement de la forme

$$J(z, u) = R\,\mathrm{L}(z - a) + \varphi(z, u),$$

$\varphi$ étant une fonction uniforme dans le domaine du point $(a, b)$, régulière en ce point, ou l'admettant comme pôle. Dans cette formule, il faut convenir de remplacer $z - a$ par $(z - e_i)^{\frac{1}{2}}$ quand le point $(a, b)$ coïncide avec le point de ramification $e_i$, par $\frac{1}{z}$ quand $(a, b)$ est un point ordinaire à l'infini, et par $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$ quand $(a, b)$ est au point de ramification à l'infini.

L'intégrale J peut n'avoir aucun point singulier logarithmique, si tous les résidus de $v$ sont nuls séparément. Mais, si elle possède un point singulier logarithmique, elle en a au moins un second.

Il y a trois catégories d'intégrales abéliennes :

1° Une intégrale abélienne est de première espèce quand elle reste finie, quel que soit le point analytique $(z, u)$, à distance finie ou infinie, formant la limite supérieure : une telle intégrale est une fonction analytique du point $(z, u)$, régulière en tous les points de la surface de Riemann, mais non uniforme.

2° Une intégrale abélienne est de deuxième espèce quand elle devient infinie en un seul point de la surface de Riemann, et que ce point est un pôle de l'intégrale.

3° Une intégrale abélienne est de troisième espèce quand elle devient infinie seulement en deux points $(a, b)$, $(a', b')$ de la surface de Riemann, qui sont des points singuliers logarithmiques de telle nature que, dans le voisinage de ces points, elle puisse être représentée par des expressions de la forme

$$-\mathcal{L}(z-a)+\varphi(z, u),$$
$$+\mathcal{L}(z-a')+\varphi'(z, u),$$

$\varphi$ et $\varphi'$ désignant des fonctions régulières respectivement aux points $(a, b)$, $(a', b')$.

Les intégrales de première espèce sont de la forme

$$w=\int \frac{\mathrm{S}\, dz}{u},$$

où $\mathrm{S}=\lambda_1+\lambda_2 z+\ldots+\lambda_p z^{p-1}$, avec $p$ coefficients arbitraires. Posons

$$w_k=\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{z^{k-1}\, dz}{u} \qquad (k=1, \ldots, p).$$

L'intégrale $w$ la plus générale de première espèce pourra s'écrire

$$w=\lambda_1 w_1+\ldots+\lambda_p w_p+\text{const.}$$

Ces intégrales $w_1, \ldots, w_p$ sont linéairement indépendantes : ainsi, le nombre des intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, est égal au genre $p$.

Passons aux intégrales de troisième espèce. Supposons d'abord que les deux points logarithmiques soient à distance finie. L'intégrale de troisième espèce sera

$$\varpi_{a,b}^{a',b'}(z, u)=\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{1}{2u}\left(\frac{u+b'}{z-a'}-\frac{u+b}{z-a}\right] dz,$$

cette formule s'applique au cas où les points $(a, b)$, $(a', b')$ seraient l'un ou l'autre, ou tous les deux, des points de ramification.

Si $n=2p+2$,

$$\varpi_{\infty_1}^{(a',b')}(z, u)=\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{1}{2u}\left(\frac{u+b'}{z-a'}-\sqrt{\mathrm{A}}.z^p\right) dz,$$

$$\varpi_{\infty_1}^{\infty_2}(z, u)=\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{\sqrt{\mathrm{A}}.z^p}{u}\, dz$$

Si $n = 2p - 1$,

$$\varpi_{\infty}^{a',b'}(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{1}{2u} \frac{u + b'}{z - a'} dz.$$

L'intégrale de troisième espèce la plus générale, correspondant à une position déterminée des points singuliers logarithmiques, est égale à l'intégrale que nous avons formée, augmentée d'une intégrale de première espèce $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p$, avec $p$ coefficients arbitraires.

On peut former une intégrale unique de troisième espèce, qui conserve un sens, quelle que soit la position des points $(a, b)$, $(a', b')$ à distance finie ou infinie. Pour cela, désignons par $\lambda$ une constante arbitraire essentiellement différente de $a$ et de $a'$, et posons

$$\psi_{a,b}^{a',b'}(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{1}{2u} \left[ \frac{u + b' \left(\dfrac{z - \lambda}{a' - \lambda}\right)^p}{z - a'} - \frac{u - b \left(\dfrac{z - \lambda}{a - \lambda}\right)^p}{z - a} \right] dz.$$

Remarquons encore les propriétés suivantes des intégrales élémentaires de troisième espèce. On a

$$\varpi_{a,b}^{a',b'} + \varpi_{a',b'}^{a,b} = 0, \psi_{a,b}^{a',b'} + \psi_{a',b'}^{a,b} = 0.$$

Si $(a', b') = (a, b)$ les intégrales $\varpi$ et $\psi$ sont identiquement nulles; on a

$$\varpi_{a,b}^{a',b'}(z, u_1) + \varpi_{a,b}^{a',b'}(z, u_2) = \mathcal{L}\left(\frac{z - a'}{z - a} \frac{z_0 - a}{z_0 - a'}\right) + \text{const.}$$

$$\psi_{a,b}^{a',b'}(z, u_1) + \psi_{a,b}^{a',b'}(z, u_2) = \mathcal{L}\left(\frac{z - a'}{z - a} \frac{z_0 - a}{z_0 - a'}\right) + \text{const.}$$

Nous arrivons aux intégrales de deuxième espèce. Soit $(\xi, \eta)$, un point analytique situé à distance finie, et distinct des points de ramification,

$$\eta^2 = A(\xi - e_1) \ldots (\xi - e_n).$$

Soit $\frac{d\eta}{d\xi}$ la valeur de $\frac{du}{dz}$ pour $z = \xi$, $u = \eta$,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{\xi - e_1} + \ldots + \frac{1}{\xi - e_n}\right).$$

L'intégrale élémentaire de deuxième espèce est

$$\zeta(z, u; \xi, \eta) = - \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u + \eta + (z - \xi) \dfrac{d\eta}{d\xi}}{2u(z - \xi)^2} dz.$$

avec le pôle simple $(\xi, \eta)$, la partie principale relative à ce pôle étant $\frac{1}{z-\xi}$. On formera de même une intégrale $\zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta)$ finie partout, excepté au point $(\xi, \eta)$ qu'elle admet comme pôle d'ordre $\nu + 1$, la partie principale relative à ce pôle étant $\frac{1}{(z-\xi)^{\nu+1}}$.

L'intégrale demandée est

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta) = -(\nu+1)\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u + P_{\nu+1}}{2u(z-\xi)^{\nu+2}}\,dz,$$

en posant

$$P_{\nu+1} = \eta + (z-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \ldots + \frac{(z-\xi)^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu+1)}\frac{d^{\nu+1}\eta}{d\xi^{\nu+1}}.$$

De même, on a

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, -\eta) = -(\nu+1)\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u - P_{\nu+1}}{2u(z-\xi)^{\nu+2}}\,dz.$$

Remarquons la formule

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta) + \zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, -\eta) = \frac{1}{(z-\xi)^{\nu+1}} - \frac{1}{(z_0-\xi)^{\nu+1}}.$$

De même,

$$\zeta^{(\nu)}(z, u_1; \xi, \eta) + \zeta^{(\nu)}(z, u_2; \xi, \eta) = \frac{1}{(z-\xi)^{\nu+1}} + \text{const.},$$

$u_1$ et $u_2$ étant les valeurs de $u$ aux deux points superposés en $z$.

Soit $e_i$ un point de ramification à distance finie, soit $u = (z-e_i)^{\frac{1}{2}}u_i$, puis

$$u_i = E_0^{(i)} + (z-e_i)E_1^{(i)} + \ldots + (z-e_i)^{\nu}E_{\nu}^{(i)} + \ldots;$$

l'intégrale

$$\zeta(z, u; e_i) = -\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{E_0^{(i)}\,dz}{2u(z-e_i)},$$

est finie partout, excepté au point $e_i$, qu'elle admet comme pôle du premier ordre, avec la partie principale $\frac{1}{(z-e_i)^{\frac{1}{2}}}$. Pour obtenir une intégrale qui devienne infinie au seul point $e_i$, qu'elle admettra comme pôle du second ordre, avec la partie principale $\frac{1}{z-e_i}$, on prendra simplement

$$\zeta'(z, u; e_i) = \frac{1}{z-e_i} + C = -\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{dz}{(z-e_i)^2}.$$

De même

$$\zeta^{(2\mu-1)}(z, u; e_i) - \frac{1}{(z-e_i)^\mu} + C = -\mu \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{dz}{(z-e_i)^{\mu+1}}.$$

D'ailleurs

$$\zeta^{(2\mu)}(z, u; e_i) = -\frac{2\mu+1}{2} \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{P_\mu^{(i)}}{u(z-e_i)^{\mu+1}}\, dz,$$

avec

$$P_\mu^{(i)} = E_0^{(i)} + (z-e_i) E_1^{(i)} + \ldots + (z-e_i)^\mu E_\mu^{(i)}.$$

Soit

$$S_\nu = \zeta^{(\nu)}(z, u_1; e_i) + \zeta^{(\nu)}(z, u_2; e_i),$$

on a

$$S_{2\mu-1} = \frac{2}{(z-e_i)^\mu} + \text{const.} \qquad \text{et} \qquad S_{2\mu} = \text{const.}$$

Soit $n = 2p + 2$; dans le domaine du point $\infty_1$, soit

$$u = z^{p+1} v, \qquad v = \sqrt{A} + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots.$$

Posons

$$Q_{\nu+1} = \sqrt{A} + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_{\nu+1}}{z^{\nu+1}},$$

on a

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \infty_1) = (\nu+1) \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u z^\nu + z^{\nu+p+1} Q_{\nu+1}}{2u}\, dz.$$

Pour $\nu = 0$, on a

$$\zeta(z, u; \infty_1) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u + z^{p+1} Q_1}{2u}\, dz,$$

intégrale qui devient infinie au seul point $\infty_1$, la partie principale en ce point étant $z$.

D'ailleurs

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \infty_2) = (\nu+1) \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{u z^\nu - z^{\nu+p+1} Q_{\nu+1}}{2u}\, dz,$$

d'où

$$\zeta^{(\nu)}(z, u; \infty_1) + \zeta^{(\nu)}(z, u; \infty_2) = z^{\nu+1} - z_0^{\nu+1}.$$

De même

$$\zeta^{(\nu)}(z, u_1; \infty_1) + \zeta^{(\nu)}(z, u_2; \infty_1) = z^{\nu+1} + \text{const.}$$

Si $n = 2p + 1$, soit $\zeta^{(\nu)}(z, u; \infty)$, l'intégrale devenant infinie au seul point $\infty$ et ayant pour partie principale en ce point $z^{\frac{\nu+1}{2}}$. On a

$$\zeta^{(2\mu-1)}(z, u; \infty) = z^\mu.$$

Soit $\nu = 2\mu$, $u = z^{p+\frac{1}{2}} v$ :

$$v = \sqrt{A} + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots, \qquad Q_\mu = \sqrt{A} + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_\mu}{z^\mu},$$

alors

$$\zeta^{(2\mu)}(z, u; \infty) = \frac{2\mu+1}{2} \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{z^{p+\mu} Q_\mu \, dz}{u}, \quad \zeta(z, u; \infty) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{z^p \sqrt{A}}{2u} \, dz.$$

Soit enfin

$$S_\nu = \zeta^{(\nu)}(z, u_1; \infty) + \zeta^{(\nu)}(z, u_2; \infty),$$

on a

$$S_{2\mu-1} = 2 z^\mu, \qquad S_{2\mu} = 0.$$

L'intégrale $\varpi_{a,b}^{a',b'}$ est une fonction régulière du point $(a, b)$ pour toutes les positions de ce point à distance finie non situées sur le chemin d'intégration. Soit $(\xi, \eta)$ un point ordinaire de la surface de Riemann : traçons le chemin d'intégration de façon qu'il ne passe pas par ce point ; on a alors le développement qui suit

$$\varpi_{a,b}^{a',b'} = \varpi_{\xi,\eta}^{a',b'} + (a - \xi)\, \zeta(z, u; \xi, \eta)$$
$$+ \frac{(a-\xi)^2}{2} \zeta'(z, u; \xi, \eta) + \ldots + \frac{(a-\xi)^{\nu+1}}{\nu+1} \xi^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta) + \ldots;$$

on a donc

$$\xi^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta) = \frac{1}{1.2\ldots\nu} \frac{d^{\nu+1} \varpi_{\xi,\eta}^{a',b'}}{d\xi^{\nu+1}} = \frac{1}{1.2\ldots\nu} \frac{d^\nu \zeta(z, u; \xi, \eta)}{d\xi^\nu}.$$

Par conséquent, si l'on donne à $\xi$ un accroissement $h$, et si l'on appelle $k$ l'accroissement correspondant de $\eta$, on peut écrire

$$\zeta(z, u; \xi + h, \eta + k) = \zeta(z, u; \xi, \eta)$$
$$+ h\, \zeta'(z, u; \xi, \eta) + \ldots + h^\nu \zeta^{(\nu)}(z, u; \xi, h) + \ldots.$$

Dans le domaine du point de ramification $e_i$, on a

$$\varpi_{a,b}^{a',b'} = \varpi_{e_i}^{a',b'} + (a - e_i)^{\frac{1}{2}} \zeta(z, u; e_i) + \ldots + \frac{(a - e_i)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\nu+1} \zeta^{(\nu)}(z, u; e_i) + \ldots.$$

On en conclut

$$\zeta(z, u; a, b) = \frac{1}{2(a - e_i)^{\frac{1}{2}}} \zeta(z, u; e_i) + \ldots + \frac{(a - e_i)^{\frac{\nu-1}{2}}}{2} \zeta^{(\nu)}(z, u; e_i) + \ldots.$$

puis

$$\zeta(z, u; e_i + h, k) = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\zeta(z, u; e_i) + \ldots + \frac{h^{\frac{\nu-1}{2}}}{2}\zeta^{(\nu)}(z, u; e_i) + \ldots.$$

Si $n = 2p + 2$, on a dans le domaine du point $\infty_1$

$$\varpi_{a,b}^{a',b'} = a^p W_1 + a^{p-1} W_2 + \ldots + a W_p + \varpi_{\infty_1}^{a',b'}$$
$$+ \frac{1}{a}\zeta(z, u; \infty_1) + \frac{1}{2a^2}\zeta'(z, u; \infty_1) + \ldots + \frac{1}{\nu a^\nu}\zeta^{(\nu-1)}(z, u; \infty_1) + \ldots,$$

$W_1, \ldots, W_p$ désignant des intégrales de première espèce. On en déduit

$$\zeta(z, u; \xi, \eta) = p\xi^{p-1} W_1 + (p-1)\xi^{p-2} W_2 + \ldots + W_p$$
$$- \frac{1}{\xi^2}\zeta(z, u; \infty_1) - \frac{1}{\xi^3}\zeta'(z, u; \infty_1) - \ldots - \frac{1}{\xi^{\nu+1}}\zeta^{(\nu-1)}(z, u; \infty_1) + \ldots.$$

Dans le domaine du point $\infty_2$, on aura de même

$$\zeta(z, u; \xi, \eta) = -p\xi^{p-1} W_1 - (p-1)\xi^{p-2} W_2 - \ldots - W_p$$
$$- \frac{1}{\xi^2}\zeta(z, u; \infty_2) - \frac{1}{\xi^3}\zeta'(z, u; \infty_2) - \ldots - \frac{1}{\xi^{\nu+1}}\zeta^{(\nu-1)}(z, u; \infty_2) - \ldots.$$

Si $n = 2p + 1$, on a dans le domaine du point $\infty$

$$\varpi_{a,b}^{a',b'} = a^{\frac{2p-1}{2}} W_1 + a^{\frac{2p-3}{2}} W_2 + \ldots$$
$$+ a^{\frac{1}{2}} W_p + a^{-\frac{1}{2}}\varpi_\infty^{a',b'} + \sum_2^\infty \mu \frac{2}{\mu a^{\frac{\mu}{2}}}\zeta^{(\mu-2)}(z, u; \infty),$$

d'où

$$\zeta(z, u; \xi, \eta) = \frac{2p-1}{2}\xi^{\frac{2p-3}{2}} W_1 + \frac{2p-3}{2}\xi^{\frac{2p-5}{2}} W_2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} W_p - \frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}}\varpi_\infty^{a',b'} - \sum_2^\infty \mu \frac{1}{\xi^{\frac{\mu+2}{2}}}\zeta^{(\mu-2)}(z, u; \infty).$$

Considérons maintenant une intégrale abélienne quelconque

$$\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} v\, dz;$$

on pourra toujours la mettre sous la forme

$$\int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} v\, dz = \sum_{k=1}^{k=q-1} R_k \varpi_{\alpha_q, \beta_q}^{\alpha_k, \beta_k}$$

$$+ \sum [A_1 \zeta(z, u; a, b) + A_2 \zeta'(z, u; a, b) + \ldots + A_\nu \zeta^{(\nu-1)}(z, u; a, b)]$$

$$+ \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p + \text{const.}$$

Les coefficients $R_k$ et $A_l$ sont connus immédiatement si l'on connaît les points singuliers de l'intégrale et les parties principales qui leur correspondent. Il n'en est pas de même des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Une première et importante application de cette formule est la représentation d'une fonction rationnelle $v$ de $z$ et de $u$ par une somme d'intégrales de première et de seconde espèce, ou *la décomposition en éléments simples* d'une fonction rationnelle de $z$ et de $u$. Soit $v$ cette fonction rationnelle. On aura

$$v = \sum [A_1 \zeta(z, u; a, b) + A_2 \zeta'(z, u; a, b) + \ldots + A_\nu \zeta^{(\nu-1)}(z, u; a, b)]$$

$$+ \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p + \text{const.}$$

le signe $\sum$ indique une sommation étendue à tous les pôles de $v$, la fonction $v$ étant, dans le domaine $(a, b)$ de la forme

$$v = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\nu}{(z-a)^\nu} + \text{fonction régulière.}$$

En appliquant cette décomposition à la fonction

$$v = \frac{1}{2u} \frac{u+\eta}{z+\xi},$$

on arrive au résultat suivant

$$\zeta(z, u; \xi, \eta) = \frac{1}{2u} \frac{u+\eta}{z-\xi} - \frac{1}{2u_0} \frac{u_0+\eta}{z_0-\xi} + \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\zeta(z, u; e_i)}{E_0^{(i)}(e_i - \xi)}.$$

Ainsi l'intégrale élémentaire de seconde espèce est une fonction *rationnelle* des paramètres $\xi$, $\eta$.

Soient enfin $v$ une fonction rationnelle de $z$ et de $u$ ; $v_0$ sa valeur au point $(z_0, u_0)$. Soient $(a_1, b_1), \ldots, (a_q, b_q)$ les zéros de $v$ ;

$(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_q, \beta_q)$ ses infinis; on a

$$v = k\, v_0{}^{\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p} + \varpi_{\alpha_1, \beta_1}^{a_1, b_1} + \ldots + \varpi_{\alpha_q, \beta_q}^{a_q, b_q},$$

$k$ désignant un facteur constant. Dans cette formule, plusieurs des infinis ou des zéros de $v$ peuvent être égaux entre eux. C'est une formule analogue à la décomposition d'une fonction rationnelle en facteurs, dans le cas $p = 0$.

III. Dans ce qui suit, on considère les surfaces comme des feuillets sans épaisseur, de sorte qu'un point ou qu'une ligne tracés sur la surface seront visibles pour un observateur placé d'un côté ou de l'autre. Les surfaces sont en outre regardées comme *parfaitement élastiques* et *indéchirables*. Une surface est dite *connexe* lorsque, ayant pris sur cette surface deux points quelconques, on peut les joindre par un trait continu, situé tout entier sur la surface. Une surface est *fermée* quand elle n'a pas de bords, *ouverte* quand elle a des bords. Les bords d'une surface peuvent être constitués par une seule ligne continue, ou par plusieurs lignes continues distinctes. On n'envisage que des surfaces avec des bords. Si l'on a une surface fermée, on commencera par lui donner un bord, en y faisant une petite ouverture. On appelle *coupure* une section faite dans la surface partant d'un point du bord, et venant aboutir à un point du bord. Une coupure a deux bords qui font partie du bord de la surface. Une coupure peut donc aboutir en un point de l'un de ses bords.

On dit qu'une surface est *à connexion simple,* ou *simplement connexe* quand on peut, en déformant cette surface, supposée parfaitement élastique et indéchirable, la réduire en un feuillet plan, limité par un contour simple. Le bord d'une surface simplement connexe se compose d'une seule ligne ne se coupant pas. Citons comme exemples de surfaces simplement connexes : 1° une calotte sphérique; 2° le domaine d'un point de ramification de la surface de Riemann à deux feuillets; 3° une surface de Riemann à deux feuillets avec deux points de ramification.

Pour définir le sens *positif* du contour d'une surface simplement connexe, il faut distinguer l'une de l'autre les deux faces de la surface. Faisons choix d'une face qui sera appelée l'*endroit*,

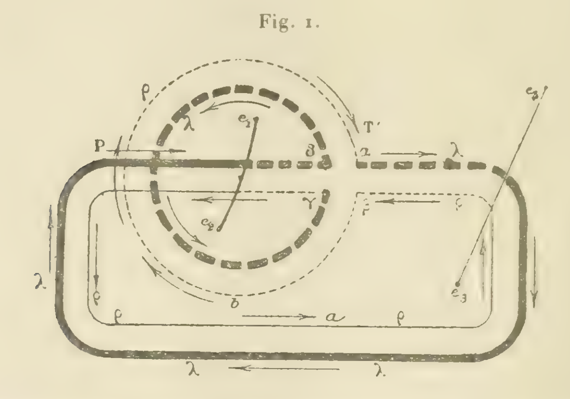
ou le *côté positif* de la surface, appliquons la surface sur un plan horizontal, l'endroit étant au-dessus. Le sens positif du contour du feuillet-plan ainsi obtenu est le sens dans lequel se meut un observateur debout dans le plan, et décrivant le contour en ayant l'aire à sa gauche. L'endroit d'une surface de Riemann sera la face supérieure des feuillets-plans, supposés étalés dans le plan horizontal.

Toute coupure faite dans une surface simplement connexe la découpe en deux morceaux distincts; toute ligne fermée tracée sur une surface simplement connexe peut, par déformation continue de la surface, être réduite à un point.

Voici maintenant des surfaces non simplement connexes.

1° Considérons une surface de Riemann à deux feuillets, et à quatre points de ramification. Deux coupures $a$ et $b$ suffisent à rendre la surface simplement connexe. T désigne la surface sans coupures, T′ la surface rendue simplement connexe.

Fig. 1.

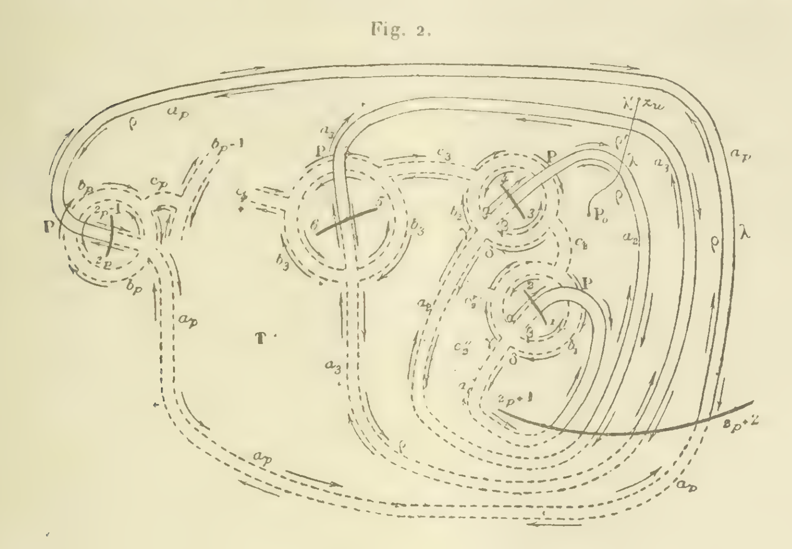



On appelle *bord positif*, de la coupure $a$, le bord extérieur $\lambda$, *bord négatif* le bord intérieur $\rho$. Pour la coupure $b$, on choisit comme bord positif le bord que doit suivre un mobile pour aller du bord positif $\delta$ de $a$ au bord négatif $\gamma$ de $a$, en ayant à sa gauche la surface de Riemann T′.

2° Dans le cas général, $n = 2p + 1$ ou $n = 2p + 2$, on trace une coupure fermée, $b_1$ entourant $e_1$, $e_2$; puis, partant d'un point de $b_1$ une coupure $b_2 + c_2$ venant se couper elle-même, formée d'une branche $c_2$ et d'une boucle $b_2$ entourant $e_3$ et $e_4$, et, ainsi

de suite, jusqu'à la coupure $c_p + b_p$ venant se couper elle-même, formée d'une branche $c_p$ et d'une boucle entourant les points $e_{2p-1}$, $e_{2p}$. On trace ensuite $p$ coupures $a$ comme l'indique la *fig.* 2. On nomme *bord positif* des coupures $a$ le bord externe,

Fig. 2.




marqué du signe $+$. Le bord positif de $b_1$, par exemple, est le bord que doit suivre un mobile pour aller du bord positif de $a_1$ au bord négatif en marchant dans le sens positif. Pour les coupures $c$, le choix du bord positif n'a pas d'importance. La forme des coupures ne joue aucun rôle, il n'y a d'essentiel que *leurs positions relatives*.

Considérons sur la surface de Riemann une aire S, finie ou infinie, limitée par une ou plusieurs courbes distinctes, formant un contour C. Soit $f(z, u)$ une fonction du point analytique $(z, u)$ uniforme dans l'aire (S), finie sur le contour C, n'admettant dans l'aire S d'autres singularités que des points singuliers isolés, en nombre fini. L'intégrale

$$\int_C f(z, u)\, dz,$$

prise le long du contour C, dans le sens positif, est égale à

$2i\pi(R_1$ [illegible] $R_q)$.

$R_1, \ldots, R_q$ désignant les résidus relatifs à tous les points singuliers situés sur S, et au point $\infty$, si l'aire S est infinie.

Supposons l'aire simplement connexe. Supposons que, dans cette aire, les résidus soient tous nuls. Considérons dans l'aire S deux chemins joignant les points $(z_0, u_0)$, $(z, u)$, les valeurs de l'intégrale

$$F(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} f(z, u)\, dz,$$

prises le long de ces chemins, sont égales. $F(z, u)$ est uniforme dans l'aire S. Elle n'a, dans l'aire S, que des points singuliers isolés.

Supposons que l'aire S se compose de toute la surface simplement connexe T′ dont le contour C est formé de l'ensemble des coupures $a_k$, $b_k$, $c_k$. Supposons $f(z, u)$ uniforme sur toute la surface T′. L'intégrale

$$\int_{T'} f(z, u)\, dz,$$

prise sur le contour de la surface T′, dans le sens positif, est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de $f$.

Si la fonction $f(z, u)$ est uniforme non seulement sur la surface T′, mais aussi sur la surface T, non découpée, la somme des résidus de cette fonction sur toute la surface (y compris les points à l'infini) est *nulle*.

Supposons que, sur la surface T′, tous les résidus de $f(z, u)$ soient nuls, l'intégrale

$$F(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} f(z, u)\, du$$

est uniforme sur la surface T′. Elle n'a pas d'autres points singuliers que ceux de $f(z, u)$, sauf peut-être le point à l'infini.

Si $f(z, u)$ est une fonction rationnelle de $z$ et de $u$ avec des résidus nuls, $F(z, u)$ est une intégrale abélienne composée avec des intégrales de première et de deuxième espèce.

Une somme d'intégrales de première et de deuxième espèce, ayant la même limite supérieure $(z, u)$, est une fonction uniforme de $(z, u)$ sur la surface de Riemann simplement connexe T′.

Supposons

$$F(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} f(z, u)\, dz,$$

$f$ étant rationnelle en $z$ et en $u$; sur le bord d'une coupure, la différence $F(\lambda) - F(\rho)$ ($\lambda$ et $\rho$ étant deux points opposés pris sur la coupure, $\lambda$ sur le bord positif, $\rho$ sur le bord négatif) est une *constante* qu'on appelle *module de périodicité*.

Soit $A_k$ le module de périodicité relatif à la courbe $a_k$; $A_k$ est égal à la valeur de l'intégrale

$$\int f(z, u)\, dz,$$

prise *dans le sens positif* le long d'une courbe fermée entourant les deux seuls points de ramification $(e_{2k-1}, e_{2k})$, sur le feuillet inférieur.

Les différences constantes sur les coupures $c$ sont nulles.

Soit $B_k$ le module de périodicité relatif à la courbe $b_k$. $B_k$ est égal à la valeur de l'intégrale

$$\int f(z, u)\, dz,$$

prise *dans le sens négatif* sur une courbe fermée entourant les points

$$(e_1, e_2, \ldots, e_{2k-1}, e_{2p+1}).$$

Soit $F(z, u)$ la valeur que prend l'intégrale en un point $(z, u)$, quand la variable $(z, u)$ ne franchit aucune coupure. La valeur la plus générale que puisse prendre l'intégrale en ce point, quand le point $(z, u)$ peut franchir arbitrairement toutes les coupures, est

$$F(z, u) + m_1 A_1 + \ldots + m_p A_p + n_1 B_1 + \ldots + n_p B_p,$$

$m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ étant des nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls. Soient $F(z, u)$ et $F'(z, u)$ deux intégrales abéliennes composées à l'aide d'intégrales abéliennes de première et de deuxième espèce; appelons $A_k$ et $B_k$ les modules de périodicité de l'intégrale F, $A'_k$ et $B'_k$ ceux de l'intégrale F′ le long des coupures $a_k, b_k$; on a

$$I = \int_{T'} F\, dF' = A_1 B'_1 - A'_1 B_1 + \ldots + A_p B'_p - A'_p B_p.$$

D'autre part, I est égal à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus de $F\dfrac{dF'}{dz}$ sur toute la surface de Riemann.

Si F et F′ sont des intégrales de première espèce, on a

$$A_1 B'_1 - A'_1 B_1 + \ldots + A_p B'_p - A'_p B_p = 0.$$

Si $F(z, u)$ est une intégrale de première espèce, $F'(z, u)$ une intégrale de deuxième espèce, avec le pôle simple $(a, b)$, alors

$$A_1 B'_1 - A'_1 B_1 + \ldots + A_p B'_p - A'_p B_p = -2i\pi f(a, b),$$

$f(z, u)$ désignant la dérivée de $F(z, u)$ par rapport à $z$.

Soit $\Phi(z, u) = X + iY$ une fonction uniforme du point analytique $(z, u)$, régulière en tous les points d'une portion simplement connexe S de la surface de Riemann, l'intégrale $J = \int X\,dY$, prise le long du contour total C dans le sens direct, a *une valeur positive*.

Pour une intégrale quelconque de première espèce, la quantité J est positive. Il est en particulier impossible que toutes les quantités $A_1, \ldots, A_p$ soient nulles simultanément. Même remarque pour $B_1, \ldots, B_p$.

Ainsi, pour les intégrales elliptiques, dans le rapport $\dfrac{K'}{K}$, *la partie réelle est positive*.

Soient $w_1, \ldots, w_p$ $p$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Posons

$$w^{(k)} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_p w_p.$$

On pourra déterminer les $\lambda$ en écrivant que, dans l'intégrale $w^{(k)}$, tous les modules de périodicité relatifs aux coupures $a$ sont nuls, excepté celui qui se rapporte à la coupure $a_k$, et que nous ferons égal à $2i\pi$. L'intégrale $w^{(k)}$, ainsi déterminée, est une *intégrale normale* de première espèce. Il y a $p$ de ces intégrales $(k = 1, \ldots, p)$, linéairement indépendantes. Soient $b_{k1}, \ldots, b_{kp}$ les modules de périodicité de l'intégrale $w^{(k)}$ le long des coupures $b$. On a

$$b_{hk} = b_{kh}.$$

On posera, dans la suite,

$$b_{hk} = 2\tau_{hk} = 2(\tau'_{hk} + i\tau''_{hk}),$$

$\tau'_{hk}$ et $\tau''_{hk}$ étant réels.

Soit

$$\Phi(m_1, \ldots, m_p) = \sum_{h=1}^{h=p} \sum_{k=1}^{k} (\alpha_{hk} m_h m_k) - \varphi(m_1, \ldots, m_p) + i\,\psi(m_1, \ldots, m_p),$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des formes quadratiques à coefficients réels : la forme quadratique $\varphi(m_1, \ldots, m_p)$ est une forme *définie* et *négative*.

Il est impossible d'avoir entre les $2p$ périodes $A_1, \ldots, A_p$, $B_1, \ldots, B_p$ une relation de la forme

$$m_1 A_1 + \ldots + m_p A_p + n_1 B_1 + \ldots + n_p B_p = 0,$$

$m_1, \ldots, m_p$, $n_1, \ldots, n_p$ étant des nombres entiers, les mêmes pour toutes les intégrales de première espèce.

Posons

$$Z = \zeta(z, u; a, b) + c_1 w^{(1)} + \ldots + c_p w^{(p)}.$$

Écrivons que les modules de périodicité, tout le long des coupures $a$, sont nuls ; on aura

$$A_k + 2 c_k i \pi = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

en supposant que $A_k$ soit le module de périodicité de $\zeta(z, u; a, b)$ le long de la coupure $a_k$. On obtient ainsi l'*intégrale normale de deuxième espèce*. Soient $B'_1, \ldots, B'_p$ ses modules de périodicité le long des coupures $b$ ; posons

$$w^{(k)}(z, u) = \int_{z_0, u_0}^{(z, u)} \varphi_k(z, u)\, dz,$$

on aura

$$B'_k = -\varphi_k(a, b).$$

Si le point $(a, b)$ était un point de ramification, ou un point à l'infini, il faudrait remplacer $\varphi_k(a, b)$ par le résidu du produit $w^{(k)}(z, u)\dfrac{dZ(z, u)}{dz}$ au point $(a; b)$. Remarquons que les modules de périodicité de l'intégrale normale Z de deuxième espèce sont des fonctions *rationnelles* de $(a, b)$.

L'intégrale

$$\varpi_{a, b}^{a', b'}(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} f(z, u)\, dz$$

n'est pas uniforme sur T'. Pour avoir une surface sur laquelle elle

soit uniforme, on partira d'un point du bord de $a_p$, par exemple, on fera dans un feuillet de la surface de Riemann une fente $l$, aboutissant à $(a, b)$, sans franchir aucune coupure, puis une nouvelle fente $m$, de $(a, b)$ à $(a', b')$, toujours sans franchir de coupures. On choisira les bords positif et négatif de $m$ de telle sorte qu'en tournant autour de $(a', b')$, de manière à avoir ce point à sa gauche, on aille du bord positif au bord négatif. Les signes des bords de $l$ se déterminent ensuite par continuité.

Soit T'' la surface de Riemann munie de ces nouvelles coupures. Le long des coupures $a_k$ et $b_k$, $\varpi$ a des modules de périodicité $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$. Le long de $l$, le module de périodicité $\mathcal{L}$ est nul. Le long de $m$, $\mathcal{M} = 2i\pi$.

Soit $\varpi_1(z, u)$ l'une des valeurs de $\varpi(z, u)$ sur la surface de Riemann T, toutes les autres sont données par la formule

$$\varpi(z, u) = \varpi_1(z, u) + m_1 \mathcal{A}_1 + \ldots + m_p \mathcal{A}_p + n_1 \mathcal{B}_1 + \ldots + n_p \mathcal{B}_p + 2ni\pi,$$

Posons

$$\Pi_{a,b}^{a',b'}(z, u) = \varpi_{a,b}^{a',b'}(z, u) + \lambda_1 w^{(1)} + \ldots + \lambda_p w^{(p)}.$$

Cette intégrale sera *normale* si l'on détermine les $\lambda$ de façon que tous les modules de périodicité le long des coupures $a$ soient nuls. On aura

$$\mathcal{A}_k + 2\lambda_k i\pi = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

On a d'ailleurs

$$\mathcal{B}'_k = w^{(k)}(a', b') - w^{(k)}(a, b),$$

$\mathcal{B}'_k$ étant le module de périodicité de $\Pi_{a,b}^{a',b'}$ le long de la coupure $b_k$.

IV. $F(z, u)$ étant un polynome entier à deux variables, $z$ et $u$ de degré $m$ en $u$ qui, ordonné par rapport à $u$, s'écrit

$$F(z, u) = \varphi_0(z) + u\varphi_1(z) + \ldots + u^m \varphi_m(z),$$

les coefficients $\varphi_i(z)$ étant des polynomes entiers en $z$, si, pour $z = a$, l'équation $F(z, u) = 0$ a $n$ racines égales à $b$, pour une valeur de $z$ voisine de $a$ elle a $n$ racines voisines de $b$. Si, en particulier, l'équation $F(z, u) = 0$ a une seule racine égale à $b$ pour $z = a$, elle admet une seule racine voisine de $b$ pour une va-

leur de $z$ voisine de $a$. On peut alors, des points $z=a$ et $u=b$ comme centres, décrire deux cercles, C et $C_1$, de rayons $\rho'$ et $r$, respectivement, tels que, pour toute valeur de $z$ à l'intérieur de C, l'équation $F=0$ ait une racine, et une seule, à l'intérieur de $C_1$. La fonction $u$ est donc continue et uniforme tant que $z$ reste à l'intérieur de C; elle admet d'ailleurs une dérivée : c'est donc une fonction *analytique* de $z$ dans ce domaine. Cette dérivée est

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

C'est elle-même une fonction continue de $z$ dans le cercle C. Donc, à l'intérieur de C, la racine $u$ est développable par la formule de Taylor,

$$u = b + \alpha_1(z-a) + \alpha_2(z-a)^2 + \ldots,$$

et le rayon de convergence de cette série est au moins égal à $\rho'$, mais peut lui être supérieur. De même, si pour $z=a$ l'équation $F=0$ a $m$ racines simples, $b_1, \ldots, b_m$, on peut trouver un cercle C, de centre $a$, et de rayon assez petit pour qu'à l'intérieur de ce cercle les $m$ racines soient des fonctions uniformes et régulières; les $m$ racines sont alors représentées par $m$ développements distincts; on a, par exemple, pour la racine $u_i$, qui se réduit à $b_i$ pour $z=a$,

$$u_i = b_i + \alpha_1^{(i)}(z-a) + \alpha_2^{(i)}(z-a)^2 + \ldots.$$

Les rayons de convergence de ces différentes séries sont, en général, inégaux.

On a ainsi défini un *élément* de fonction algébrique. On étendra la définition de proche en proche. Supposons que $F(z,u)$ soit *indécomposable*, c'est-à-dire ne soit pas le produit de deux ou plusieurs polynomes entiers en $z$ et $u$. Alors l'équation $F=0$ n'aura de racines multiples que pour des valeurs de $z$ en nombre *fini*. On obtiendra ces valeurs de $z$ en éliminant $u$ entre les deux équations $F(z,u)=0$, $\frac{\partial F}{\partial u}=0$. Ces valeurs de $z$, ainsi que les racines de l'équation $\varphi_m(z)=0$ s'appellent les *points singuliers*.

Prenons deux points non singuliers, $z_0$, Z, et un chemin L

joignant ces deux points, et ne passant par aucun point singulier. Soit $u_1, \ldots, u_m$ les $m$ racines simples de l'équation $F(z_0, u) = 0$. Si l'on part de $z_0$ avec l'une de ces racines, $u_1$ par exemple, la valeur de cette racine sera fixée tout le long du chemin L par la condition de continuité.

Si A est une aire plane, limitée par un seul contour, ne renfermant aucun des points singuliers; si l'on va d'un point $z_0$ à un autre point Z par deux chemins contenus tout entiers dans l'aire A, en prenant la même valeur initiale pour $u$, on arrive au point Z avec la même valeur finale.

Lorsqu'au point $z = a$, l'équation $F = 0$ a une racine $b$ d'ordre $n$, les $n$ racines voisines de $b$ pour une valeur de $z$ voisine de $a$, forment un ou plusieurs *systèmes circulaires*. Les $p$ racines $u_1, \ldots, u_p$ appartenant à un même système circulaire sont représentées par une même série procédant suivant les puissances entières et positives de $(z - a)^{\frac{1}{p}}$,

$$u = b + b(z - a)^{\frac{1}{p}} + b_2(z - a)^{\frac{2}{p}} + \ldots,$$

les différentes racines $u_1, \ldots, u_p$ étant obtenues en remplaçant successivement dans ce développement $(z - a)^{\frac{1}{p}}$ par ses $p$ déterminations.

$z = a$ étant une racine de $\varphi_m(z) = 0$, les racines qui deviennent infinies pour $z = a$ peuvent se partager en systèmes circulaires. Soient $u_1, \ldots, u_p$ les $p$ racines d'un tel système circulaire. Elles seront représentées par un développement de la forme

$$u = (z - a)^{-\frac{q}{p}}\left[\alpha_0 + \alpha_1(z - a)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2(z - a)^{\frac{2}{p}} + \ldots\right].$$

Si $p = 1$, le point $z = a$ est, pour la racine considérée, un pôle ordinaire. Si $p > 1$, c'est un point de ramification en même temps qu'un pôle.

A l'infini, on aura, comme développement, soit

$$u = b + \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{q}{p}}\left[\alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{p}} + \ldots\right],$$

ou

$$u = \left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{q}{p}}\left[\alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{p}} + \ldots\right].$$

Il est essentiel de remarquer qu'il n'y a jamais qu'un nombre *fini* de termes à exposants négatifs.

Une fonction algébrique n'admet que deux catégories de points singuliers : 1° des pôles, 2° des points critiques algébriques. Ces points singuliers sont toujours en nombre fini. Réciproquement, toute fonction analytique qui, sur tout le plan des $z$ (y compris le point à l'infini), n'admet que des pôles ou des points critiques algébriques, et qui n'a qu'un nombre fini $m$ de déterminations en chaque point, est une fonction algébrique.

Soit $F(z, u) = 0$ une équation algébrique entière irréductible, de degré $m$ par rapport à $u$. Supposons que, pour $z = z_0$, elle admette $m$ racines distinctes et finies, $u_1, \ldots, u_m$. Partons de $z_0$ avec la valeur initiale $u_1$ par exemple : on peut choisir le contour fermé décrit par la variable de façon que la valeur finale soit l'une quelconque des $m$ racines, désignée à l'avance.

Si $(z_0, u_0)$ et $(z_1, u_1)$ sont deux systèmes de solutions *quelconques* de l'équation $F(z, u) = 0$, si on a démontré qu'il existe un chemin allant du point $z_0$ au point $z_1$, et conduisant de la valeur initiale $u_0$ à la valeur $u_1$, on peut en conclure que le polynome $F(z, u)$ est irréductible, ou une puissance exacte d'un polynome irréductible.

Laissons de côté, pour un moment, les points à l'infini. Les points critiques de la fonction algébrique $u$ de $z$ correspondent : 1° aux points de la courbe $F(z, u) = 0$, où la tangente est parallèle à l'axe des $u$, 2° aux points multiples.

Supposons d'abord que, pour $z = a$, on ait une racine $b$ d'ordre $n$, et que $\frac{\partial F}{\partial z}$ ne soit pas nul pour $z = a$, $u = b$; les $n$ racines forment un système circulaire.

Si $(a, b)$ est un point multiple, on portera l'origine en ce point et l'on séparera les racines infiniment petites par la méthode de M. Puiseux : les $n$ racines voisines de zéro sont d'un degré infinitésimal *commensurable* déterminé. En définitive, lorsque, pour $z = a$, l'équation $F = 0$ admet $n$ racines égales à $b$, les $n$ valeurs de $u$ qui tendent vers $b$ lorsque $z$ tend vers $a$, sont représentées dans le domaine du point $z = a$ par un ou plusieurs développements de la forme

$$u = b + \alpha_1 (z - a)^{\frac{q_1}{p}} + \alpha_2 (z - a)^{\frac{q_2}{p}} + \ldots.$$

où l'on attribue à $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ ses $p$ déterminations, et où l'on prend la même détermination dans chaque terme : il ne pourra pas arriver que tous les $q_i$ aient, avec $p$, un autre diviseur commun que 1. Si l'on a un seul système circulaire de $n$ racines, le point $z=a$ est dit *un point de ramification d'ordre* $n-1$; pour $n=2$, on dit que c'est un point de ramification *simple;* si l'on a plusieurs systèmes circulaires, au point $z=a$ sont superposés plusieurs points de ramification distincts.

$F(z, u)=0$ désignant une équation algébrique entière, irréductible, de degré $m$ en $u$, marquons dans le plan les différents points $a_1, \ldots, a_N$ autour desquels plusieurs racines se permutent et traçons à partir de ces points des coupures s'étendant à l'infini, de façon que ces coupures ne se croisent pas entre elles. Soit $z_0$ une valeur de $z$ telle que l'équation $F(z_0, u)=0$ ait $m$ racines distinctes et finies, $b_1, \ldots, b_m$. Appelons $u_1, \ldots, u_m$ les $m$ racines qui se réduisent respectivement à $b_1, \ldots, b_m$ pour $z=z_0$. Imaginons $m$ feuillets plans superposés, admettant toutes les coupures allant des points $a_i$ à l'infini. A chacun de ces feuillets, attachons une valeur de $u$, et donnons au feuillet le même indice qu'à la racine correspondante. Considérons le point critique $a_i$ et $u_h$. Si le lacet $(a_i)$ ramène $u_h$ à sa valeur initiale, on supprimera la coupure $a_i\infty$, dans le feuillet correspondant; on opérera de même pour tous les feuillets correspondant à des racines que le lacet $(a_i)$ ne permute avec aucune autre. Les autres racines se partageront en un certain nombre de systèmes de racines se permutant circulairement autour du point $a_i$. Soit $(u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\lambda, u_\mu)$ l'un de ces groupes. Le lacet $(a_i)$, décrit dans le sens direct, change $u_\alpha$ en $u_\beta$, $u_\beta$ en $u_\gamma$, $\ldots$, $u_\lambda$ en $u_\mu$, $u_\mu$ en $u_\alpha$; réunissons le bord droit de la coupure sur le feuillet $\alpha$ au bord gauche de la même coupure sur le feuillet $\beta$, le bord droit de la coupure sur le feuillet $\beta$ au bord gauche de la coupure sur le feuillet $\gamma$, etc., enfin le bord droit de la coupure sur le feuillet $\mu$ au bord gauche de la coupure sur le feuillet $\alpha$. Opérons de même avec tous les systèmes circulaires et tous les points critiques. La liaison des feuillets autour du point à l'infini résulte de leur liaison autour des points d'application. Soit T la surface ainsi obtenue. Considérons une valeur $a$ de $z$, pour laquelle $\mu$ valeurs de $u$ deviennent

égales à $b$, et forment un seul système circulaire dans le voisinage de ce point. Sur la surface T, on aura un système de $\mu$ feuillets, liés les uns aux autres dans le voisinage de ce point $a$, mais séparés des autres feuillets. Ces $\mu$ feuillets forment un *cycle*. Le point commun à ces $\mu$ feuillets est le *sommet* du cycle. C'est un point de ramification d'ordre $\mu - 1$. Un point ordinaire de la surface sera un point de ramification d'ordre o.

On appelle *point analytique* $(z, u)$ l'ensemble d'une valeur de $z$ et d'une valeur de $u$ vérifiant la relation $F(z, u) = 0$. A tout point de T correspond un point analytique et inversement. Si $u = b$ est une racine multiple de $F(a, u) = 0$, on pourra avoir $p$ cycles sur T, dont les sommets correspondent au même système $z = a$, $u = b$. On aura, en réalité, $p$ points analytiques $(a, b)$ qu'il faudra distinguer les uns des autres. Ceci ne pourra avoir lieu que pour un nombre fini de systèmes de valeurs de $a$ et de $b$.

Soit $(a, b)$ un point à distance finie de la surface, par lequel ne passe qu'un feuillet. Si l'on a

$$v = \sum_{q=0}^{q=\infty} A_q (z-a)^q,$$

dans le domaine du point $(a, b)$, la fonction $v$ sera dite *régulière* au point $(a, b)$. Si $A_0 = \ldots = A_{q-1} = 0$, $A_q \neq 0$, le point analytique $(a, b)$ est pour la fonction un zéro d'ordre $q$. Si la fonction n'est pas régulière au point $(a, b)$, ce point est *un point singulier*. Supposons qu'il soit *isolé;*

$$v = \sum_{q=0}^{q=\infty} A_q (z-a)^q + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(z-a)^n}.$$

S'il n'y a qu'un nombre limité de termes à exposants négatifs, le point $(a, b)$ est *un pôle* dont l'ordre est égal à la plus haute puissance de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement. S'il y a un nombre illimité de termes à exposants négatifs, le point analytique $(a, b)$ est un point singulier isolé. Dans les deux cas, le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ est appelé *résidu*.

Supposons maintenant que le point $(a, b)$ soit le sommet d'un

cycle de $\mu$ feuillets. Le domaine du point $(a, b)$ sera limité par une courbe tournant $\mu$ fois autour du point $(a, b)$. Le développement de $v$, dans le voisinage d'un tel point, aura l'une des trois formes :

$$\text{(I)} \qquad v = \sum_{q=0}^{q=\infty} A_q (z-a)^{\frac{q}{\mu}},$$

$$\text{(II)} \qquad v = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+\infty} A_\nu (z-a)^{\frac{\nu}{\mu}},$$

$$\text{(III)} \qquad v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (z-a)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Dans le cas (I), on dira que la fonction $v$ est régulière au point $(a, b)$.

Si $A_0 = \ldots = A_{q-1} = 0$, $A_q \neq 0$, le point $(a, b)$ est dit un *zéro* d'ordre $q$. Dans le cas (II), le point $(a, b)$ est appelé pôle d'ordre $n$. Dans le cas (III), c'est un point singulier isolé. Le résidu sera $\mu A_{-\mu}$. C'est la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int v\,dz$, prise dans le sens positif le long du contour du domaine du point $(a, b)$. Un zéro d'ordre $q$ de $v$ donne, dans la dérivée logarithmique, un résidu égal à $+q$. Un pôle d'ordre $n$ donne un résidu égal à $-n$.

A l'infini, supposons qu'on ait un point de ramification d'ordre $\mu$, on aura l'un des trois développements

$$\text{(I)} \qquad v = \sum_{q=0}^{q=\infty} \left(A_q z^{-\frac{q}{\mu}}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad v = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+\infty} \left(A_\nu z^{-\frac{\nu}{\mu}}\right),$$

$$\text{(III)} \qquad v = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(A_\nu z^{-\frac{\nu}{\mu}}\right).$$

Dans le premier cas, la fonction $v$ est régulière au point à l'infini ; si le développement commence par un terme en $z^{-\frac{q}{\mu}}$, ce point sera dit un *zéro* d'ordre $q$. Dans le deuxième cas, le point à l'infini est un pôle d'ordre $n$ et dans le troisième cas, un point sin-

gulier isolé. Le résidu à l'infini sera $(-\mu A_{+\mu})$; il est égal à $\frac{1}{2i\pi}\int v\,dz$, l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé limitant le domaine du point à l'infini, de manière à avoir le domaine *à gauche*. Un zéro d'ordre $q$ et un pôle d'ordre $n$ donneront respectivement $q$ et $(-n)$ pour résidus dans la dérivée logarithmique. Remarquons que la fonction peut être régulière à l'infini sans que le résidu soit nul.

Si la fonction uniforme $v$ du point analytique $(z, u)$ n'admet sur toute la surface T qu'un nombre fini de points singuliers, la somme des résidus de cette fonction sur toute la surface de Riemann est égale à zéro.

Une fonction *rationnelle* du point $(z, u)$ n'admet que des pôles, comme points singuliers, sur toute la surface de Riemann. Réciproquement, toute fonction uniforme du point analytique $(z, u)$, qui, sur toute la surface de Riemann, n'admet comme points singuliers que des pôles, est une fonction rationnelle de $z$ et de $u$. Toute fonction uniforme du point analytique $(z, u)$ peut être mise sous la forme

$$v = P_0(z) + uP_1(z) + u^2P_2(z) + \ldots + u^{m-1}P_{m-1}(z),$$

$P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ étant des fonctions uniformes de $z$.

Toute fonction uniforme du point analytique $(z, u)$ qui est régulière en tous les points de la surface T est une constante.

Le nombre des zéros d'une fonction rationnelle $v = \varphi(z, u)$ sur toute la surface T est égal au nombre des pôles, chacun d'eux étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre.

Si N est le nombre des infinis de $v$ sur la surface de Riemann, on dira que la fonction $v$ est d'ordre N. La fonction $v = \varphi(z, u)$ passe N fois, et N fois seulement, par toute valeur donnée à l'avance.

Si l'on connaît soit les pôles de la fonction rationnelle $v = \varphi(z, u)$, avec les parties principales correspondantes, soit les pôles et les zéros, qui sont en nombre égal, cette fonction $v$ sera déterminée à une constante additive près dans le premier cas, à un facteur constant près dans le deuxième cas.

L'*ordre* d'un point $(\alpha, \beta)$ est égal à zéro lorsque ce point n'est,

pour la fonction considérée, ni un pôle, ni un zéro. Il est égal à $+n$ si le point $(\alpha, \beta)$ est un zéro d'ordre $n$, à $-n'$ si le point est un pôle d'ordre $n'$. La somme des ordres d'une fonction *rationnelle* de $z$ et de $u$ sur toute la surface de Riemann est nulle. L'*ordre total* est égal à N. Le nombre des points d'intersection des deux courbes $F(z, u) = 0$, $\Phi(z, u) = 0$, confondus au point $(\alpha, \beta)$ est égal à l'ordre du zéro de la fonction $\Phi(z, u)$ au point analytique $(\alpha, \beta)$, $u$ et $z$ étant supposés vérifier la relation $F(z, u) = 0$. Si les $r$ valeurs $u$ qui deviennent égales à $\beta$ pour $z = \alpha$ se partagent en $k$ systèmes circulaires, il y a, sur la surface de Riemann correspondant à l'équation $F(z, u) = 0$, $k$ points analytiques $(\alpha, \beta)$; le nombre des points communs aux deux courbes confondus en $(\alpha, \beta)$ est égal à la somme des ordres des zéros de $\Phi(z, u)$ en ces $k$ différents points analytiques $(\alpha, \beta)$.

Si le point commun aux deux courbes considérées est à l'infini, on ne peut plus appliquer les mêmes règles. L'emploi des coordonnées homogènes permet d'éviter cette difficulté. Deux courbes algébriques d'ordres $m$ et $n$ ont $mn$ points communs.

Revenons aux surfaces de Riemann : toute surface de Riemann ayant des points de ramification d'ordre quelconque peut être considérée comme limite d'une surface de Riemann n'ayant que des points de ramification simples.

Soit $\mathfrak{F}(z, u)$ le polynome le plus général de degré $m$ en $u$ : il lui correspondra une surface de Riemann à $m$ feuillets, avec $m(m-1)$ points de ramification simples : supposons maintenant que, les coefficients de $\mathfrak{F}$ venant à varier, $\mathfrak{F}$ devienne F, et que plusieurs points de ramification viennent se confondre. Soit D le nombre des points de ramification simples qui sont venus se confondre en un point $z = b$, R la somme des ordres des points de ramification qui sont superposés au point $z = b$, la différence $D - R$ est nulle ou égale à un nombre pair positif.

Si $r$ est le nombre de feuillets qui appartiennent à un même cycle, la somme $\Sigma(r-1)$ étendue à tous les points de ramification d'une surface de Riemann est donc *un nombre pair*.

V. Rappelons qu'une surface est dite *connexe* lorsqu'il est possible de réunir deux points quelconques de la surface par

un trait continu tracé sur la surface. On dira qu'une surface est *simplement* connexe lorsqu'il sera impossible de tracer une coupure sur cette surface sans la morceler, c'est-à-dire sans la décomposer en deux morceaux n'ayant plus entre eux aucune connexion. Dans le cas contraire, la surface est à connexion multiple. Étant données $\mu$ surfaces simplement connexes, si l'on trace, dans ce système de surfaces, $\nu$ coupures, successivement, on obtient $\mu + \nu$ morceaux simplement connexes.

$\Sigma$ étant un système quelconque de surfaces, si, au moyen de $\nu$ coupures successives, on décompose ce système en $\alpha$ morceaux simplement connexes, la différence $\nu - \alpha$ *est un nombre constant* pour ce système de surfaces.

Soit S une surface qu'on peut décomposer en $\alpha$ morceaux simplement connexes au moyen de $\nu$ coupures, on appelle *ordre de connexion* de cette surface le nombre $N = \nu - \alpha + 2$. Pour une surface simplement connexe $N = 1$. Un cylindre ouvert aux deux bouts est une surface doublement connexe. Le tore est triplement connexe. Une aire plane à $n$ contours est une surface connexe d'ordre $n$.

L'ordre de connexion d'une surface est égal au nombre maximum de coupures que l'on peut tracer sur cette surface sans la morceler, augmenté d'une unité.

L'ordre de connexion d'une surface fermée est un nombre *impair*. La limite totale d'une surface simplement connexe se compose d'une seule courbe. Si, dans un système de surfaces $\Sigma$, on trace une coupure, le nombre des courbes limites augmente ou diminue d'une unité.

Soit $N = 2p + 1$, l'ordre de connexion d'une surface fermée. $p$ s'appelle le *genre* de la surface. La sphère est de genre 0, le tore de genre 1. Le type des surfaces fermées de genre $p$ est la sphère solide, avec $p$ trous, ou le système de $p$ anneaux soudés l'un à l'autre, formant une chaîne non fermée. Pour transformer une telle surface en une surface simplement connexe, il faut $2p$ coupures. La surface de Riemann à 2 feuillets et à $2p + 2$ points de ramification est de genre $p$.

Si T est une surface fermée connexe, de genre $p$, imaginons qu'on ait décomposé cette surface en F portions simplement connexes; on aura un réseau polygonal ayant F faces, S sommets,

A arêtes. Entre ces nombres existe la relation

$$A - S - F = 2p - 2.$$

Soit une surface de Riemann à $m$ feuillets. $\Sigma(r-1)$ étant la somme des ordres de tous les points de ramification de la surface, on a

$$p = \tfrac{1}{2}\Sigma(r-1) - m + 1,$$

$p$ désignant le genre.

Remarquons les propriétés suivantes : 1° toute surface dont la limite totale peut être décrite d'un seul trait continu est simplement connexe ; 2° étant donnée une surface à connexion multiple, limitée par une seule courbe, on peut tracer sur cette surface une coupure terminée en un point de son parcours et ne morcelant pas la surface. Cela posé, étant donnée une surface de Riemann de genre $p$, on peut la transformer en une surface simplement connexe au moyen de $2p$ coupures tracées l'une après l'autre, de manière à ne pas morceler la surface, la limite finale pouvant être décrite d'un seul trait continu.

Soit à étudier le genre d'une équation binome $u^m = R(z)$, $R(z)$ étant une fonction rationnelle. Les points de ramification de la surface de Riemann correspondante s'obtiennent en cherchant les pôles ou les zéros de la fonction rationnelle $R(z)$ dont l'ordre n'est pas un multiple de $m$. $a$ étant l'un de ces points (un zéro par exemple), $n$ son ordre, dans le domaine du point $a$, les $m$ valeurs de $u$ sont représentées par la formule

$$\sqrt[m]{(z-a)^n}\,P_1(z),$$

$P_1(z)$ désignant une fonction uniforme dans le domaine du point $a$. Soit $\frac{n}{m} = \frac{s}{r}$, $s$ et $r$ étant premiers entre eux, et $m = r\alpha$; on a $\alpha$ cycles de $r$ feuillets ayant leurs sommets en $a$; $a_1, \ldots, a_q$ étant les différents points de ramification. Posons

$$m = r_1\alpha_1 = \ldots = r_q\alpha_q.$$

$p$ étant le genre, on a

$$m\left[q - 2 - \sum_{i=1}^{i=q}\left(\frac{1}{r_i}\right)\right] = 2p - 2.$$

Les surfaces de Riemann qui correspondent à une équation binome sont *régulières*. On appelle ainsi les surfaces de Riemann telles qu'en chacun des points de ramification les $m$ feuillets de la surface se partagent en un certain nombre de cycles *composés d'un même nombre de feuillets*, $a_1, \ldots, a_q$ étant les points de ramification, si au point $a_i$ les $m$ feuillets se partagent en $\alpha_i$ cycles de $r_i$ feuillets, $(m = \alpha_i r_i)$ le genre de la surface est encore donné par la formule précédente.

L'équation

$$m\left[q - 2 - \sum_{i=1}^{i=q}\left(\frac{1}{r_i}\right)\right] = 2p - 2$$

n'admet qu'un nombre *limité* de solutions en nombres entiers. Un nombre fini de combinaisons permet de trouver les surfaces de Riemann correspondantes. Étant donnée une solution de l'équation précédente en nombres entiers, positifs, on peut en déduire les équations binomes qui y correspondent.

Toutes les équations binomes de genre o se ramènent à la relation

$$u^m = (z - a)^n.$$

Celles de genre 1, à quatre équations distinctes :

$$u^2 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4),$$
$$u^3 = (z - a_1)^2(z - a_2)^2(z - a_3)^2,$$
$$u^4 = (z - a_1)^2(z - a_2)^3(z - a_3)^3,$$
$$u^6 = (z - a_1)^3(z - a_2)^4(z - a_3)^5.$$

Les autres s'en déduisent par une substitution linéaire effectuée sur $z$, accompagnée de l'une des transformations

$$u = u' \mathrm{R}_1(z), \qquad u = \frac{\mathrm{R}_1(z)}{u'},$$

$\mathrm{R}_1(z)$ étant une fonction rationnelle de $z$.

Arrivons aux intégrales abéliennes : soient $\mathrm{F}(z, u) = 0$ une relation algébrique irréductible, de degré $m$ en $u$, T la surface de Riemann correspondante, composée de $m$ feuillets, $\varphi(z, u)$ une fonction rationnelle de $z$ et de $u$, l'intégrale

$$w = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \varphi(z, u)\, dz,$$

est dite intégrale abélienne appartenant à l'équation $F = 0$. Nous supposerons qu'on a pris pour limite inférieure un point $(z_0, u_0)$ de la surface par lequel il ne passe qu'un feuillet, et pour lequel $\varphi(z, u)$ reste finie.

Une intégrale abélienne est régulière en tous les points de la surface T, sauf en un nombre *fini* de points, qui sont des pôles, ou des points singuliers logarithmiques; dans le domaine d'un point singulier, $(\alpha, \beta)$, elle est représentée par un développement de la forme

$$W = \frac{A_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-\alpha}$$
$$+ H\,\mathfrak{L}(z-\alpha) + B_0 + B_1(z-\alpha) + \ldots,$$

le coefficient H, ou les coefficients A pouvant être nuls; $(z-\alpha)$ doit être remplacé par $(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ si le point analytique $(\alpha, \beta)$ est un point de ramification d'ordre $\mu - 1$, et $z - \alpha$ par $\frac{1}{z}\cdot$

On obtient toutes les déterminations de l'intégrale en un point quelconque $(z, u)$ de la surface, en ajoutant à l'une d'elles des multiples quelconques de certaines périodes, en nombre fini.

Les périodes sont de deux sortes. Les unes proviennent des points singuliers logarithmiques. Elles peuvent être en nombre quelconque, mais leur somme est nulle; ce sont les périodes *polaires*. Les autres proviennent de contours fermés, appelés *cycles;* ce sont les *périodes cycliques*. Elles se ramènent à $2p$ périodes distinctes; mais quelques-unes de ces périodes peuvent être nulles. Inversement, toute fonction du point analytique $(z, u)$ jouissant des propriétés précédentes est une intégrale abélienne.

On distingue trois espèces d'intégrales abéliennes : 1° les intégrales de première espèce restent régulières dans le domaine de tout point de la surface de Riemann; elles ne peuvent devenir infinies que par l'addition d'un nombre illimité de périodes. Elles n'admettent que des périodes cycliques; 2° les intégrales de deuxième espèce sont régulières en tous les points de T, sauf en un seul, qu'elles admettent comme pôle; elles n'ont que des périodes cycliques; 3° les intégrales de troisième espèce sont régulières en tous les points de T, sauf en deux $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$ qu'elles admettent comme points singuliers logarithmiques.

Dans le domaine du point $(\alpha_1, \beta_1)$, l'intégrale aura un développement de la forme

$$\mathrm{L}(z - \alpha_1) + \mathrm{P}(z - \alpha_1),$$

P étant une fonction régulière au point $(\alpha_1, \beta_1)$ et, dans le domaine du point $(\alpha_2, \beta_2)$, un développement de la forme

$$- \mathrm{L}(z - \alpha_2) - \mathrm{Q}(z - \alpha_2),$$

Q étant une fonction régulière au point $(\alpha_2, \beta_2)$.

Si l'un des points critiques logarithmiques vient en un point de ramification d'ordre $\mu$, $z - \alpha$ devra être remplacé par $(z - \alpha)^{\frac{1}{\mu}}$, et $z - \infty$ par $\frac{1}{z}$. Une intégrale de troisième espèce admet $2p$ périodes cycliques, et *une* période polaire.

Soit $w$ une intégrale de première espèce, il est impossible que les parties réelles ou les parties imaginaires de toutes les périodes soient nulles à la fois. Enfin, à une relation algébrique de genre $p$ ne peuvent correspondre plus de $p$ intégrales linéairement distinctes de première espèce. R. LEVAVASSEUR.

---

ARNOUX (GABRIEL). — ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE; LES ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES. XXIII-175 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1894.

M. Arnoux, ancien officier de marine, se donne comme beaucoup moins mathématicien que philosophe; il a appliqué, nous dit-il, aux questions de magie numérique et littérale, le procédé d'observation des faits, avec simple réflexion sur leur raison d'être de telle ou telle façon; d'autre part, il s'est abstenu systématiquement, au moins avant de s'être formé une théorie, de l'étude des travaux antérieurs.

Que, par ce moyen, il soit parvenu à une idée originale et féconde, il y a là avant tout une preuve de ses capacités intellectuelles, mais beaucoup moins, comme il semble le croire, une révélation des limites de l'Analyse mathématique; il est bien connu, en effet, de tous ceux qui la pratiquent, que les algorithmes, no-

tations et formules ne servent qu'à dispenser le plus possible du raisonnement abstrait, en le remplaçant par des opérations à effectuer machinalement; grâce à leur emploi, des intelligences moyennes ou même médiocres peuvent arriver à résoudre aisément les problèmes du genre de ceux pour lesquels tel algorithme aura été particulièrement combiné. C'est là le grand point; en revanche, on peut malheureusement abuser de l'Analyse, en appliquant à telle question tel procédé qui s'y prête mal, au lieu de celui qui serait le plus simple et le plus naturel; enfin, pour le don d'invention lui-même, il n'y a aucun moyen d'y suppléer, mais quel est le mathématicien qui l'ignore?

Quant à l'étude des travaux antérieurs, encore faut-il être sûr de ne pas retomber sur ce qui a déjà été trouvé; d'ailleurs, s'il faut se garder de vouloir exclusivement les continuer dans le même sens, ils peuvent suggérer utilement des idées neuves. Il est particulièrement curieux que le procédé de construction donné par M. Arnoux pour les carrés hypermagiques de côté premier, est simplement une généralisation de la méthode de Moschopoulos ([1]) pour les carrés impairs, et l'étonnant est que cette généralisation, tout à fait indiquée, n'ait pas été effectuée depuis longtemps.

En tout cas, l'Ouvrage de M. Arnoux n'en réalise pas moins de sérieux progrès, et le concours que M. Laisant lui a prêté pour le développement de certaines théories est une garantie qu'il s'agit d'un travail susceptible d'intéresser même les mathématiciens que la question des carrés magiques en elle-même laisserait indifférents.

Je me bornerai à exposer certaines définitions indispensables pour comprendre quel est, au juste, l'objet du Livre et pour donner une idée de la méthode qui y est suivie.

Si, sur les cases d'un échiquier de côté $m$, on dispose arbitrairement les $m^2$ nombres : $0, 1, 2, \ldots, m^2-2, m^2-1$; qu'on suppose cet échiquier indéfiniment prolongé dans tous les sens et qu'on répète sans fin dans leur ordre, sur chaque ligne et chaque colonne, les nombres qui s'y trouvent déjà inscrits; si, maintenant, partant d'une case quelconque, on fait un pas $ax+by$ (valant $a$ cases

([1]) Qui vivait non pas en 420 de l'ère chrétienne, comme le dit M. Arnoux d'après Bossut, mais dans la première moitié du XIVe siècle.

dans le sens des lignes, $b$ cases dans le sens des colonnes), il est aisé de voir qu'au bout de $m$ pas semblables, après avoir rencontré une suite déterminée de résidus par rapport à $m^2$ (le nombre des résidus distincts peut d'ailleurs être soit $m$, cas d'une *marche parfaite*, soit un sous-multiple de $m$, marche *imparfaite*), on retombera sur le nombre d'où l'on est parti, et d'autre part, on pourra représenter cette marche de $m$ pas sur l'échiquier primordial sans sortir de celui-ci. En ce sens, cet échiquier est appelé par M. Arnoux *espace arithmétique modulaire* (par rapport à $m$) à deux dimensions. Il est facile de généraliser cette notion pour un nombre quelconque de dimensions et l'on aperçoit sans peine les rapports qu'elle soutient avec la théorie des congruences.

On reconnaît ainsi, par exemple, que l'on n'altère pas une marche $ax + by$, en substituant à $a$ et $b$ leurs résidus par rapport à $m$; que, d'un autre côté, toute marche $kax + kby$, supposée parfaite, donnera, dans un autre ordre, les mêmes cases que la marche $ax + by$; à ce point de vue, il n'y aura sur l'échiquier que $m(m+1)$ marches réellement différentes, et elles se grouperont en $m+1$ directions $ax + by$ distinctes, comprenant chacune $m$ lignes ou marches parallèles.

Si, pour chaque ligne d'une direction parfaite, la somme des $m$ nombres distincts est égale à $\frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, la direction est dite *magique*, et si, eu égard à la valeur du module, le carré comprend le plus grand nombre possible de directions magiques, il est dit *hypermagique*.

Dans les carrés magiques ordinaires, les directions des lignes et des colonnes sont seules magiques; les lignes des diagonales doivent bien donner la même somme, mais leurs directions ne sont pas nécessairement magiques.

Dans le cas où les directions des diagonales sont magiques, on a les carrés définis comme diaboliques par Ed. Lucas, c'est-à-dire ceux qui restent magiques quand, après avoir coupé le carré par une parallèle aux $x$ ou aux $y$, on permute les deux parties.

Dans le cas d'un module premier, il est aisé de construire des carrés ayant jusqu'à $m-1$ directions magiques, dont deux seulement, par suite, ne sont pas magiques.

Dans le cas d'un module composé, le nombre des directions

magiques possibles se réduit, parce que les coefficients $a$ et $b$ doivent être l'un et l'autre premiers avec $m$. La théorie devient dès lors plus complexe.

Si on ne peut la considérer comme entièrement achevée, elle n'en a pas moins été singulièrement avancée par M. Arnoux; mais on remarquera qu'en fait, si l'hypermagie des carrés paraît tout d'abord une complication de la magie simple, par suite de l'addition de nouvelles conditions, le problème est en réalité facilité, puisque c'est l'indétermination même qui, dans le cas général, crée le grand embarras.

Se proposer de construire un carré magique différent de ceux que l'on connaît déjà est au reste une occupation qui, je l'avoue, ne me séduit point personnellement, mais, un carré magique construit étant donné, retrouver une marche rationnelle y conduisant, c'est là, il me semble, un problème dont la difficulté ne laisse pas que d'être quelque peu agaçante. Or, non seulement il n'y a pas de méthode générale, mais on connaît des carrés jusqu'à présent réfractaires à toute analyse. M. Arnoux a donné des procédés (par des abaques) très ingénieux et très pratiques pour l'étude des carrés donnés, mais ils ne sont guère applicables en fait qu'aux carrés plus ou moins hypermagiques. PAUL TANNERY.

## COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J. DE SEGUIER. — SUR DEUX FORMULES FONDAMENTALES DANS LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES ET DE LA MULTIPLICATION COMPLEXE D'APRÈS KRONECKER. Paris, Gauthier-Villars.

L'auteur commente la partie arithmétique du *Zur Theorie der elliptischen Functionen* de Kronecker. Les recherches de Kronecker et les siennes propres sont groupées autour des deux formules suivantes de l'illustre savant

(1)

$$\tau \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}}$$

$$= \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}};$$

$D_1$ et $D_2$ sont des discriminants; $D_1 D_2 = D = D_0 Q^2$, D étant le discriminant de la forme $(a, b, c)$ et $D_0$ le discriminant fondamental correspondant (1); $a$ est premier à $2D$, $b$, $c$ divisibles par tous les facteurs premiers de Q;

$\sum_{a,b,c}$ s'étend à un système de représentants $(a, b, c)$ des classes primitives, choisies de manière à satisfaire aux conditions précédentes.

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty$, sauf $m = n = 0$, si $D < 0$, avec $2a\frac{m}{n} + b \geq \frac{T}{U}$, $n > 0$, si $D > 0$, $(T, U)$ étant la plus petite solution positive de l'équation de Pell $t^2 - Du^2 = 4$;

$\tau = 2$ pour $D < -4$, $\tau = 4$ pour $D = -4$, $\tau = 6$ pour $D = -3$;

$\tau = 1$ pour $D > 0$;

(1) $D = b^2 - 4ac$ et $Q^2$ est le plus grand diviseur carré de D tel que $\frac{D}{Q^2}$ soit encore un discriminant.

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\rho=0}\left[\dfrac{-1}{\rho\sqrt{-D}}+\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{m,n}\dfrac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}}\right] \\ \qquad =\dfrac{1}{\sqrt{-D}}\left[-2\Gamma'(1)+\log\dfrac{c}{-D}-2\log\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)\right], \end{array}\right.$$

$a$, $b$, $c$ sont quelconques, réels ou complexes; $D=b^2-4ac$; la partie réelle de $\frac{a}{\sqrt{-D}}x^2+\frac{b}{\sqrt{-D}}xy+\frac{c}{\sqrt{-D}}y^2$ est une forme positive;

$$\omega_1=\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2c},\qquad \omega_2=\frac{b+i\sqrt{-D}}{2c},$$

$$\eta(\omega)=e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2ni\pi\omega}).$$

Chacune des deux premières Parties est consacrée à une de ces deux formules, et la troisième à leur application combinée.

Dans la première Partie, où se trouve reprise presque en entier la théorie des formes quadratiques, on remarquera en particulier l'évaluation achevée des sommes de Gauss dans le cas général, la formule de réciprocité pour deux nombres quelconques, positifs ou négatifs, l'expression unique du nombre $K(D_0)$ des classes de discriminant fondamental $D_0$

$$K(D_0)=-\frac{1}{\log E(D_0)}\sum_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{|D_0|}}\right),$$

$$E(D_0)=\frac{T+U(\sqrt{D_0})}{2},$$

$$(\sqrt{D_0})=\begin{cases}|\sqrt{D_0}| & \text{si}\quad D_0>0,\\ i|\sqrt{D_0}| & \text{si}\quad D_0<0,\end{cases}$$

enfin le théorème suivant relatif à un groupe de classes primitives introduit par Gauss :

$\mathfrak{K}_d$ étant le groupe des classes primitives de discriminant $D=D'd^2$ ($D'$ étant un discriminant) qui, composés avec une classe quelconque de diviseur $d$ et de discriminant D, conduisent à une même classe de diviseur $d$ et de discriminant D, tout caractère appartenant à D et à $D'$ a la valeur $+1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{K}_d$, et tout caractère appartenant à D, mais n'appartenant plus

à $D'$, prend dans les classes de $\mathfrak{K}_d$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur $-1$; si $d$ est quelconque, il faut supposer $D < 0$ ou $D_0 \not\equiv 0 \pmod{16}$; si $d$ est impair, $D$ peut être quelconque.

L'établissement rigoureux de la seconde formule a nécessité une étude soigneuse de l'intégrabilité et de la continuité de certaines séries à un ou deux indices sur laquelle Kronecker ne s'était pas arrêté.

Les résultats de la troisième Partie paraissent nouveaux et intéressants. L'auteur, poursuivant les recherches de Kronecker et de M. Weber, obtient, pour le cas d'un discriminant quelconque, l'expression des normes partielles de certaines fonctions modulaires à modules singuliers par les solutions de l'équation de Pell. Ainsi, en désignant par $q$ un nombre premier et en supposant que $\omega$ parcourt les racines d'un système de formes quadratiques représentantes d'un genre quelconque de discriminant D, le produit

$$\prod_{\omega} \frac{\eta_1\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta_1(\omega)}$$

se trouve exprimé par un produit d'unités fondamentales $E(D_1)$, $D_1$ ayant le même sens que dans la formule (1).

Kronecker n'avait obtenu ce résultat que pour $Q = 1$ et M. Weber que pour $Q = 2$.

# MÉLANGES.

## RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

(*Suite.*)

## PREMIÈRE PARTIE.

### LE PROBLÈME DE L'ÉQUIVALENCE.

### A. — Équivalence des formes quadratiques et bilinéaires.

Dans ce paragraphe, nous nous occuperons des transformations linéaires des formes quadratiques et bilinéaires; de plus nous traiterons encore, pour ces dernières, des transformations indépendantes effectuées sur les deux séries de variables. Ces formes se distinguent des autres en ce que deux types de même espèce peuvent toujours être transformés linéairement l'un dans l'autre.

Le problème, si important par ses applications, qui consiste à représenter une ou, simultanément, deux formes quadratiques en une somme d'un nombre le plus petit possible de carrés d'expressions linéaires, a déjà été examiné par Lagrange, Cauchy, Gauss, Jacobi, Plücker, Hesse et autres (1).

En 1858 (2), Weierstrass a montré comment il y avait lieu de

(1) *Consulter* le traité de Baltzer : *Determinanten* (traduction française par Houël). *Voir*, par exemple, les applications au problème des oscillations dans le Mémoire de Pockels, *Ueber die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig, p. 44-50; 1891, ainsi que dans celui de Routh, *Dynamics of a system of rigid bodies*, Part VII; 1890.

(2) *Berliner Ber.*, p. 207-220; 1858.

modifier les formules de Cauchy et Jacobi relatives à la réduction simultanée de deux formes quadratiques, lorsque le nombre des carrés est inférieur à celui des variables, c'est-à-dire lorsque les racines de l'équation caractéristique ne sont pas toutes différentes entre elles. L'auteur examine en particulier la transformation réelle de formes réelles.

Quant aux faisceaux de transformations d'une forme quadratique en elle-même, étudiés par Cayley et Hermite, nous avons déjà eu l'occasion d'en faire mention (p. 186-187).

Les recherches sur les transformations des fonctions Θ ont conduit Weierstrass au problème algébrique dans lequel on se propose de ramener une forme bilinéaire de $2n$ variables à la forme canonique d'une certaine somme de produits. Kronecker reconnut en 1866 (¹) que, si le déterminant de la forme est différent de zéro, cette réduction peut être effectuée après résolution d'une résolvante caractéristique de $n^{\text{ième}}$ degré (à racines inégales). Il montra en même temps comment on peut ramener à ce cas le problème plus général de la transformation en elle-même d'une forme bilinéaire à l'aide des mêmes substitutions appliquées aux deux séries de variables.

L'année suivante Christoffel (²) confirma ces résultats par la méthode d'Aronhold et établit le théorème important à savoir que le nombre de paramètres arbitraires contenus dans les coefficients de la substitution coïncide avec celui des invariants absolus de la forme.

Dans son Mémoire de 1868, Weierstrass (³) étudie, à un point de vue tout à fait général, le problème de l'équivalence de deux *faisceaux* de formes respectivement quadratiques ou bilinéaires.

---

(¹) *Journ. für Math.*, LXVIII, p. 273-285 ou *Berl. Ber.*, octobre 1866. *Consulter* dans Clebsch-Gordan : *Abel'sche Funktionen* (Leipzig, 1866), le chapitre sur les transformations linéaires des fonctions θ. Frobenius a étendu la transformation de Kronecker aux fonctions θ à plusieurs variables (*Journ. für Math.*, XCV, p. 264 et suivantes). *Voir* aussi Weber, *Annali di Mat.*, (2), IX, p. 126 et suiv.; 1880, et Wiltheiss, *Math. Ann.*, t. XXVI, p. 127 et suiv.; 1886.

(²) *Journ. für Math.*, LXVIII, p. 253-272.

(³) *Berl. Ber.*, p. 310-338; 1868.

*Voir* au sujet de ce problème : Stickelberger, *Dissert.*, Berlin, 1874; Maurer, *Dissert.*, Strassbourg, 1887; Ed. Weyr, *Wiener Monatshefte*, t. I; 1890. Ce dernier prend comme base la théorie des matrices d'après Cayley.

L'introduction des *diviseurs élémentaires* (¹) lui permet de présenter les résultats sous une forme très simple.

Comme criterium de la transformabilité de deux faisceaux $f + \lambda\varphi$ et $F + \lambda\Phi$, l'un dans l'autre, il résulte que *les déterminants doivent admettre les mêmes diviseurs élémentaires.*

Un diviseur élémentaire est un invariant irrationnel du faisceau; cependant Kronecker (²) a donné (1874) à ce criterium une forme rationnelle en remplaçant les diviseurs élémentaires par le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'un même ordre.

Afin de pouvoir comparer, au point de vue de l'équivalence, les deux faisceaux de formes, Weierstrass introduit (p. 319) certaines formes canoniques appropriées, dont les nouvelles variables dépendent uniquement des diviseurs élémentaires. Cette notion de formes canoniques qui, à première vue, peut paraître arbitraire (³), dépend ainsi du problème général de l'équivalence (⁴) et reçoit de cette façon un caractère bien défini.

La seule restriction que fait Weierstrass est l'hypothèse de

---

(¹) On retrouve cette notion dans les travaux de Sylvester; *voir* plus haut p. 185. Récemment Frobenius a appliqué la méthode des diviseurs élémentaires à l'équivalence de deux formes binaires biquadratiques et à celle de deux formes binaires doublement biquadratiques (*Journ. für Math.*, t. CVI, p. 125-188, §§ 4, 5, 14; 1890).

L'équivalence de deux formes binaires biquadratiques a été étudiée directement par Klein à l'aide d'invariants irrationnels (Klein-Fricke, *Modulfunktionen*. Leipzig, §§ 4, 5, 6; 1890).

Segre a examiné la transformation linéaire simultanée de deux formes bilinéaires en leurs réciproques (*Batt. G.*, t. XXII, p. 29-33; 1884).

Aux recherches de Weierstrass et de Kronecker vient se rattacher un Mémoire de Study (*Wiener Monatshefte*, t. II, p. 1-32, 1891) dans lequel l'auteur formule, pour les formes bilinéaires, certaines propriétés qui proviennent de la théorie des séries récurrentes.

Dans les *Comptes rendus* de 1884 (t. XCVIII), Poincaré (p. 344-352) et Picard (p. 416-417) ont considéré, pour la transformation en elle-même d'une forme bilinéaire à deux séries de trois variables homogènes, le cas où les variables et les coefficients correspondants sont des quantités complexes.

Mentionnons encore la *Dissertation* (Berlin, 1872) de Killing qui a appliqué les diviseurs élémentaires à la discussion de l'intersection de deux surfaces du second degré.

(²) *Berl. Ber.*, p. 60; 1874.

(³) *Voir* à ce sujet la remarque de Kronecker. *Berl. Ber.*, p. 72; 1874.

(⁴) Il est vrai que jusqu'ici, pour les formes d'un ordre supérieur, on a surtout employé le procédé inverse. *Cf.* Sylvester, *Cambr. and Dublin Math. J.*, t. VI, p. 193.

l'existence des diviseurs élémentaires, c'est-à-dire qu'il suppose que le déterminant du faisceau n'est pas identiquement nul. Pour ce dernier cas, Kronecker a immédiatement (1) établi une forme canonique en répartissant les variables en deux groupes. De plus il montre que le procédé de Weierstrass est réversible pour le cas des faisceaux quadratiques contenant au moins une forme de signe invariable.

Six ans plus tard (1874), Kronecker (2) réunit ses recherches en un exposé général comprenant tous les faisceaux de formes $f + \lambda\varphi$, tant quadratiques que bilinéaires.

Si de cette façon la méthode à l'aide du plus grand commun diviseur présente une grande importance (Kronecker appuie tout particulièrement (3) sur les avantages de ce procédé arithmétique pour fixer les invariants, en l'opposant à la méthode littérale ordinaire), un examen plus approfondi montre pourtant que l'égalité de ces invariants ne suffit pas dans tous les cas comme criterium de l'équivalence. C'est ce que fournit seulement la notion fondamentale des *faisceaux élémentaires*, à savoir ceux dont le déterminant est, ou une puissance entière d'une expression linéaire, ou une quantité identiquement nulle. Un faisceau quelconque peut toujours être représenté d'une seule manière à l'aide d'un ensemble de faisceaux élémentaires; ces derniers (ainsi que leur nombre) se présentent comme les véritables invariants de l'équivalence.

La réduction d'un faisceau à ses parties élémentaires exigeait une extension de la méthode de 1868; on y est parvenu en faisant disparaître les variables, non successivement l'une après l'autre (comme d'après Jacobi), mais par groupe en introduisant des variables canoniques.

Dans un travail publié en décembre 1873, C. Jordan (4) était parvenu à d'autres résultats : il s'ensuivit une polémique entre

(1) *Berl. Ber.*, p. 339-346; 1868.

(2) *Berl. Ber.*, p. 59-76; p. 149-156; p. 206-232; 1874.

(3) *Loc. cit.*, p. 60.

(4) *Comptes rendus*, décembre 1873. La Note de Kronecker (*Berl. Ber.*, p. 71-76; 1874) fut suivie de deux Communications de Jordan : *Journ. de Liouville* (2), t. XIX, p. 35-54, et *Comptes rendus*, mars 1874. *Voir* la réponse de Kro-

l'auteur et Kronecker qui avait soumis ce travail à une critique serrée.

Il ressort des belles recherches de Kronecker que, par un groupement convenable des variables, la méthode de réduction de Weierstrass reste encore valable ([1]) dans le cas où le déterminant du faisceau est identiquement nul, tandis que cette extension ne peut se faire, dans la méthode de Jacobi, que pour les formes symétriques et alternées (bilinéaires).

Après avoir établi par là une théorie tout à fait générale des transformations indépendantes (*incongrues*) des formes et faisceaux de formes bilinéaires, Kronecker reprend ([2]) son ancien problème (de 1866) de la transformation d'une forme bilinéaire en elle-même à l'aide de substitutions identiques (*congrues*) effectuées sur les deux séries de variables. Ici encore, l'auteur résout la difficulté que présente le cas du déterminant identiquement nul, en introduisant (p. 410) quatre *types réduits*. Il définit encore les systèmes invariants de la transformation en prenant pour base la notion du plus grand commun diviseur ([3]). C'est dans ce même esprit que l'auteur a récemment ([4]) complété ses recherches (1889 et 1890).

Un rapprochement entre la méthode de la théorie des formes et la méthode arithmétique semblait dès lors désirable. Un premier pas dans ce sens a été fait par Rosenow ([5]) (1890). Il établit pour les formes bilinéaires de deux séries de trois variables, les invariants de Kronecker — qui, abstraction faite du déterminant, sont

---

necker dans les *Comptes rendus,* 1874, p. 1181, et un examen détaillé dans les *Berl. Ber.*, p. 206-232. Jordan donna une réponse définitive dans les *Comptes rendus,* p. 1763. Son Mémoire sur les formes quadratiques dans le *Journ. de Liouville* (2), t. XIX, p. 397-422, est correct.

([1]) *Loc. cit.,* p. 156, 211, 212. Pour la transformation de Jacobi, consulter le *Journ. für Math.,* t. LIII, p. 265-270.

([2]) *Berl. Ber.*, p. 397-447; 1874.

([3]) *Loc. cit.*, p. 435-438.

([4]) *Berl. Ber.*, p. 1225-1237, 1375-1388; 1889; p. 9-17, 34-44; 1890; p. 9-17, 33-44; 1891.

([5]) *Journal für Math.*, CVIII, p. 1-24; *Programm der 4. höheren Bürgerschule zu Berlin*, Pâques 1891 et Pâques 1892.

L'extension aux formes de $n$ variables exigerait la connaissance des systèmes invariants algébriques correspondants. Ces derniers ne sont connus que d'une façon incomplète. *Cf* Mertens, *Krak. Denkschr.*, X, XII; 1885, 1886.

caractérisés par des nombres entiers — et, d'après cela, il répartit les formes en diverses classes.

Si nous revenons à l'année 1874, nous devons encore citer le beau Mémoire de Darboux (1), où les théorèmes de Weierstrass et de Kronecker se trouvent exposés d'une façon élégante dans toute leur généralité. Comme moyen auxiliaire, l'auteur introduit plusieurs séries de quantités arbitraires en bordant le déterminant du système. Lorsque le déterminant primitif passe par la valeur zéro, la série des déterminants se comporte comme la suite de Sturm au passage d'une racine d'une équation algébrique.

Dans ce qui va suivre (2), nous nous occuperons principalement de la transformation en elle-même d'une forme respectivement quadratique ou bilinéaire.

Jusqu'ici on avait surtout en vue la détermination de substitutions telles qu'une forme donnée admette certaines tranformations assignées à l'avance. La question prit une nouvelle direction. On se proposa inversement de déterminer, dans le groupe général des substitutions, le sous-groupe permettant de transformer une forme quadratique (bilinéaire) en elle-même. Les formes mêmes passent à l'arrière-plan, tandis que le principal intérêt se concentre sur la structure du groupe des substitutions. Malheureusement, ce principe si fécond n'a encore pu s'enraciner qu'en des points isolés (3) de la théorie des formes.

Rosanes (4) fut le premier (1875) qui adopta cette nouvelle voie. Il montra, en se limitant aux formes quadratiques, qu'à

---

(1) *Journal de Liouville*, (2), XIX, p. 347-396.

La méthode de M. Darboux a servi de base à un Mémoire récent de Sauvage : *Sur les diviseurs élémentaires et ses applications* (*Ann. Éc. Norm.*, 1891). La notion de diviseur élémentaire s'y trouve exposée avec beaucoup de clarté. Par l'emploi de la suite de Darboux, l'auteur se trouve conduit directement aux formes canoniques de Weierstrass, ce qui fait complètement disparaître le caractère arbitraire qu'on pourrait leur attribuer. — *Voir* aussi les Mémoires de Sauvage dans les *Ann. de l'Éc. Norm.* de 1893 et dans les *Ann. de Toulouse* de 1894. H. F.

(2) *Comparer* à ce qui précède la réduction d'une forme bilinéaire à une forme canonique au moyen de substitutions biorthogonales : Beltrami, *Batt. G.*, XI, p. 89-107; 1873, ainsi que les travaux de Cosserat, *Ann. de Toulouse*, III, p. 1-12, et de Sylvester *Comptes rendus*, CVIII, p. 651-653, *Mess.* (2), XIX, p. 1-5, 42-46.

(3) *Voir* Maurer, *J. für Math.*, CVII, p. 89-116; 1890.

(4) *Journ. für Math.* LXXX, p. 52-72.

chaque équation fondamentale et réciproque (¹) de Cayley appartient un système *asymétrique* (²) de formes linéaires et, par conséquent, une forme quadratique correspondante.

Ce principe a été développé dans toute sa généralité par Frobenius (³) (1877), qui a découvert les propriétés caractéristiques des substitutions qui laissent invariantes les formes quadratiques ou, ce qui revient essentiellement au même, les formes bilinéaires respectivement symétriques ou alternées.

Cependant nous devons mentionner que déjà, en 1873, Bachmann (⁴) avait étudié à ce point de vue les formes quadratiques ternaires en venant ainsi compléter les résultats de Hermite. De son côté, ce dernier fit voir (⁵) comment on peut de ses formules déduire celles de Bachmann.

Frobenius part de cette idée très simple que le système des coefficients d'une forme bilinéaire représente une substitution déterminée de l'une des deux séries de variables. Cela lui permit d'envisager les transformations de formes bilinéaires, d'une manière générale comme un composé de substitutions, et de fonder là-dessus un algorithme fécond dont les opérations offrent, par leur simplicité, une certaine analogie avec la multiplication des nombres complexes (*extensive Zahlen*). On en déduit immédiatement les conditions que doivent remplir les substitutions permettant de transformer une forme en elle-même.

Cet éminent savant nous présente dans son Mémoire des applications fort remarquables à l'étude des systèmes de nombres complexes. Mais nous devons nous borner à les signaler; il en est de même des recherches de Lipschitz (⁶) et de Kronecker (⁶) sur les

---

(¹) *Voir* un exemple très simple dans Brioschi, *Annali di Tort.*, V, p. 201-206; 1854. La réciprocité de l'équation fondamentale a été démontrée d'une manière générale par Kronecker (*Journ. für Math.*, LXVIII, p. 276; 1866).

(²) *Loc. cit.*, p. 59, 61.

(³) *Journ. für Math.*, LXXXIV, p. 1-63; cf. *Comptes rendus*, LXXXV, p. 131-134. A ce sujet se rapportent encore les Mémoires suivants du même auteur : *Journ. für Math.*, LXXXVI, p. 44-71, 146-208; 1879, et t. LXXXVIII, p. 96-117.

(⁴) *Journ. für Math.*, LXXVI, p. 331-341. *Voir* TANNERY, *Bull. Darboux*, XI, p. 221-233; 1876.

(⁵) *Journ. für Math.*, LXXVIII, p. 325-328; 1874.

(⁶) LIPSCHITZ, *Untersuchungen über die Summe von Quadraten*, Bonn, 1886; *Journ. de Math.* (4), II, 373-440; 1886, et *Berl. Ber.* 1890; KRONECKER, *Berl. Ber.*, p. 525-541, 602-607, 691-699, 873-884, 1063-1080, 1375-1388; 1890, p. 9-17, 33-44; 1891.

liens étroits qui existent entre les quaternions (et biquaternions) et les substitutions orthogonales correspondantes.

Par contre, nous consacrerons quelques lignes à l'application [1] des transformations bilinéaires au *problème de Pfaff*, d'autant plus que c'est précisément un exemple qui montre comment, dans certaines circonstances, la recherche des invariants de groupes infinis dans le champ de la théorie des fonctions, peut être ramenée à la détermination purement algébrique des invariants d'un groupe projectif.

Le problème de Pfaff a pour but, comme on sait, de fixer les conditions pour que deux expressions différentielles linéaires données à $n$ termes puissent être ramenées l'une à l'autre par une transformation générale par points. En supposant le problème possible, Frobenius montre qu'un certain système [2], composé d'une forme bilinéaire alternée et d'une forme linéaire, est transformé en un système analogue par une certaine substitution (linéaire) congrue, tandis que les coefficients de la forme et ceux de la substitution, tout en dépendant des variables du problème, jouent le rôle de simples constantes. La réciproque est également vraie. En examinant les propriétés de ces relations algébriques, l'auteur prouve [3] que tout revient à une égalité entre les invariants entiers $p$ de ces deux couples de formes, résultat que Lie venait de trouver à l'aide de sa théorie des groupes. Cet invariant caractéristique $p$ n'est autre chose, comme le fait voir Frobenius, que le nombre des fonctions indépendantes dans l'expression différentielle de Pfaff, prise sous sa forme canonique.

Les recherches de Frobenius ont donné lieu à un travail de Stickelberger [4] sur les substitutions orthogonales ou, en général, sur celles qui laissent inaltérée une forme quadratique déterminée

---

(1) *Journ. für Math.*, LXXXII, p. 230-315; 1877. *Voir* FORSYTH, *Theory of differential Equations* I, Chap. XI; Cambridge, 1890. Christoffel a déjà fait une application analogue en 1870 (*Journ. für Math.*, LXX, p. 46-70). Lipschitz est arrivé aux mêmes résultats à l'aide des méthodes du calcul des variations (*Journ. für Math.*, LXX, p. 71-102, 274-287, 288-295; t. LXXII, p. 1-56).

(2) Ce système a été examiné en détail par Morera en 1883 (*Atti di Torino*, t. XVIII, p. 383-403).

(3) Le *Bull. des Sciences math.* (p. 14-36, 49-68, 1882) contient un exposé fort élégant du problème de Pfaff par Darboux, où l'auteur met en évidence les propriétés d'invariance. La marche est assez analogue à celle de Frobenius. L'étude elle-même remonte cependant à l'année 1876. H. F.

(4) *Programm des Polytechnikums Zürich*, p. 1-16; 1877.

(*definite* selon Gauss). Dans un autre Mémoire ([1]), le même auteur complète d'une façon heureuse la réduction des faisceaux de formes bilinéaires, en montrant que l'évanouissement du dénominateur dans la forme normale, ce qui rendrait cette dernière illusoire, peut toujours être évité.

Il restait encore à traiter un problème important, celui d'étendre aux formes bilinéaires quelconques la théorie de Frobenius sur les transformations congrues de formes quadratiques en elles-mêmes. Ce fut l'objet des recherches de Voss ([2]). Le problème proposé se trouve ramené à cet autre cas plus simple qui consiste à transformer deux faisceaux bilinéaires donnés l'un dans l'autre au moyen de substitutions congrues. Les formules finales présentent une analogie frappante avec celles de Cayley et Hermite. L'une des substitutions étant obtenue, on peut en déduire toutes les autres jouissant des mêmes propriétés, grâce à l'algorithme ([3]) introduit par Frobenius. Ce Mémoire apporte un perfectionnement dans les méthodes au point que les opérations auxiliaires deviennent rationnelles.

D'ailleurs, il est à remarquer que l'esprit de la méthode de Voss se révèle déjà dans son travail ([4]) sur les substitutions orthogonales dont la publication coïncida avec celle du grand Mémoire de Frobenius en 1877.

C'est encore à Voss que revient le mérite d'avoir reconnu dans une identité ([5]) entre deux déterminants toute une série de théorèmes sur les diviseurs élémentaires qui avaient été démontrés par Frobenius, Siacci, Stickelberger et Stieltjes.

Nous avons cité plus haut une polémique entre Kronecker et Jordan. Ce dernier reconnut en principe les objections faites. De son côté il poursuivit ses recherches sur les transformations des formes quadratiques et publia ses nouveaux résultats en 1888 ([6]).

---

([1]) *Journ. für Math.*, LXXXVI, p. 20-43; 1879. *Voir* sa Thèse; Berlin, 1874.

([2]) *Göttinger Nachr.*, p. 425-433; août 1887.

*Münchener Abh.*, XVII, p. 3-121; 1890. *Voir* aussi *Münch. Ber.*, p. 175-211; 1889.

([3]) Dans les *Münch. Ber.*, (p. 283-300, 1889) Voss traite le même problème en suivant une autre voie.

([4]) *Math. Ann.*, XIII, p. 320-374; 1878.

([5]) *Münch. Ber.*, p. 329-339; 1889.

([6]) *Journ. de Math.*, (4), IV, p. 349-368. *Voir* aussi les Notes dans les *Comptes rendus*.

La répartition des formes en classes et sous-classes, basée sur les diviseurs élémentaires de la fonction caractéristique, se trouve également étendue aux substitutions elles-mêmes. Il termine en donnant pour ces dernières quelques types canoniques. Ce qui frappe dans ces Mémoires, c'est de voir l'auteur tenir si peu compte des recherches des autres géomètres.

Toutefois, l'on reconnaîtra, d'après l'exposé que nous venons de donner, que la théorie de l'équivalence des formes quadratiques et bilinéaires doit son développement actuel surtout à l'habileté des géomètres allemands.

Nous avons dû omettre une série de sujets, en particulier le problème important de la canonisation d'une forme, pour nous occuper plus spécialement des propriétés invariantes des substitutions. A ce problème se rattache le Mémoire de Gundelfinger (¹) qui apporta une simplification et une généralisation dans la méthode de Jacobi et Plücker pour la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés; puis une série de démonstrations (²) du théorème d'inertie de Sylvester et l'étude des conditions (³) qui doivent être remplies pour qu'une forme quadratique de $n$ variables puisse être représentée à l'aide d'une somme de moins de $n$ carrés; enfin l'expression des coefficients canoniques sous forme de déterminants (⁴).

Qu'il nous soit permis, à la fin de ce paragraphe, d'attirer l'attention des géomètres sur un point d'une grande importance.

Bien que dans les travaux cités le caractère du groupe de substitutions laissant invariantes les formes quadratiques et bilinéaires soit intervenu implicitement, nous sommes cependant encore loin de posséder pour ces formes une théorie complète basée sur le principe des groupes de transformations. Pour combler cette lacune il y aurait, en première ligne, à faire une étude approfondie des sous-groupes d'un pareil groupe et à appliquer ensuite les résultats aux formes elles-mêmes.

---

(¹) *Journ. für Math.*, XCI, p. 221-237; 1881.

(²) *Voir*, par exemple, DE PRESLE, *Bull. S. M. F.*, XV, p. 179-181; 1887.

(³) BENOIT, *Comptes rendus*, CI, p. 869-871; 1885; *Nouv. Ann.*, (3), V, p. 30-36; 1885; DE PRESLE, *Bull. S. M. F.*, XIV, p. 98-100; 1886; ANDRÉ, *Bull. S. M. F.*, XV, p. 188-192; VALYI, *Hoppe Arch.*, (2), VI, p. 445-448; 1888.

(⁴) *Voir*, par exemple, STUDNICKA, *Prag. Ber.*, p. 256-265; 1888.

Dans cette direction vient se ranger un travail de Werner ([1]) sur la détermination des plus grands sous-groupes pour le cas des formes quadratiques. De son côté, Lie ([2]) a examiné un certain nombre de cas; il montre en particulier qu'un pareil groupe transforme en lui-même ou un point ou une multiplicité linéaire du système fondamental (obtenu en annulant la forme). Ce théorème a été confirmé dans une autre voie par Killing ([3]).

Le groupe le plus important dans la théorie de Lie est celui (à trois paramètres) qui laisse invariante une forme quadratique à trois variables. Suivant qu'il est ou non contenu comme sous-groupe dans un groupe de transformations de $n$ ($\geq 3$) variables, celles-ci se répartissent essentiellement en deux classes différentes. Cette répartition des variables correspond, comme l'ont fait voir Engel ([4]) et Killing ([5]), à celle en groupes *intégrables* et *non intégrables* (employés pour l'intégration des équations différentielles) que l'on retrouve dans un travail antérieur de Lie ([6]).

---

**B. — Équivalence des formes non quadratiques.**

*a. — Systèmes de formes transformables linéairement l'une dans l'autre.*

Si l'on fait abstraction des formes quadratiques et bilinéaires, il semble que c'est Clebsch ([7]) le premier (1870) qui se soit demandé si la condition d'égalité des invariants absolus, nécessaire d'après Aronold, était toujours suffisante pour que deux formes soient transformables linéairement l'une dans l'autre, et en se proposant, au cas contraire, de rechercher les autres conditions qu'exige une pareille transformation. On peut en effet construire

---

([1]) *Math. Ann.*, XXXV, p. 113-160; 1889.

([2]) *Abhandl. der Ges. d. W. zu Christiania,* 1885.

([3]) *Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 239-254; 1890.

([4]) *Leipz. Ber.*, p. 95-99; 1887. Cf. *Fortsch. d. M.*, XIX, p. 356; 1887.

([5]) *Math. Annalen*, XXXVI, p. 172; 1890.

([6]) *Norweg. Arch.*, III, p. 112-116; 1874.

*Voir* une application au système des nombres complexes, SCHEFFERS, *Math. Ann.*, XXXIX, p. 293-390; 1891; de même, STUDY, *Gött. Nachr.* et *Leipz. Ber.*, de 1889. *Wiener Monatsh.*, I, 1890, II, 1891. Stephanos a établi une étude du système des nombres complexes en se basant sur la théorie des formes; Athènes, Jubilé 1888 (en grec). *Consulter* aussi POINCARÉ, *Comptes rendus*, XCIX, p. 740-742; 1884.

([7]) *Math. Ann.*, II, 373-382.

des exemples simples qui montrent l'insuffisance de la première hypothèse ([1]).

Un premier moyen permettant d'aborder la question est offert par la représentation typique des formes, dont les coefficients sont, comme l'on sait, eux-mêmes des invariants. On voit alors sans peine que, si deux formes peuvent être ramenées à la forme type par des substitutions linéaires, il existe, à coup sûr, une substitution donnant le passage de l'une des fonctions à l'autre. Il s'agit ensuite d'indiquer jusqu'à quel point une pareille représentation typique peut avoir lieu. Un raisonnement facile montre qu'il y a certainement équivalence entre deux formes binaires (de même ordre) si, outre les invariants absolus, il y a coïncidence entre un couple de covariants indépendants, linéaires ou quadratiques, suivant que l'ordre des formes est pair ou impair ([2]).

Cependant cette voie ne semble pas conduire à une solution complète du problème : nos connaissances sur la représentation typique des formes d'ordre supérieur sont encore très insuffisantes.

Par contre, la méthode d'Aronhold, signalée dans l'introduction, nous offre un moyen direct; aussi a-t-elle été développée par plusieurs géomètres.

Il s'agissait d'abord de calculer les invariants absolus directement par voie algébrique, sans avoir recours aux équations différentielles. Gram ([3]) a résolu cette question (1874), en s'appuyant sur les groupes de substitutions. Si, d'après Aronhold, on forme

---

([1]) L'exemple le plus simple est certainement celui d'une forme binaire du sixième degré à élément triple. C'est à ce fait qu'est due une erreur commise par Cayley dans son calcul des modules d'une classe de formes ternaires (*Math. Ann.*, III, p. 268-271; 1870).

Bolza a étudié l'équivalence des formes binaires du sixième degré dans les *Math. Ann.*, XXX, p. 546-552, 1887. Un exposé détaillé de son étude se trouve dans le *American Journ.*, X, p. 47-70, 1887.

D'ailleurs le criterium de l'égalité des invariants absolus n'est plus applicable au cas où *tous* les invariants de chacune des deux formes s'évanouissent, c'est-à-dire si les invariants absolus deviennent indéterminés. De pareilles formes ont été étudiées par Hilbert (*Gött. Nachr.*, p. 6-96, 439-449; 1892). L'exemple le plus simple est celui de deux formes biquadratiques ayant l'une, un élément triple, l'autre, un élément quadruple.

([2]) *Voir* les exemples dans le Mémoire de Clebsch et Gordan, *Annali di Mat.*, (2), I, p. 23-79; 1867.

([3]) *Math. Ann.*, VII, p. 230-241. *Consulter* la méthode de Gundelfinger dans *Salmon-Fiedler*, p. 452-458; 1877, ainsi que les considérations de Study dans son Traité *Methoden...*, p. 104 et suivantes; 1889.

successivement les résultants d'un couple de formes F et F', puis d'un second couple F et F'' et qu'on élimine entre ce double système les coefficients de F, il en résultera immédiatement l'égalité des invariants absolus de F et de F'.

En examinant la réciproque, l'auteur se trouve conduit au théorème suivant : « Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse transformer l'un dans l'autre deux systèmes de formes quelconques sont : 1° *que les invariants absolus soient égaux ;* 2° *que les mêmes covariants s'annulent identiquement* ».

Il restait encore à délimiter le domaine des classes de formes pour lesquelles l'égalité entre les invariants absolus suffit à l'équivalence. Cette question a été traitée par Christoffel ([1]), qui, comme Gram, a pris pour base le principe d'équivalence de Gauss. Il réussit à pénétrer le sujet sans faire préalablement des hypothèses sur la forme des équations finales. Le problème se trouve précisé en ce sens que l'auteur se propose de rechercher toutes les formes équivalentes à une forme donnée.

Afin d'étudier les propriétés des équations de conditions entre les coefficients des formes cherchées, Christoffel élimine les coefficients de substitution dans un ordre quelconque, en imposant cependant une marche systématique à chacun de ces derniers. De cette façon, il devient possible de reconnaître quels sont les coefficients inconnus qui entrent dans les conditions de l'équivalence, et de même quels sont les coefficients de substitution encore présents dans les équations finales. Tout dépend du nombre de ces dernières et l'on montre que ce nombre est indépendant de la marche adoptée pour l'élimination. Ce nombre atteint en général son maximum $n^2$ ($n$ étant le nombre des variables), si, d'après Aronhold, le discriminant de la forme est différent de zéro.

*En excluant* ([2]) *toutes les formes pour lesquelles ce nombre maximum n'est pas atteint,* cet éminent savant prouve que l'équivalence de deux formes ne dépend effectivement que de la coïncidence des invariants absolus. Le nombre de ces derniers se trouve ainsi déterminé par une nouvelle méthode.

Il serait évidemment désirable que l'on expliquât, au point de

---

([1]) *Math. Ann.*, XIX, p. 280-290. *Voir* STUDY, *l. c.*

([2]) *Voir* les remarques de Lie dans sa Préface, LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. III ; 1893.

vue de la théorie des invariants, les conditions énoncées par Christoffel. Dans tous les cas, les coefficients de substitution ne peuvent plus contenir de paramètre variable, c'est-à-dire que les formes proposées ne peuvent plus admettre des faisceaux de transformations, comme l'on doit également rejeter le cas où tous les invariants de l'une des deux formes disparaissent ([1]).

Veltmann ([2]) a essayé de modifier la méthode d'élimination d'Aronhold, en partant, inversement, de l'égalité des invariants absolus, afin d'en conclure les conditions de transformation; mais cette marche n'aboutit à aucun résultat nouveau.

Le problème de l'équivalence ne sera susceptible d'une solution satisfaisante que lorsque nous aurons acquis, au point de vue de la théorie des formes, des connaissances plus profondes des différentes espèces de formes ([3]).

Ce serait ici la place d'examiner les transformations particulières qui permettent de réduire une forme donnée à certaines formes canoniques employées dans la pratique; cependant, comme dans le développement historique du sujet, la question des irrationnels qui s'y présentent a pris une place prépondérante, nous aborderons ce problème dans la deuxième Partie (II B) de ce Rapport.

*b. — Formes transformables linéairement en elles-mêmes.*

En découvrant les invariants d'une forme ou d'une série de formes, on avait simplement reconnu des fonctions de leurs coefficients qui, sous l'effet de certains groupes de substitutions linéaires, se reproduisaient à un facteur près, lequel ne dépend que des coefficients de la substitution et que l'on peut d'ailleurs prendre égal à l'unité.

Si ces invariants sont d'une conformation spéciale par rapport à leurs arguments (ils doivent vérifier certaines équations aux dérivées partielles), le caractère général des formes proposées per-

---

([1]) Le cas d'exception $f = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$ cité par Christoffel (p. 284) est précisément de ce dernier type. Les deux invariants S et T (de Aronhold) disparaissent : il en est par conséquent de même pour tous les autres.

([2]) *Schlöm. Z.*, XXII, p. 277-298; 1877 et t. XXXIV, p. 321-330; 1889.

([3]) L'équivalence par rapport à des transformations d'ordre supérieur (par exemple la transformation de Tschirnhausen pour les formes binaires) n'a guère été traitée jusqu'ici.

mettait cependant de donner plus d'extension aux modes de formation des invariants.

On dut avoir recours à de nouveaux moyens auxiliaires, afin de pouvoir détacher la notion de l'invariance de la base des formes originales, en s'imposant comme but la recherche de toutes les formes d'un nombre déterminé d'arguments, qui se transforment en elles-mêmes pour certaines substitutions effectuées sur ces derniers, ou, réciproquement, ce qui revient essentiellement au même, en cherchant à déterminer tous les groupes de substitutions à $n$ variables et les invariants (entiers et rationnels) correspondants.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons surtout aux groupes finis de substitutions de *Galois* (1), les groupes à paramètres arbitraires (2) n'ayant encore guère été traités au point de vue de la théorie des formes.

Dans les formes de cette espèce nous trouverons d'abord les formes binaires, auxquelles on est parvenu par des considérations de la théorie des fonctions.

H.-A. Schwarz (3) les a obtenues en recherchant les intégrales algébriques de l'équation différentielle hypergéométrique, qui est linéaire et du second ordre. Le quotient $s$ de deux solutions particulières $y_1$, $y_2$ satisfait lui-même à une équation différentielle du troisième ordre. Ce rapport détermine la représentation conforme du demi-plan de la variable indépendante $x$ sur un triangle limité par des arcs de cercle et dont on peut former le prolongement analytique.

Dans le cas où $s$ doit être une fonction algébrique de $x$, il faut que le nombre de ces domaines soit fini.

Schwarz se trouve ensuite conduit au problème qui consiste

(1) *Voir* plus haut les définitions, p. 215. Il importe de remarquer que, de son côté, Lie entend par *groupe fini* celui qui dépend d'un nombre fini de paramètres.

Le fait qu'à tout groupe fini correspond toujours un système complet d'invariants a été démontré seulement plus tard par Hilbert.

(2) Nous devons nous borner à mentionner les travaux de Klein et de Lie, *Comptes rendus*, juin 1870, *Math. Ann.*, IV, p. 50-84, auxquels viennent se rattacher plus tard ceux de Lie, Halphen, Sylvester, Poincaré, Picard et d'autres.

(3) *Journ. für Math.*, LXXV, p. 292-335 (voir *Verhandl. der Schweizer Naturf. Ges.;* 1871). Le Chapitre VI du Mémoire de Schwarz contient des renseignements bibliographiques sur ce sujet.

On trouvera dans le tome I de la *Théorie des surfaces* (Livre II, Chap. IV) de M. Darboux un exposé fort élégant de la méthode de Schwarz. H. F.

à *trouver les triangles sphériques dont la reproduction symétrique sur la sphère ne conduit qu'à un nombre limité de triangles différant les uns des autres par leur position*, problème implicitement ([1]) équivalent à celui que nous avons énoncé. Cet éminent savant développe les formes correspondantes et donne la relation qui existe entre deux covariants rationnels et la forme originale.

De son côté, Klein ([2]), sans avoir eu connaissance des travaux de Schwarz, a été conduit directement à la détermination des groupes finis, linéaires et binaires et des formes correspondantes. Ses considérations reposent, d'une part, sur l'interprétation, d'après Riemann, de la représentation de la variable complexe ([3]) sur la sphère, d'autre part sur la signification géométrique d'une transformation linéaire. On sait que ces transformations peuvent être rapportées sans ambiguïté aux mouvements réels ([4]) dans l'espace.

Les groupes finis de ces mouvements s'obtiennent par des considérations très simples. Si nous faisons abstraction du *groupe circulaire* et du *groupe du dièdre* dont nous n'aurons pas à faire usage dans la suite, il nous reste à considérer les groupes de rota-

---

([1]) Le point de vue du *groupe fini de substitutions* apparaît cependant seulement dans le Mémoire de Klein; il en est de même de la notion et de la formation du système complet correspondant. Schwarz ne fait usage ni de variables homogènes, ni de covariants.

([2]) *Erlanger Ber.*, juillet 1874. Dans une Note suivante (*Erl. Ber.*, déc. 1874), Klein examine et développe le travail de Schwarz; dans celle de juillet 1875 (*Erl. Ber.*), il traite les résolvantes du cinquième et du sixième ordre de l'équation de l'icosaèdre. Un exposé général se trouve dans les *Math. Ann.*, t. IX, p. 183-208.

([3]) Le rapport anharmonique de quatre quantités complexes a d'abord été introduit par Möbius. Au sujet de la représentation sur la sphère, consulter WEDEKIND, *Dissertation;* Erlangen, 1874; *Beiträge*, etc., Erlangen, 1875; *Math. Ann.*, IX, p. 209-217. Pour les formes binaires à coefficients complexes, *voir* BELTRAMI, *Mem. di Bologna*, X, 1870.

Les considérations de Klein ont été étendues à un espace quelconque par BIERMANN (*Wien. Ber.*, XCV, p. 523-548; 1887) et par GOURSAT (*Comptes rendus*, CVI, p. 1786-1789; 1888). *Voir* le *Traité* de Clebsch-Lindemann, II, 1, Abth. 3, IX, X (édition française, t. II, Chap. II).

([4]) *Consulter*, par exemple, LINDEMANN, *Math. Ann.*, VII, p. 56 et suivantes. JORDAN a fait une étude détaillée des groupes de mouvements réels dans les *Annali di Mat.* (2), II, 168-215, 320-345; 1869. On consultera aussi les Mémoires de Schönflies (*Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 319-342; XXIX, p. 50-80; XXXIV, p. 172-203; 1889).

tions qui ramènent sur eux-mêmes les cinq corps polyédriques réguliers. On voit facilement qu'on peut se limiter au tétraèdre, à l'octaèdre (ou cube) et à l'icosaèdre (ou dodécaèdre); ces groupes comprennent respectivement $n = 12, 24, 60$ rotations.

Il s'agit maintenant d'établir le *système complet* des formes d'un pareil groupe, c'est-à-dire un ensemble de formes telles que toutes les autres puissent être exprimées en fonction entière et rationnelle de celles-ci. En partant du principe simple que *les covariants doivent être transformés en eux-mêmes par les mêmes substitutions linéaires que les formes fondamentales*, on arrive à la loi suivante.

Si l'on applique les opérations de l'un des trois groupes à deux valeurs initiales arbitraires (points de la sphère), il en résulte chaque fois $n$ valeurs qui sont racines de deux équations $\pi = 0$, $\pi' = 0$. Le faisceau linéaire contient alors trois (et seulement trois) puissances entières des formes $f$, H, T. Ces formes, auxquelles on joint un invariant unique, constituent le système complet du groupe ([1]).

Il existe ainsi une relation linéaire entre ces puissances de $f$, H, T; H est le hessien de $f$, et T est le déterminant fonctionnel de ces deux formes.

Le groupe de l'icosaèdre donne lieu à un faisceau de formes du 60$^e$ ordre; ce faisceau contient respectivement les puissances cinquième, troisième et seconde des formes $f_{12}$, $H_{20}$, $T_{30}$ (l'indice indiquant l'ordre de la forme); $f = 0$ donne les sommets de l'icosaèdre, $H = 0$ ceux du dodécaèdre et $T = 0$ les points milieux des arêtes de l'un des deux corps.

Dans les deux premiers cas, on obtient d'une façon analogue les sommets du tétraèdre par l'équation $f_4 = 0$ et ceux de l'octaèdre par l'équation $f_6 = 0$.

Les trois formes $f$ jouissent de cette propriété remarquable que leur quatrième composé (4$^{te}$ Ueberschiebung) $(f, f)^4$ est identi-

---

([1]) *Math. Ann.*, IX, *l. c.*, *Voir* § 4. — Il faut cependant remarquer que, outre les formes invariantes que nous fournit la théorie des formes, il intervient ici encore certains invariants déterminés par les propriétés des groupes de substitutions. Ainsi, dans le cas de la forme de l'icosaèdre, il se présente un invariant rationnel (sans être entier et rationnel) par rapport aux coefficients de la forme fondamentale: voir *Math. Ann.*, IX, p. 98.

quement nul; réciproquement, ces formes se trouvent entièrement caractérisées par cette propriété et leur ordre (le discriminant étant différent de zéro).

C'est en s'appuyant sur ces considérations géométriques que Klein [1] est parvenu à établir une théorie générale de l'équation du cinquième ordre; l'équation de l'icosaèdre $f_{12} = 0$ y joue, comme on sait, un rôle fondamental. Les résultats obtenus par cet éminent savant coïncident exactement avec les formules données antérieurement par Brioschi, Hermite et Kronecker.

Nous avons maintenant à montrer le lien qui rattache les groupes finis de substitutions et leurs formes aux équations différentielles linéaires.

Les intégrales générales d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ et à coefficients rationnels peuvent être exprimées en fonction linéaire et homogène de $n$ solutions particulières $y_1$, $y_2, \ldots, y_n$ linéairement indépendantes. Lorsque la variable $x$ décrit un contour fermé autour d'un point singulier de l'équation, les $y$ sont soumis à une substitution linéaire à coefficients constants [2]; c'est cette substitution qui constitue le *groupe* de l'équation. Si cette dernière ne possède que des intégrales algébriques, le groupe est fini, et réciproquement.

C'est précisément là la base du Mémoire [3], (1875) de Fuchs, auquel viennent se joindre ceux de Jordan, de Klein et de Brioschi.

Mais c'est à Fuchs que revient en première ligne le mérite d'avoir découvert la relation fondamentale entre les formes

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

qui appartiennent au groupe de l'équation différentielle linéaire.

Supposons avec Fuchs que l'équation différentielle soit du second ordre et mise sous sa forme réduite. Si cette équation ne

---

(1) *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* [*Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré*], Leipzig, 1884. *Voir* aussi *Erlanger Ber.*, 1876-77; *Math. Ann.*, XII, p. 503-560; 1877, ainsi que les Mémoires importants de Gordan dans les *Math. Ann.*, XXVIII, p. 152-166, XXIX, p. 318-326; 1887.

(2) *Consulter* les travaux fondamentaux de Fuchs dans le *Journ. für Math.*, LXVI, p. 121-160, 1866; LXVIII, p. 354-385; 1888. Le théorème même est dû à Riemann.

(3) *Gött. Nachr.*, p. 568-581, 612-613; 1875. *Journ. für Math.*, LXXXI, p. 97-142; 1876. Dans le *Journ. für Math.*, LXXXV, p. 1-26, l'auteur fait une étude systématique des formes primaires.

doit posséder que des intégrales algébriques, il devra exister certaines formes $f(y_1, y_2)$, qui sont racines d'une fonction rationnelle. Ces *formes primaires* (Primformen) coïncident avec les formes $\pi + k\pi'$ du groupe de l'équation (*voyez* la note (¹) p. 300); les formes primaires de l'ordre le plus petit $n$ sont caractérisées par le fait que tous leurs covariants d'un ordre $< n$ disparaissent identiquement [1].

Il en résulte que l'ordre $n$ ne peut admettre qu'un nombre *limité* de valeurs; ne sont possibles, d'après Fuchs, que les valeurs $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Klein [2] s'est proposé réciproquement d'établir d'une façon explicite tous les types d'équations différentielles du deuxième ordre de cette espèce. Les résultats qu'il avait obtenus antérieurement lui ont permis d'écrire immédiatement cinq types différents pour l'équation intégrale à laquelle doit satisfaire le quotient $\eta$ de deux solutions algébriques particulières $y_1$, $y_2$ de l'équation donnée. De là, il passe aux cinq équations différentielles du troisième ordre correspondant à $\eta$. Il se présente ce fait remarquable que ces dernières résultent directement de l'équation du troisième ordre rencontrée par Schwarz, dans son étude de la série hypergéométrique, lorsqu'on y remplace l'argument $x$ par une fonction [3] rationnelle de $x$. On trouve, en même temps, que le tableau des formes primaires établies par Fuchs contient des formes superflues [4].

Les invariants et covariants des formes primaires ont été obtenus

---

(¹) La réciproque a été résolue affirmativement par Gordan, *voir* plus bas.

(²) *Erl. Ber.*, 1876, ou *Math. Ann.*, XI, p. 115-118, traduction française dans le *Bull. des Sciences math.*, (2), I, p. 180-184; 1877; *Math. Ann.*, XII, p. 167-180. Les types trouvés par Jordan dans les *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 605-607, et t. LXXXIII, p. 1035-1037, n'étaient pas suffisants. *Voir* la note de Klein, *Math. Ann.*, XI, p. 118.

(³) Inversement, une équation différentielle donnée pour $\eta$ permet de déterminer R $(x)$.

Brioschi (*Math. Ann.*, XI, p. 401-411; 1877. *Rend. Ist. Lomb.*, (2), X, p. 48-58) a déterminé la fonction R dans le cas des trois points singuliers, pour tous les *types réduits* de Schwarz (*Journ. f. Math.*, LXXV, p. 323) sauf trois. Ces derniers ont été obtenus par Klein, *Math. Ann.*, XII, p. 175 et 176. *Voir* la confirmation donnée par Cayley, dans le même recueil, t. XVII, p. 65-66; 1880. *Consulter* la dissertation de Fischer, Leipzig, 1885, et la remarque de Klein, *Math. Ann.*, XXVI, p. 463; 1886.

(⁴) Voir *Math. Ann.*, XI, p. 118.

d'une façon très habile par Brioschi (1), en introduisant les formes associées de Hermite.

L'étude algébrique des formes binaires admettant des transformations en elles-mêmes a été faite en premier lieu par Gordan (2). On ramène d'abord une substitution binaire S à une forme normale dans laquelle, outre la forme quadratique déterminant les deux éléments coïncidants de S, il apparaît un angle variable $\varphi$, argument de S. L'argument de $S^n$ sera simplement $n\varphi$; si S doit appartenir à un groupe d'ordre fini, il faut que $n\varphi$ soit un multiple de $\pi$.

Si l'on a deux substitutions S et T, ayant respectivement les arguments $\varphi$ et $\psi$, et si $\Phi$ et $\Psi$ sont les arguments des substitutions composées ST et $S^{-1}T$, il existe entre ces quatre angles la relation simple (*l. c.*, p. 25)

$$\cos\Phi - \cos\Psi = \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi).$$

En s'appuyant sur cette relation et sur la décomposition des substitutions suivant leurs périodes, on est conduit à ramener la question au problème suivant de la théorie des nombres (*l. c.*, p. 29) :

Trouver des valeurs rationnelles de $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ satisfaisant à l'équation

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0.$$

La suite du problème dépend d'un théorème de Kronecker sur l'irréductibilité de l'équation cyclique généralisée.

Comme résultat on parvient naturellement aux cinq groupes de Klein ; mais ils sont présentés sous une forme canonique très pratique.

Dans un autre Mémoire (3), Gordan prend, comme définition des formes primaires d'un ordre moindre $n$, la propriété signalée par Fuchs, en vertu de laquelle leurs covariants d'un ordre $< n$ s'évanouissent identiquement. De cette façon on démontre directement que les formes $f_6$, $f_{12}$ de l'octaèdre et de l'icosaèdre possèdent la propriété mentionnée. La réciproque n'est pas sans pré-

(1) *Math. Ann.*, XI, p. 401-411.

(2) *Math. Ann.*, XII, p. 23-46; 1877. *Voir* encore Halphen, *Sav. étrang.*, t. XXVIII, 1880-1883.

(3) *Math. Ann.*, XII, p. 147-166; 1877. — La définition de Gordan est modifiée en ce sens qu'elle exclut *a priori* les formes à facteur multiple.

senter quelques difficultés. Une étude approfondie des covariants d'ordre le plus faible, dont le dernier composé (Ueberschiebung) avec $f$ disparaît identiquement, permet cependant à Gordan d'affirmer que ces formes sont les seules de cette espèce.

Finalement Wedekind [1] et Brioschi [1], en se livrant à une étude comparée des coefficients, sont parvenus à conclure que l'évanouissement identique du quatrième composé d'une forme binaire avec elle-même, si l'on fait abstraction des formes $f_n$ ayant un facteur linéaire d'ordre $n-1$, conduit aux formes $f_4$, $f_6$, $f_{12}$ du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre [2].

Jordan généralise le problème [3] et l'examine d'abord uniquement au point de vue de la théorie des substitutions. Il se propose donc d'établir les différents groupes d'ordre fini qui sont contenus dans le groupe linéaire à $n$ variables et d'en appliquer les résultats aux équations différentielles linéaires. La discussion donne pour $n=2$ les cinq types connus; mais le cas $n=3$, beaucoup plus compliqué par la nature même de la question,

---

(1) WEDEKIND, *Habil.-Schrift*, Carlsruhe, 1876. BRIOSCHI, *Annali di Mat.*, (2), VIII, p. 24-43; 1877. *Consulter* le traité de Gordan-Kerschensteiner, II, § 19. L'équation $(ff)_4 = 0$ est évidemment équivalente à l'équation différentielle du troisième ordre citée plus haut. Quant à cette dernière, *comparer* aussi HURWITZ, *Math. Ann.*, XXXIII, p. 345-352; 1889. — Pour la forme $f_8$, BRIOSCHI est également parvenu à l'équation différentielle du 3e ordre de Schwarz, en examinant le cas où le quatrième composé de la forme avec elle-même coïncide, à un facteur près, avec la forme originale (*Chelini Coll. math.*, p. 213-219; 1881, et *Comptes rendus*, XCVI, p. 1689-1692; 1883).

(2) Hilbert a fait voir dans les *Math. Ann.* (XXX, p. 561-570; 1887) que les formes binaires admettant des transformations linéaires en elles-mêmes pouvaient être considérées comme cas particulier d'une classe plus générale de formes. Cette dernière s'obtient en cherchant les systèmes $\varphi + \lambda\psi$ pour lesquels le troisième composé de $\varphi$ avec $\psi$ disparaît identiquement. — *Consulter* Gordan-Kersch., II, § 13.

(3) *Comptes rendus*, LXXXIV, p. 1446-1448. *Journ. für Math.*, LXXXIV, p. 85-215; 1877. Son Mémoire *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* est une revision et la suite du travail précédent, *Atti di Napoli*, VIII, 1880. Les cas spéciaux pour $n=3$ demandaient à être confirmés par une autre voie. C'est ce que fit VALENTINER par des considérations purement algébriques (*Kjöb. Skrift*, (6), V, p. 64-235; 1889); toutefois, certains points isolés demandent encore à être éclaircis.

Dans Jordan, la propriété des formes primaires de Fuchs se trouve étendue aux équations différentielles d'un ordre supérieur au second.

Consulter HŒLDER, *Math. Ann.*, XL, p. 55-88; 1892 et ASKWITH, *Quart. J.*, XXIV, p. 111-167; 1889.

conduit finalement, après avoir examiné à part un grand nombre de cas spéciaux, à onze types différents ([1]) dont un seul peut être considéré comme essentiellement nouveau.

Il s'agit ici du *groupe hessien* ([2]) $G_{216}$, (avec 216 substitutions) jouissant de la propriété remarquable, signalée par Hesse, de laisser inaltérés les quatre systèmes de trois droites passant par les neuf points d'inflexion d'une cubique plane.

Par suite d'une faute de calcul, Jordan avait omis un autre groupe, également nouveau, le groupe $G_{168}$, que Klein a découvert ([3]) en examinant les transformations du septième ordre des fonctions elliptiques. La résolvante adjointe de Galois (du cent soixante-huitième ordre) possède un groupe de cent soixante-huit substitutions, puisque chacune de ses racines $\eta$ envisagée comme fonction du rapport $\omega$ des périodes, reste précisément inaltérée pour les cent soixante-huit substitutions de $\omega$ identiquement congrues selon le module 7. La quantité $\eta$ est liée à l'invariant absolu de l'intégrale elliptique par une équation (de l'ordre 168 en $\eta$) qui est du genre 3. Elle admet également cent soixante-huit transformations en elle-même. A cette équation on fait correspondre la courbe normale du quatrième ordre

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0.$$

Le système ([4]) complet de $f$, comme celui du groupe, se compose, outre $f$, encore de 3 covariants du sixième, quatorzième, vingt et unième ordre, entre lesquels il existe une syzygie.

L'interprétation géométrique de la résolvante de Galois permet de voir sans difficulté que celle-ci possède une résolvante du septième et une autre du huitième ordre. On peut d'abord fixer

---

([1]) Certains de ces types sont en réalité des groupes à deux variables. Ils jouent un rôle important en Géométrie. Dans le *Gött. Nachr.*, p. 85-107; 1887, Hurwitz a examiné les substitutions qui transforment en elle-même une courbe algébrique plane (de genre $p > 1$). — Le groupe $G_{16}$ a été étudié par Study (*Leipz. Ber.*, p. 122-161; 1892).

([2]) Dans les *Math. Ann.*, XXXIII, p. 324 et suivantes (1889), Maschke a publié une étude détaillée du groupe hessien. *Comparer* Burkhardt, *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 161-224; 1891.

([3]) *Math. Ann.*, XIV, p. 428-471; 1879. *Voir* en particulier p. 438, note. — La théorie du groupe $G_{168}$ est traitée en détails dans Klein-Fricke, *Modulfunktionen*, IIIe Partie, Ch. VI.

([4]) *Voir* les *Math. Ann.*, t. XVII, p. 217-233.

les cinquante-six points de contact des vingt-huit tangentes doubles de $f$ à l'aide de sept coniques ([1]) qui dépendent d'une équation du septième ordre. Puis on peut ordonner les vingt-quatre tangentes d'inflexion de $f$ en huit systèmes de trois droites, qui sont déterminées par une équation du huitième ordre ([2]). La réciproque, signalée par Klein, a été développée avec beaucoup de détails par Gordan ([3]).

Dans leur ensemble, les groupes finis de substitutions quaternaires ou d'ordre plus élevé ne sont pas encore connus. Toutefois, Klein a été récemment conduit par différentes voies à des exemples importants de groupes quaternaires. Deux de ces groupes contiennent la résolution des équations générales du sixième et septième ordre, obtenue par Klein ([4]).

Si l'on ramène ces équations à une forme qui ne contient plus les termes d'ordre le plus élevé de deuxième et troisième rang, c'est-à-dire telle que la somme des racines ainsi que celle de leurs carrés soient nulles, on peut, à l'aide des complexes linéaires, donner une interprétation géométrique des formules.

Malgré le grand intérêt de ces recherches, dans lesquelles intervient avec tant de succès la Géométrie réglée, nous devons nous borner à signaler simplement les Mémoires les plus remarquables.

Un troisième groupe (ternaire) important a été rencontré par Klein ([5]) dans ses travaux sur les six complexes fondamentaux. Le système complet de ce groupe est dû à Maschke ([6]). L'un des sous-groupes de ce groupe coïncide avec celui ([7]) qu'a obtenu

---

([1]) Cela est possible de deux manières. Les relations réciproques entre les racines des deux équations du septième ordre constituent la base du travail de Gordan. — Voir *Math. Ann.*, t. XX, p. 528 et plus bas note ([3]).

([2]) *Comparer* NOETHER, *Math. Ann.*, XV, p. 89-110; 1879.

([3]) GORDAN, *Math. Ann.*, XVII, p. 217-233, 359-378, 1880; XIX, p. 529-552; XX, p. 487-514, p. 515-530; XXV, p. 459-521; 1885.

La surface de Riemann de la courbe $f = 0$ a été étudiée par Haskell dans le *Amer. J.*, XIII, p. 1-52; 1890. Il s'agit ici de la nouvelle espèce de surface de Riemann signalée par Klein dans les *Math. Ann.*, VII et X.

([4]) *Math. Ann.*, XXVIII, p. 499-532; 1887. — *Comparer* COLE, *Amer. J.*, VIII, p. 265-286; 1886. Le second groupe a été étudié, au point de vue de la Géométrie réglée, par Maschke dans les *Math. Ann.*, XXXVI, p. 190-215; 1890.

([5]) *Math. Ann.*, IV, p. 346-358; 1871.

([6]) *Math. Ann.*, XXX, p. 496-515; 1887.

([7]) *Comparer* REICHARDT, *Math. Ann.*, XXVIII, p. 84-98; 1887.

Borchardt pour les deux modules des fonctions hyperelliptiques de genre *deux*.

Si les modules introduits par Borchardt doivent être considérés comme des fonctions de Jacobi du deuxième ordre, Klein a cependant remarqué l'existence de fonctions analogues du troisième ordre. Cette question a été développée par Witting (1); on parvient à un nouveau groupe ternaire de 25920 collinéations. Maschke a démontré que ce groupe était lui-même contenu dans un autre, d'un nombre double de substitutions, et il a établi le système complet de ce dernier (2). Sa méthode repose sur le fait qu'en annulant l'une des quatre variables convenablement choisie, on retombe sur le groupe hessien $G_{216}$.

Le groupe en question est isomorphe, d'une part, au groupe de la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre, d'autre part, à celui de l'équation du vingt-septième ordre dont dépendent les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre (3).

Aux recherches précitées vient se joindre un ensemble de travaux remarquables d'Autonne (4) ayant pour objet la détermination de tous les groupes et sous-groupes de la transformation de Crémona (du plan), en particulier, des transformations quadratiques et cubiques.

Nous nous en tiendrons là, quant aux groupes d'ordre fini, pour examiner un Mémoire (5) de Maurer sur les groupes à paramètres arbitraires, d'autant plus que ce travail se rattache à la question soulevée au début de ce paragraphe. La méthode suivie dans ce Mémoire est remarquable par le fait qu'elle établit un lien entre les systèmes complets de certaines équations différentielles selon la méthode de Lie et les diviseurs élémentaires de Weierstrass.

Si, sous l'effet d'une substitution, une forme (*l. c.*, p. 107)

---

(1) *Math. Ann.*, XXIX, p. 157-170. *cf.* Reichardt, *l. c.*

(2) *Math. Ann.*, XXXIII, p. 317-344.

(3) Jordan, *Traité des substitutions*, 1871.

Quant au rapport de ces deux problèmes, *voir* Klein, *Journ. de Math.* (4), IV, p. 169-177, 1888, et Burkhardt, *Gött. Nachr.*, p. 1-5; 1892.

(4) *Voir* une série de communications insérées dans les *Comptes rendus* depuis 1883, t. XCVII, à 1887, t. CV, et ses Mémoires dans le *Journ. de Math.*, 4e série, t. I, II, III, IV.

(5) *Münch. Ber.*, p. 103-150; 1888.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se transforme identiquement en $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, il en résulte un système S d'équations algébriques auxquelles doivent satisfaire les coefficients de la substitution. Parmi les formes irréductibles définies par S, il s'en trouve toujours une seule ([1]) qui renferme la substitution identique; ici le groupe correspondant entre seul en considération.

D'après Aronhold, l'identité $f(x) = f(y)$ est remplacée par un système complet d'équations différentielles linéairement indépendantes. Il en résulte la conséquence importante qu'une substitution comprenant $m$ paramètres indépendants peut être envisagée comme composée d'un même nombre de substitutions élémentaires, c'est-à-dire ne dépendant que d'un seul paramètre. L'examen de pareils groupes élémentaires est basé sur les propriétés des diviseurs élémentaires du *déterminant fondamental*

$$| c_{11} - r, c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1n} |,$$

où les $c$ sont des nombres déterminés par la structure du groupe. Il existe deux systèmes ([2]) déterminés de valeurs $c$ au moyen desquels ce paramètre peut être exprimé rationnellement; les autres cas se ramènent à celui-ci.

Comme criterium (*l. c.*, p. 138), on en déduit qu'une forme $f$ doit satisfaire à $n$ équations différentielles, linéairement indépendantes, de la forme

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^{i} \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les $c$ font partie de l'un des deux systèmes déterminés. Dans le cas des invariants ordinaires, on a évidemment $m = n^2$, c'est-à-dire égal au nombre des coefficients arbitraires de la substitution ([3]).

---

([1]) Ce qui suit reste généralement vrai, comme le fait remarquer Maurer, si $f$ est une fonction rationnelle (et homogène) des $x$.

([2]) Le déterminant fondamental des $c$ est alors ou égal à $r_n$, ou il ne possède que des diviseurs élémentaires de premier ordre et, de plus, seulement des racines entières.

([3]) Dans un autre Mémoire, Maurer a étendu ses recherches aux transformations non linéaires des variables (*Journ. für Math.*, CVII, p. 89-116; 1890).

(*A suivre.*)

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVIII.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

## TOME XVIII; 1894. — PREMIÈRE PARTIE.

---

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES MATIÈRES.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

## MÉLANGES.



FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVIII.

20519 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands Augustins, 55.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRE, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XVIII. — ANNÉE 1894.**

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## SECONDE PARTIE.

### REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Tome IV; 1890 (¹).

*Stouff* (*X.*). — Sur de nouvelles fonctions harmoniques à trois variables analogues aux fonctions thêta-fuchsiennes. (A, 1-19).

I. Nous désignerons la conjuguée d'une quantité imaginaire par la lettre qui désigne cette quantité, affectée de l'indice zéro.

Posons $u = x + yi$, $\mu = au + b$, $\lambda = cu + d$, $a, b, c, d$ étant quatre nombres complexes satisfaisant à l'équation $bc - ad = 1$. L'expression générale d'une substitution transformant en lui-même le plan des $xy$ est

$$\begin{pmatrix} u, & \dfrac{\lambda\mu_0 + ca_0 z^2}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \\ z, & \dfrac{z}{\mu\mu_0 + aa_0 z^2} \end{pmatrix}.$$

Considérons le groupe formé de celles de ces substitutions pour lesquelles $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des *entiers* complexes.

Soit $S_i$ une quelconque des substitutions de ce groupe.

Soit $r_i = \sqrt{\mu_i\mu_{i0} + a_i a_{i0} z^2}$,

$$\varphi_{nki} = \frac{\mu_i^{n-k}(u_0\mu_i + a_i z^2)^k}{r_i^{2n+1}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) Voir *Bulletin*, $XVII_2$, p. 128.

Ces fonctions satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

La série $\sum_i \varphi_{nki}$, où la somme est étendue à toutes les substitutions du groupe, est convergente pour $n > 4$.

Elle représente une fonction de $x$, $y$, $z$, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$. Désignons-la par $Z_{nk}$.

Soit $S_j$ une substitution quelconque du groupe. Posons $S_i S_j = S_g$,

$$A_{jnkm} = \sum_{p \le m} C^p_{n-k} C^{m-p}_k b^p_{j0} a^{n-k-p}_{j0} d^{m-p}_{j0} c^{k-m+p}_{j0}$$

($C^p_m$ étant le nombre des combinaisons de $m$ lettres prises $p$ à $p$), nous aurons

$$(\varphi_{nki}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnkm} \varphi_{nmg};$$

et

$$(Z_{nk}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnkm} Z_{nm} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

[$(Z_{nk}) S_j$ signifie que l'on fait dans $Z_{nk}$ la substitution $S_j$].

II. M. Stouff s'occupe ensuite de trouver l'expression générale des substitutions qui laissent inaltérée une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, qu'il appelle *sphère fondamentale*.

$a$, $b$, $c$, $d$, $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ étant huit nombres réels satisfaisant à l'équation $aa' + bb' + cc' + dd' = 0$, soit

$$\begin{aligned}
X &= bx + dy - cz - a', & X' &= b'x + d'y - c'z - a,\\
Y &= -ax - cy - dz - b', & Y' &= a'x - c'y - d'z - b,\\
Z &= dx - by - az - c', & Z' &= d'x - b'y - a'z - c,\\
U &= -cx - ay - bz - d', & U' &= -c'x - a'y + b'z - d.
\end{aligned}$$

La solution cherchée a pour expression

$$x = \frac{XY' - YX' - ZU' + UZ'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2},$$

$$y = \frac{XU' - YZ' + ZY' - UX'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2},$$

$$z = \frac{XZ' + YU' - ZX' - UY'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}.$$

M. Stouff s'occupe ensuite de former la substitution $T = SS_1$; $\delta s$ étant un élément d'arc, $\delta s'$ son transformé par une substitution S,

$$\delta s' = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2} \delta s.$$

Enfin M. Stouff suppose que l'on a $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1$. Considérons un groupe discontinu de ces substitutions. $S_i$ étant l'une quelconque d'entre elles, soit $R = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 + U_i^2}$,

La série

$$\sum_i \frac{d^n\left(\frac{1}{R_i}\right)}{da_i^\alpha\, db_i^\beta\, dc_i^\gamma\, dd_i^\delta\, da_i'^{\alpha'}\, db_i'^{\beta'}\, dc_i'^{\gamma'}\, dd_i'^{\delta'}}$$

est convergente pour $n > 5$. Nous désignerons par $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$.

On a

$$\Delta\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = 0.$$

M. Stouff démontre la formule

$$\frac{1}{R_j}(\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'})S_j = \sum A_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'},$$

les A étant des coefficients constants, fonctions des coefficients de $S_j$, et la sommation étant étendue, dans le second membre, aux fonctions $\varphi$ qui correspondent à toutes les dérivées partielles d'ordre $n$ de $\frac{1}{R_i}$. Les fonctions $\varphi$ forment donc un système zêta-fuchsien.

III. Après avoir cité la fonction

$$F(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi i} L[x + i(y\cos\omega + z\sin\omega)]\right) d\omega,$$

qui satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, et reste inaltérée par la substitution

$$x \text{ in } xq^2,$$
$$y \text{ in } yq^2,$$
$$z \text{ in } zq^2,$$

où $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, M. Stouff démontre la proposition suivante : De l'origine des coordonnées comme centre, décrivons quatre sphères $S, S', S_1, S'_1$, avec des rayons $R, R' = Rq^2, R_1, R'_1 = R_1q^2, R > R_1 > R'$ : soit $\Sigma$ une surface tout entière entre $S'$ et $S_1$. Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour les volumes $V$ et $V_1$ limités par $\Sigma, S, S'$ ; $\Sigma, S_1, S'_1$, on peut former une fonction harmonique, finie et continue, prenant des valeurs données sur $\Sigma$ et se transformant en elle-même par la substitution précédente.

*Legoux* (A.). — Sur un système de courbes orthogonales et homofocales. (D, 1-7).

Imaginons un système de courbes représentées par une équation telle que $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$, $\lambda$ étant un paramètre variable, A, B, C étant des fonctions quelconques des coordonnées. Si les courbes forment un système orthogonal, et si elles admettent une enveloppe, elles sont nécessairement homofocales. Mais la réciproque n'est pas exacte. M. Legoux le démontre en considérant les courbes $\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1$, où $a$, $b$ sont des constantes, $f$ une fonction de $x$ et de $y$. Ces courbes sont homofocales. Pour qu'elles soient orthogonales,

il faut que $f$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$(bx^2+ay^2+ab)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]-2bxf\frac{\partial f}{\partial x}-2ayf\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

dont M. Legoux donne une intégrale complète.

*Kœnigs* (*G.*). — Remarque sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. (E, 1-4).

Soit $\mathfrak{F}(z\mid z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$ un polynome en $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, de degré $m$, dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de $z$. Soit $\zeta(z)$ la fonction elliptique de seconde espèce, $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ des constantes.

Posons

$$F(z)=\mathfrak{F}[z\mid\zeta(z-a_1), \zeta(z-a_2), \ldots, \zeta(z-a_\nu)].$$

*Si* $F(z)$ *n'a pas de pôles à distance finie, elle se réduit à une constante.* Ce théorème permet de simplifier l'établissement de plusieurs formules de la théorie des fonctions elliptiques, telles que, par exemple, la formule

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}.$$

Il faut observer que $F(z)$ pourrait n'avoir pas de pôles dans un parallélogramme de périodes donné et en avoir dans les autres.

Exemple : $F(z)=p(z)-\zeta^2(z)$ est dénuée de pôles dans tout parallélogramme de périodes comprenant l'origine ; mais elle admet comme pôles simples tous les points homologues de l'origine. $F(z)$ ne peut demeurer finie que dans un nombre *limité* de parallélogrammes correspondant à un *couple primitif* donné de périodes.

*Jamet* (*J.*). — Sur la théorie des sphères osculatrices à une courbe. (F, 1-8).

M. Jamet propose de résoudre le problème suivant : Le centre d'une sphère se déplaçant sur une courbe donnée S, comment doit varier son rayon pour qu'elle soit sans cesse osculatrice à une autre courbe (C)?

Pour que la sphère mobile soit osculatrice à une courbe C, il est nécessaire et suffisant que le point de contact de sa caractéristique avec son enveloppe soit dans le plan osculateur à la courbe S, lieu des centres. Soient $d\sigma$ l'angle de contingence de S, $F(\sigma)$ l'expression du rayon de courbure de S, R le rayon de la sphère.

Posons

$$A=\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} F'(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\cos\sigma_0,\qquad B=\int_{\sigma_2}^{\sigma_0} F'(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma - F(\sigma_0)\sin\sigma_0.$$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ sont des constantes arbitraires dont l'une, $\sigma_0$, peut être supposée nulle; on a

$$R^2=\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma + A\right]^2+\left[\int_{\sigma_1}^{\sigma} F(\sigma)\cos\sigma\, d\sigma - B\right]^2.$$

De cette formule, M. Janet déduit quelques remarques concernant les deux problèmes suivants dont on doit la solution à Serret (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLV, p. 1252 et suiv.) :

1° Trouver les trajectoires orthogonales des plans osculateurs à une courbe donnée; 2° trouver les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes, le plan qui contient chacune d'elles étant normal à la surface en chaque point de la section.

Si l'on imagine un plan qui roule sur la surface développable ayant S pour arête de rebroussement, pour un observateur entraîné avec ce plan, la sphère occupera une série de positions relatives, constituant un faisceau de sphères : toutes les sphères de ce faisceau passeront par un point fixe.

## *Stieltjes* (*T.-J.*). — Sur les polynomes de Legendre. (G, 1-17).

Définissant $P^{(n)}(x)$ comme coefficient de $z^{-n-1}$ dans le développement de $(z^2 - 2zx + 1)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances descendantes de $z$, M. Stieltjes démontre la formule

$$P^{n}(x) = \frac{1}{2i\pi}(\mathcal{A} - \mathcal{B}),$$

où

$$\mathcal{A} = 2\int_0^{\xi} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}}, \qquad \mathcal{B} = 2\int_0^{\xi^{-1}} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}},$$

$$\xi = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\xi^{-1} = x - \sqrt{x^2 - 1};$$

les chemins d'intégration sont rectilignes, et la valeur initiale du radical est $+1$.

Posons $x = \cos\Theta$, $0 < \Theta < \pi$, puis dans l'intégrale $\mathcal{A}$, $z = \xi(1 - u)$, dans l'intégrale $\mathcal{B}$, $z = \xi^{-1}(1 - u)$; soit enfin $\alpha = \Theta - \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$(1)\quad P^{n}(\cos\Theta) = \frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\Theta}}\left[\text{Partie réelle de } e^{\left(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha\right)i}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}}\right];$$

$\sqrt{u}$ est pris positivement, et pour $\sqrt{1 - ku}$ on prend la valeur qui se réduit à 1 pour $u = 0$.

Comme on a $|k| = \frac{1}{2\sin\Theta} < 1$ pour $\frac{\pi}{6} < \Theta < \frac{5\pi}{6}$, on peut poser dans cette hypothèse

$$\frac{1}{\sqrt{1 - ku}} = 1 + \frac{1}{2}ku + \frac{1.3}{2.4}k^2u^2 + \ldots,$$

d'où l'on déduit le développement suivant, convergent même pour $\Theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\Theta = \frac{5\pi}{6}$, où l'on a posé $C_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} P^{n}(\cos\Theta) = C_n\Bigg[&\frac{\cos\left(n\Theta + \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{2\sin\Theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left(n\Theta + \frac{3}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^3}} \\ &+ \frac{1^2.3^2}{2.4(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos\left(n\Theta + \frac{5}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^5}} + \ldots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

On peut obtenir le même développement, mais limité à un nombre fini de termes, avec un terme complémentaire, et cela, pour une valeur quelconque de $\Theta$ comprise entre o et $\pi$. On remplacera pour cela $\frac{1}{\sqrt{1-ku}}$ dans l'expression (1) par $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dv}{1-ku\sin^2 v}$, et l'on fera usage de l'identité

$$\frac{1}{1-ku\sin^2 v} = 1 + ku\sin^2 v + \ldots + (ku\sin^2 v)^{p-1} + \frac{(ku\sin^2 v)^p}{1-ku\sin^2 v}.$$

On retrouve ainsi le développement (2) limité à ses $p$ premiers termes; et si M est le maximum du module de $\frac{1}{1-ku\sin^2 v}$ (maximum qui ne varie qu'entre 1 et 2), l'erreur commise en prenant les $p$ premiers termes du développement (2) est inférieure en valeur absolue à M fois le terme suivant dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui y figure au numérateur.

Comme conséquences de cette formule, notons les suivantes : on a

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{P}^{(n)}(\cos\Theta) = 0,$$

même lorsque $\Theta$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si $n\Theta$ croît au delà de toute limite (*voir* le Mémoire de M. Bruns, t. 90 du *Journal de Borchardt*).

Puis

$$\mathrm{J}(\Theta) = \lim_{n=\infty} \mathrm{P}^{(n)}\left(\cos\frac{\Theta}{n}\right) = 1 - \frac{\Theta^2}{2^2} + \frac{\Theta^4}{2^2 4^2} - \frac{\Theta^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta}} + \frac{1^2}{8}\,\frac{\cos\left(\Theta - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^3}} - \frac{1^2.3^2}{8.16}\,\frac{\cos\left(\Theta - \frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^5}} \ldots\right]$$

(résultat dû à Poisson, *Journal de l'École Polytechnique,* XIX$^e$ cahier.)

Ajoutons qu'en prenant la somme des $p$ premiers termes, l'erreur commise est inférieure en valeur absolue au terme suivant dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui y figure au numérateur.

Ensuite, si $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ désignent les zéros de $\mathrm{P}^{(n)}(x)$, on a

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} > x_k > \cos\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Enfin on déduit aussi aisément des considérations précédentes

$$\mathrm{P}^{(n)}(\cos\Theta) = \mathrm{C}_n\left[\sin(n+1)\Theta + \frac{1.(n+1)}{1.(2n+3)}\sin(n+3)\Theta + \frac{1.3.(n+1)(n+2)}{1.2(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\Theta + \ldots\right]$$

(*voir* Heine, *Traité des fonctions sphériques,* t. I, p. 19; 1889).

Envisageons maintenant l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

à laquelle satisfait $P_n(x)$. Une autre solution sera donnée par la formule

$$Q^{n}(x) = \frac{1}{2} P^{n}(x) \, L\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R^{n}(x).$$

Mais comme elle n'est pas réelle dans l'intervalle $(-1, +1)$, M. Stieltjes considère à sa place la fonction

$$S^{n}(x) = \frac{1}{2} P^{n}(x) \, L\frac{1+x}{1-x} - R^{n}(x).$$

Si on écrit la formule connue

$$P^{n}(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

où F désigne la série hypergéométrique, sous la forme

$$P^{n}(x) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x-1}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \ldots + \alpha_n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n;$$

de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2 R^{n}(x)}{dx^2} - 2x\frac{dR^{n}(x)}{dx} + n(n+1) R^{n}(x) = 2\frac{dP^{n}(x)}{dx},$$

on déduit

$$R^{n}(x) = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{x-1}{2}\right) + \beta_2\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \ldots + \beta_{n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1},$$

avec

$$\beta_k = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\alpha_k.$$

On conclut de là

$$\lim_{n=\infty} S^{n}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J(\theta)\, L\frac{2}{\theta} - C + (C-1)\frac{\theta^2}{2^2}$$
$$-\left(C - 1 - \frac{1}{2}\right)\frac{\theta^4}{2^2.4^2} + \left(C - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{\theta^6}{2^2.4^2.6^2} - \ldots,$$

C étant la constante eulérienne. Soit

$$K(\theta) = \lim_{n=\infty} S^{n}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right),$$

l'équation différentielle de Fourier et de Bessel

$$\theta\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \frac{dy}{d\theta} + \theta y = 0$$

admet comme intégrale générale

$$y = C_1 J(\theta) + C_2 K(\theta).$$

M. Stieltjes cherche ensuite à exprimer les intégrales $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en fonction linéaire de $S^{(n)}(x)$, $P^{(n)}(x)$ et arrive aux formules

$$2R_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P^{n}(x) - P^{n}(u)}{x-u}\, du,$$
$$\mathcal{A} = 2S^{n}(x) + \pi i P^{n}(x),$$
$$\mathcal{B} = 2S^{n}(x) - \pi i P^{n}(x).$$

Il en déduit que l'on a

$$\frac{2}{\pi} S^n(\cos\Theta) = -C_n\left[\frac{\sin(n\Theta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\Theta}}+\frac{1^2}{2(2n+3)}\frac{\sin(n\Theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^3}}\right.$$
$$\left.+\frac{1^2.3^2}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\frac{\sin(n\Theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\Theta)^5}}+\ldots\right],$$

puis

$$K(\Theta) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin\left(\Theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta}}+\frac{1^2}{8}\frac{\sin\left(\Theta-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^3}}+\frac{1^2.3^2}{8.16}\frac{\sin\left(\Theta-\frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{\Theta^5}}+\ldots\right]$$

L'équation $S^n = 0$ admet $n$ racines comprises dans les intervalles

$$\left[\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin l'on a

$$\frac{2}{\pi} S^n(\cos\Theta) = C_n\left[\cos(n+1)\Theta+\frac{1(n+1)}{1(2n+3)}\cos(n+3)\Theta\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.(n+1)(n+2)}{1.2.(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\Theta+\ldots\right] \quad (0<\Theta<\pi)$$

(*voir* Heine, *Fonctions sphériques*, t. I, p. 130).

*Appell* (*P.*). — Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles. (H, 1-20).

I. Imaginons dans le plan $xOy$ un champ d'intégrations auquel seront étendues toutes les intégrales doubles considérées. Soit K une fonction de $x$ et de $y$, susceptible d'intégration, et conservant un *signe constant* dans tout le champ d'intégration.

Si l'on cherche un polynome P en $x$ et $y$, le plus général d'un degré donné $p$, vérifiant les conditions

$$\iint K x^i y^j P\, dx\, dy = 0,$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $i$ et $j$ dont la somme est moindre que $p$, on trouve qu'il est de la forme

$$P = \alpha_{p,0}V_{p,0} + \alpha_{p-1,1}V_{p-1,1} + \ldots + \alpha_{0,p}V_{0,p},$$

les $\alpha$ étant des coefficients arbitraires et les V désignant des polynomes linéairement indépendants satisfaisant aux conditions indiquées. D'ailleurs tout polynome en $x$ et $y$ de degré $p$ peut être mis sous la forme d'une somme de polynomes $V_{m,n}$ de degrés égaux ou inférieurs à $p$, multipliés par des constantes. Les polynomes $V_{m,n}$ possèdent évidemment cette propriété que l'intégrale

$$\iint K V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

est nulle tant que $m+n$ est différent de $\mu+\nu$. On peut remplacer les polynomes $V_{m,n}$ par d'autres, $U_{m,n}$, de degré $(m+n)$, fonctions linéaires et homogènes des $V_{m,n}$, tels que l'on ait

$$\iint K U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0.$$

tant que l'on n'a pas en même temps $m = \mu$, $n = \nu$, tels en outre que l'on ait

$$\iint K U_{m,n}^2 \, dx \, dy = 1.$$

Un polynome quelconque de degré $p$ pourra se mettre sous la forme d'une somme de polynomes $U_{m,n}$ multipliés par des constantes. Si l'on pose

$$\varphi_p(x, y) = \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \lambda_{m,n} U_{m,n},$$

on a

$$\lambda_{m,n} = \iint K \varphi_p(x, y) U_{m,n} \, dx \, dy.$$

D'une façon générale (*voir* Didon, *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII), si l'on a une suite de polynomes tels que l'intégrale

$$\iint K V_{m,n} V_{\mu,\nu} \, dx \, dy$$

soit nulle tant que $m+n$ est différent de $\mu+\nu$, on peut en déduire une infinité de systèmes de polynomes associés, $P_{m,n}$, $R_{m,n}$, fonctions linéaires et homogènes des $U_{m,n}$, tels que l'on ait

$$\iint K P_{m,n} R_{\mu,\nu} \, dx \, dy = 0,$$

tant que l'on n'a pas $m = \mu$, $n = \nu$.

Remarquons que, si un polynome P de degré $p$ vérifie les conditions

$$\iint K x^i y^j P \, dx \, dy = 0,$$

pour $i + j \le p$, il s'annule nécessairement dans le champ d'intégration. S'il est décomposable en un produit de polynômes entiers, chacun d'eux doit s'annuler dans le champ d'intégration.

II. M. Appell expose d'abord un procédé de quadrature mécanique des intégrales simples susceptible de se généraliser pour les intégrales doubles : soient $K(x)$ une fonction donnée intégrable dans l'intervalle $(a, b)$, et

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu x^\nu$$

une série convergente dans cet intervalle, ainsi qu'aux limites. Pour évaluer l'intégrale

$$I = \int_a^b K(x) f(x) \, dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu I_\nu,$$

avec

$$I_\nu = \int_a^b K(x) x^\nu \, dx,$$

on substitue à $f(x)$ le polynome $\varphi(x)$ de degré $(n-1)$ qui devient égal à $f(x)$ pour $n$ valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $x$ choisies dans l'intervalle $(a, b)$. On prend pour valeur approchée de I l'intégrale

$$J = \int_a^b K(x) \varphi(x) \, dx = \sum_{1}^{n} p_\nu f(x_\nu).$$

Les constantes $p$ et les inconnues $x$ sont déterminées par les équations

$$p_1 x_1^j + p_2 x_2^j + \ldots + p_n x_n^j = I_j; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, (2n-1).$$

Si $P(x)$ est le polynome de degré $n$, ayant pour racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce polynome $P(x)$ satisfait aux $n$ relations

$$\int_a^b K(x) x^p P(x)\, dx = 0, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Si $K(x)$ changeait de signe dans l'intervalle $(a, b)$, le polynome $P(x)$ pourrait n'être pas déterminé par les conditions précédentes.

Soient maintenant $K(x, y)$ une fonction de $x$ et de $y$, intégrables, gardant un signe constant dans le champ d'intégration, la série

$$f(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu,$$

et l'intégrale double

$$I = \iint K f(x, y)\, dx\, dy,$$

où

$$I = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu} I_{\mu,\nu},$$

avec

$$I_{\mu,\nu} = \iint K x^\mu y^\nu\, dx\, dy.$$

Soit

$$\varphi(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=p} b_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu$$

un polynome prenant la même valeur que $f(x, y)$ en $n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ points du champ d'intégration non situés sur une courbe d'ordre $p$; posons

$$J = \iint K \varphi(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu}(p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\mu y_n^\nu)$$

et déterminons les $p$, les $x$ et les $y$ par les $3n$ équations

$$p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\mu y_n^\nu = I_{\mu,\nu},$$

obtenues en écrivant que, dans la différence $I - J$, les coefficients des $3n$ premiers termes sont nuls. Il faudra, pour que le problème soit possible, que ces équations soient compatibles, et donnent pour les points $(x_i, y_i)$ des points *réels* du champ d'intégration, non situés sur une courbe d'ordre $p$.

M. Appell examine en détail les cas où $p = 1$, $p = 4$. Il montre que le problème peut dans certains cas être impossible.

## *Hermite.* — Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce (Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch). (I, 1-10).

Soient $X_n = F(x)$ le polynome de Legendre de degré $n$, $R(x)$ la partie en-

tière du produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right);$$

posons

$$Q^{n}(x)=\frac{1}{2}F(x)\,L\,\frac{x+1}{x-1}-R(x),\qquad \text{si}\quad |x|>1$$

et

$$Q^{n}(x)=\frac{1}{2}F(x)\,L\,\frac{1+x}{1-x}-R(x),\qquad \text{si}\quad |x|<1.$$

Ces expressions vérifient l'équation différentielle

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=n(n+1)y,$$

et représentent dans tout le plan, sauf sur la circonférence de rayon un ayant pour centre l'origine, ce que Heine appelle la *fonction sphérique de deuxième espèce*. M. Hermite étudie l'équation $Q^{n}(x)=0$ et, en appliquant le théorème de Cauchy, parvient aux résultats suivants : Soit

$$x=\frac{e^z+1}{e^z-1},\qquad f(z)=(e^z-1)^n\,Q^n(x).$$

Soit $|x|>1$. L'équation $f(z)=0$ a $n$ racines comprises entre les deux parallèles $y=2l\pi$, $y=(2l+1)\pi$, et n'a aucune racine entre les droites $y=(2l+1)\pi$ et $y=(2l+2)\pi$. Ce résultat est exact, même pour $l=0$.

Enfin, lorsque $n$ est impair, il existe un nombre impair de racines de la forme $z=ih$, avec $2l\pi<h<(2l+1)\pi$.

Pour $|x|<1$, on pose

$$\frac{1+x}{1-x}=e^z,\qquad f(z)=Q^{n}(x).$$

L'équation $f(z)=0$ admet $n$ racines entre les deux parallèles $y=(2l-1)\pi$, $y=2l\pi$, et n'en admet aucune entre $y=2l\pi$, $y=(2l+1)\pi$, pour $l=1, 2, \ldots$.

Il n'y a aucune racine entre une parallèle à l'axe $Ox$, à une distance infiniment petite au-dessus de cet axe, et la droite $y=\pi$. Dans le cas de $n$ impair, il y a un nombre impair de racines de la forme $z=ih$, avec $(2l-1)\pi<h<2l\pi$.

**Stieltjes (*T.-J.*).** — Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. (J, 1-10).

M. Hermite ayant obtenu la distribution des racines de l'équation $f(z)=0$ sur le plan des $z$ (*voir* l'article qui précède), M. Stieltjes se demande ce que deviennent ces résultats si l'on revient à la variable $x$ (cas $|x|>1$).

Il arrive aux conclusions suivantes :

Adoptons pour le logarithme la valeur dont la partie purement imaginaire tombe entre $\mp\pi i$, on a ainsi pour $Q^{(n)}(x)$ une branche parfaitement déterminée : c'est cette branche que nous désignerons dorénavant par la notation $Q^{n}(x)$.

L'équation

$$Q^{n}(x)=0$$

n'admet *aucune racine finie*. L'équation

$$Q''(x) + k\pi i\,F(x) = 0,$$

où $k$ est entier (non nul) a $n$ racines au-dessus de l'axe des abscisses si $k > 0$, au-dessous si $k < 0$.

M. Stieltjes démontre ensuite ces résultats directement, et fait voir, en particulier, comment, en partant de la formule

$$Q''(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)\,du}{x-u},$$

on peut prouver simplement que l'équation $Q_n(x) = 0$ n'a pas de racines.

*Andoyer (H.).* — Sur les formules générales de la Mécanique céleste. (K, 1-35).

M. Andoyer se propose d'exposer une méthode permettant d'obtenir, pour représenter le mouvement des corps célestes, des formules *purement trigonométriques*.

Soit un système d'équations différentielles $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., à plusieurs inconnues $x_1, x_2, \ldots$, la variable indépendante étant $t$ : les premiers membres sont développés suivant les puissances positives des inconnues (supposées petites par rapport aux coefficients), et de leurs dérivées, et l'on fait l'hypothèse qu'ils ne contiennent aucun terme indépendant des inconnues; ces coefficients se composent de parties constantes et de séries trigonométriques procédant suivant les cosinus ou sinus des multiples de divers arguments $N_i = n_i t + l_i$, les $n$ et les $l$ désignant des constantes. On suppose que les équations ne changent pas si l'on change le signe de $t$, et des constantes $l$, en même temps que celui de certaines inconnues que nous appellerons $z_1, z_2, \ldots$; celles dont il est inutile de changer le signe serront représentées par $y_1, y_2, \ldots$. Imaginons les coefficients ordonnés par rapport à des quantités $m_1$, $m_2$, ..., petites du premier ordre; on suppose que, dans l'une au moins des équations, le coefficient de la première puissance de l'une quelconque des inconnues, ainsi que d'une quelconque de ses dérivées, contienne une partie constante d'ordre inférieur à l'ordre des parties périodiques des coefficients de la même quantité dans l'ensemble des équations, à moins que dans chacune des équations le coefficient de cette quantité ne soit purement périodique; les coefficients étant supposés généralement d'ordre zéro, leurs parties périodiques sont au moins du premier ordre.

Cela posé, réduisons ces équations à former un système linéaire à coefficients constants, en supprimant tous les termes qui n'ont pas la forme correspondant à un tel système. Nous supposerons les racines caractéristiques de l'équation caractéristique de la forme $\pm g_i\sqrt{-1}$.

Alors la méthode des coefficients indéterminés, combinée avec celle des approximations successives, nous donnera des solutions de la forme

$$y_i = \Sigma Y_i^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} \cos(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + k_1 G_1 + k_2 G_2 + \ldots),$$
$$z_i = \Sigma Z_i^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + k_1 G_1 + k_2 G_2 + \ldots),$$

où les $p$ et les $k$ sont des entiers pouvant prendre toutes les valeurs possibles.

Pour la symétrie des formules on supposera

$$Y_i^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} = Y_i^{(-p_1, -p_2, \ldots, -k_1, -k_2, \ldots)},$$

$$Z_i^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} = Z_i^{(-p_1, -p_2, \ldots; -k_1, -k_2, \ldots)};$$

les G sont des arguments de la forme $g'_i t + \varpi_i$, les $\varpi$ étant des constantes arbitraires, tandis que les $g'$ sont des constantes déterminées par la suite même des approximations, et dont les premières valeurs approchées sont

$$g_i + h_{i1} n_1 + h_{i2} n_2 + \ldots,$$

les $h$ étant des entiers arbitraires, que l'on déterminera suivant les cas.

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ désignent des constantes arbitraires, petites par rapport aux coefficients des équations, un coefficient quelconque $Y_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)}$ sera de la forme $\varepsilon_1^{|k_1|} \varepsilon_2^{|k_2|} \ldots y_1^{(p_1, p_2 \ldots; k_1, k_2, \ldots)}$, ce dernier facteur étant une série ordonnée suivant les puissances *paires* des $\varepsilon$. Les quantités $g_1, g_2, \ldots$ sont de la même forme que les quantités $y_1^{(p_1, p_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots)}$.

Telle est la marche générale que M. Andoyer se propose de suivre. Il s'occupe ensuite, d'abord du mouvement relatif autour du Soleil supposé réduit à son centre de gravité, des centres de gravité des huit grands systèmes planétaires, sous l'action du Soleil et sous leur action réciproque. L'auteur s'étend longuement sur ce problème. Après avoir abordé d'une façon générale le mouvement d'un corps autour de son centre de gravité, il s'occupe de l'étude du système de Jupiter en tenant compte de l'action du Soleil, de celle des huit grands systèmes planétaires, et de la forme même de Jupiter. Enfin il termine en disant quelqus mots sur l'étude du système de la Terre en tenant compte de l'action du Soleil, de celle des huit grands systèmes planétaires, et de la forme de la Terre et de la Lune.

## *Humbert* (*G.*). — Sur les coniques inscrites à une quartique. (L, 1-8).

Une quartique sans point double admet 63 systèmes de coniques inscrites, touchant chacune la quartique en 4 points.

Les huit points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique. Chacun des 63 systèmes de coniques comprend 6 couples de bitangentes de la quartique, et à un couple de bitangentes correspond un système déterminé.

Deux couples de bitangentes d'un même système ont leurs huit points de contact sur une conique. Deux systèmes de coniques inscrites ont en commun 4 ou 6 bitangentes; dans le premier cas, les 4 bitangentes communes ont leurs 8 points de contact sur une conique, et elles appartiennent à un troisième système. Dans le deuxième cas, les 6 bitangentes de chacun des deux systèmes, non communes à l'autre, appartiennent à un même troisième système : un système a 4 bitangentes communes avec 30 systèmes, et 6 bitangentes communes avec 32 autres. Soient deux coniques inscrites à une quartique, et appartenant à 2 systèmes différents, ayant 4 bitangentes communes : toute cubique passant par leurs huit points de contact coupe la quartique en 4 nouveaux points, qui sont les points de contact d'une autre conique inscrite, appartenant au troisième système qui comprend les 4 bitangentes communes aux deux premiers.

Inversement, trois coniques appartenant respectivement à ces trois systèmes ont leurs 12 points de contact sur une cubique; elles sont doublement tangentes à une même conique, qu'elles touchent en des points situés sur la cubique précédente. En particulier, les 3 systèmes considérés comprennent respectivement 4 couples de bitangentes distinctes des 4 bitangentes communes; 6 bitangentes appartenant à trois de ces couples, choisis un dans chaque système, ont leurs 12 points de contact sur une cubique, et touchent une conique (qui peut être une droite double). On peut grouper les bitangentes en 1008 hexades jouissant de la propriété précédente.

Soient maintenant 2 coniques inscrites à une quartique, et appartenant à 2 systèmes différents qui ont 6 bitangentes communes : toute cubique menée par leurs 8 points de contact a, pour neuvième point fixe, un des points communs aux 2 coniques; elle coupe de nouveau la quartique en 4 points qui sont les points de contact d'une troisième conique inscrite appartenant au système qui comprend les 6 bitangentes de chacun des deux premiers systèmes, non communes à l'autre; inversement, 3 coniques appartenant respectivement à ces trois systèmes ont leurs 12 points de contact sur une cubique : ces coniques, prises deux à deux, ont 12 points d'intersection, dont trois sont en ligne droite et sont situés sur la cubique précédente. Chacun des 3 systèmes comprend 6 couples de bitangentes, qui donnent 18 droites distinctes. On peut répartir ces 18 droites en 6 triangles

$$a_i,\ b_i,\ c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$$

et choisir les notations des sommets de telle sorte que les 12 côtés issus des sommets $a$, ou $b$, ou $c$ forment les 6 couples d'un même système. Alors 2 tangentes issues d'un sommet $a$, deux autres issues d'un sommet $b$, et deux issues d'un sommet $c$, ont leurs 12 points de contact sur une cubique. On peut les répartir en trois couples de telle sorte que les sommets des 3 couples soient en ligne droite. Il y a 5040 hexades de cette sorte.

## *Rivereau* (l'Abbé). — Sur les invariants des équations différentielles linéaires. (M. 1-5).

Soit

$$y^{(m)} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 y^{(m-2)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a_3 y^{(m-3)} + \ldots + m a_{m-1} y' + a_m y = 0$$

une équation différentielle d'ordre $m$, les $a$ étant des fonctions de $x$.

Posons $y = \eta u(x)$,

$$\frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

$\eta$ étant la nouvelle fonction, $\xi$ la nouvelle variable. L'équation transformée sera

$$\eta^{(m)} + m\alpha_1\eta^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha_2\eta^{(m-2)} + \ldots + \alpha_m \eta = 0.$$

Choisissons pour $u(x)$ et $\mu(x)$ des fonctions U et M telles que $\alpha_1$ et $\alpha_2$ soient

nuls. Puis posons $y = \mathrm{YU}(x)$,

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{M}(x).$$

L'équation réduite sera

$$\mathrm{Y}^m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{A}_3\mathrm{Y}^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\mathrm{A}_4\mathrm{Y}^{m-4} + \ldots + \mathrm{A}_m\mathrm{Y}^0 = 0.$$

On a

$$\mathrm{A}_3 = \frac{1}{2\mathrm{M}^3}(2a_3 - 3a'_2) = \frac{\mathrm{B}_3}{2\mathrm{M}^3};$$

$\mathrm{B}_3$ est l'invariant de Halphen.

Puis

$$\mathrm{A}_4 - 2\frac{d\mathrm{A}_3}{d\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{M}^4}\left[a_4 - 2a'_3 + \frac{6}{5}a''_2 - \frac{3(5m+7)}{5(m+1)}a_2^2\right] = \frac{\mathrm{B}_4}{\mathrm{M}^4};$$

$\mathrm{B}_4$ est un second invariant.

Puis

$$\mathrm{A}_5 - \frac{5}{2}\frac{d\mathrm{A}_4}{d\mathrm{X}} + \frac{15}{7}\frac{d^2\mathrm{A}_3}{d\mathrm{X}^2}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{M}^5}\left[a_5 - \frac{5}{2}a'_4 + \frac{15}{7}a''_3 - \frac{5}{7}a'''_2 - \frac{5(7m+13)}{7(m+1)}a_2(2a_3 - 3a'_2)\right] = \frac{\mathrm{B}_5}{\mathrm{M}^5};$$

$\mathrm{B}_5$ est le troisième invariant, et ainsi de suite.

Un invariant $\mathrm{B}_i$ se reproduit, multiplié par $\frac{1}{\mu^i}$ lorsqu'on fait le changement de fonction et de variable $y = \eta u(x)$, $\frac{d\xi}{dx} = \mu(x)$. Les expressions $\mathrm{B}_i$ sont donc des invariants relatifs. Leurs dérivées ne sont pas des invariants.

## *Cosserat* (*E.*). — Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage de l'un de ses points. (O, 1-16).

Soit $f(x, y) = 0$ une équation dont le premier membre est un polynôme entier en $x$ et en $y$ : on sait que si, pour $x = x_0$, l'équation en $y$ a $n$ racines égales à $y_0$, pour une valeur de $x$ voisine de $x_0$, cette équation a $n$ racines voisines de $y_0$, et $n$ seulement. En particulier, si l'équation est à coefficients réels, et si, en attribuant à $x$ la valeur réelle $x_0$, l'équation en $y$ a une racine simple (réelle) $y_0$, pour une valeur de $x$ *réelle* et voisine de $x_0$, l'équation admettra une racine simple réelle voisine de $y_0$, et une seule.

Supposons l'origine transportée au point à étudier. Pour $x$ infiniment petit, l'équation en $y$ admet $n$ racines infiniment petites : on se propose *l'étude de celles de ces racines qui sont réelles*.

L'auteur expose ensuite la méthode de Puiseux pour séparer les racines infiniment petites, et énonce comme il suit le résultat auquel il parvient :

Soit $y$ une fonction algébrique de la variable $x$ et soit $x_0$ une valeur de cette variable pour laquelle diverses déterminations de $y$ prennent une valeur commune $y_0$. Pour les valeurs de $x - x_0$ ayant leurs modules inférieurs à une limite déterminée, ces diverses déterminations de $y$ se répartissent en des

systèmes distincts l'un de l'autre. Les N racines d'un même système peuvent se mettre sous la forme

$$x - x_0 = t^N, \qquad y - y_0 = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k + \varepsilon_{k+1} t^k,$$

$\varepsilon_{k+1}$ désignant une fonction de $t$ infiniment petite avec $t$ et le nombre $k$ pourra être suffisamment grand pour que les N racines du système se séparent.

La portion de la courbe algébrique d'équation $f(x, y) = 0$ correspondant aux racines d'un même système s'appelle un *cycle*. Le point $(x_0, y_0)$ est *l'origine* du cycle. Les différentes branches de courbe appartenant à un même cycle ont même tangente, que l'on appelle la *tangente du cycle*.

M. Cosserat suppose ensuite que l'équation $f(x, y) = 0$ est à coefficients réels, et examine si le cycle peut avoir des branches réelles, et combien de ces branches. Puis il fait quelques applications en étudiant une courbe algébrique :

1° Dans le voisinage d'un point simple;
2° Dans le voisinage d'un point multiple d'ordre $p$ à tangentes distinctes;
3° Dans le cas d'un point double à tangentes confondues.

Imaginons un cycle réel, posons pour origine des coordonnées l'origine du cycle et pour axe des $x$ la tangente au cycle. On aura

$$x = t^n,$$
$$y = a_{n+\nu} t^{n+\nu} + \ldots + a_{n+s} t^{n+s} + y_{n+s+1} t^{n+s},$$

$y_{n+s+1}$ étant infiniment petit avec $t$; $n$ s'appelle l'ordre du cycle, $\nu$ sa classe :

1° Si $n$ et $\nu$ sont impairs, l'aspect est celui d'un point ordinaire;
2° $n$ est impair, $\nu$ pair, on a une inflexion;
3° $n$ est pair, $\nu$ impair, on a un point de rebroussement de première espèce;
4° $n$ et $\nu$ sont pairs, on a un rebroussement de seconde espèce.

## *Stouff* (*X.*). — Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes. (P, 1-25).

Soit $j$ une racine primitive de l'équation $x^p = 1$, où $p$ est un entier premier. Considérons la substitution

$$S_j, \left(z, \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}\right),$$

où l'on a

$$a_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_h (j^h + j^{-h}), \qquad b_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \beta_h (j^h + j^{-h}),$$

$$c_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \gamma_h (j^h + j^{-h}), \qquad d_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \delta_h (j^h + j^{-h}),$$

les nombres $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h, \delta_h$ étant des entiers tels que

$$a_j d_j - b_j c_j = 1.$$





Puis, envisageons la substitution

$$\sum_j \left( z, \frac{m_j z - n_j}{p_j z - q_j} \right), \quad m_j q_j - n_j p_j = \Delta_j,$$

avec

$$m_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \mu_h (j^h + j^{-h}), \qquad n_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \nu_h (j^h + j^{-h}),$$

$$p_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \varpi_h (j^h + j^{-h}), \qquad q_j = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi_h (j^h + j^{-h}),$$

les $\mu_h$, $\nu_h$, $\varpi_h$, $\chi_h$ étant des entiers. Désignons par $\rho$ une racine primitive au sens arithmétique du nombre $p$, et par $\mathbf{S}_{j^\alpha}$, $\sum_{j^\alpha}$ ce que deviennent $\mathbf{S}_j$ et $\sum_j$ quand on y remplace $j$ par $j^\alpha$. Je suppose que $\sum_j$ soit telle que en multipliant $\sum_j$ par $\sum_{j^\rho}$, puis le produit par $\sum_{j^{\rho^2}}$, et ainsi de suite, la dernière substitution employée comme facteur étant $\sum_{j^{\rho^{\frac{p-1}{2}}}}$, on obtienne la substitution unité, et on l'obtienne pour la première fois.

Imposons aux substitutions $\mathbf{S}_j$ la condition

$$\mathbf{S}_{j^\rho} = \sum\nolimits_j^{-1} \mathbf{S}_j \sum\nolimits_j,$$

les substitutions $\sum_j$ restant fixes, les substitutions $\mathbf{S}_j$ qui satisfont à la condition précédente forment un groupe.

On aura

$$\mathbf{S}_{j^{\rho^k}} = \sum\nolimits_{j^{\rho^{k-1}}} \sum\nolimits_{j^{\rho^{k-1}}}^{-1} \sum\nolimits_{j^{\rho^{k-1}}} \qquad \left( k = 0, 1, \ldots, \frac{p-3}{2} \right).$$

Les groupes ainsi obtenus ne contiennent que trois nombres entiers indépendants; ils sont *discontinus*.

Si l'on veut que $\sum_j$ soit rationnelle, $p$ ne peut prendre que les valeurs 5, 7, 13.

Si $p = 4n + 3$, il n'y a qu'une seule espèce de substitutions dans le groupe. Si $p = 4n + 1$, M. Stouff distingue les substitutions paires et les substitutions impaires. Les substitutions paires forment un sous-groupe.

M. Stouff considère quelques cas particuliers :

1° $p = 5$, $\sum_j = \left( z, -\frac{1}{z} \right)$, (le groupe correspondant sera désigné par $G_5$);

2° $p = 5$, $\sum_j = \left( z, \frac{z+1}{-z-1} \right)$, (groupe $G'_5$);

3° $p = 7$, $\sum_j = \left( z, \frac{-1}{z+1} \right)$, (groupe $G_7$);

4° $p = 13$, $\sum_j = \left( z, \frac{6z+3}{-7z-[illegible]} \right)$, (groupe $G_{13}$);

5° $p$ étant un nombre premier quelconque; soient $j$ et $j^r$ deux racines primitives distinctes de l'équation binome $x^p = 1$, $M_j$, $M_{j^r}$ deux nombres complexes entiers formés de la même façon, l'un avec $j$, l'autre avec $j^r$.

On posera

$$\sum_j = \left(z, \frac{M_j}{M_{j^r}} z\right).$$

Ainsi, pour $p = 17$, on utilisera la substitution

$$\left[z, \frac{(j + j^{-2})z}{j - j^{-2}}\right] \quad \text{avec } \rho = 3.$$

M. Stouff montre ensuite que les groupes discontinus ainsi obtenus ne se ramènent que *partiellement* à des groupes à coefficients entiers; la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe envisagé puisse être ramené à un groupe à coefficients entiers est qu'il existe une substitution $U_j$ ne contenant que les irrationnelles $j^h + j^{-h}$ et telle que $U_j \rho = U_j \Sigma_j$. Les groupes fuchsiens formés d'après le procédé indiqué, en prenant pour $\Sigma_j$ une substitution à coefficients entiers à déterminant positif, peuvent être transformés en groupes à coefficients entiers quand $p = 4n + 3$, et ne peuvent pas toujours l'être quand $p = 4n + 1$.

Ainsi le groupe $G_7$ est le transformé d'un groupe à coefficients entiers, tandis que les groupes formés avec une racine cinquième de l'unité et une substitution transformante rationnelle $\Sigma$, ne sont réductibles à des groupes à coefficients entiers que si le déterminant de $\Sigma$ est de la forme $x^2 - 3xy + y^2$.

M. Stouff étudie ensuite plus profondément les groupes $G_5$ et $G_7$.

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, les substitutions

$$(A) \qquad \left(z, -\frac{1}{z}\right),$$

$$(B) \qquad \left[z, \frac{j - j^4}{(j^2 - j^3)z}\right],$$

$$(C) \qquad \left[z, \frac{2z + 1 + 2j^2 - 2j^3}{(1 - 2j - 2j^4)z - 2}\right]$$

forment un système fondamental. Le polygone générateur est un triangle ayant ses trois angles nuls, ayant pour sommets

$$-(j^2 + j^3), \quad j + j^4, \quad -(j + j^4).$$

Au groupe $G_7$ correspond un polygone fuchsien de genre 0 ayant six côtés; trois des sommets forment chacun un cycle.

## *Méray (Ch.)*. — Théorie analytique du logarithme népérien et de la fonction exponentielle. (Q, 1-35).

1. Nous considérons la fonction $u = \int_1^x \frac{dx}{x}$, l'intégrale étant prise sur un chemin quelconque partant du point $(+1)$.

On la nomme *le logarithme neperien* de $x$ ; on la représente par le signe $l(x)$. Elle est *olotrope* pour toute valeur de $x$ non nulle, mais non olotrope en $x = 0$. Soit $x_i$ un nombre différent de zéro, $l(x)$ peut se développer en série convergente (S) entière par rapport à $(x - x_i)$ à l'intérieur d'un cercle de centre $x_i$ et de rayon $|x_i|$.

On a

$$u = u_i + \lambda\left(1 + \frac{x - x_i}{x_i}\right),$$

avec

$$\lambda(1 + t) = \sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^{h+1} \frac{t^{h+1}}{h+1}.$$

La série (S) est convergente sur le contour du cercle de convergence, sauf au point $x = 0$.

Soit $x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_i$ une suite de valeurs, comme $u_0 = 0$ ; on a

$$u_i = \lambda\left(1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0}\right) + \lambda\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1}\right) + \ldots + \lambda\left(1 + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}\right).$$

Si $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ sont trois termes consécutifs d'une progression géométrique de raison $q$, les valeurs correspondantes de $l(x)$ sont les termes d'une progression arithmétique de raison $\lambda[1 + (q - 1)]$.

2. Imaginons que $x$ chemine arbitrairement à partir du point $(+1)$, que K soit un exposant réel commensurable quelconque, que 1 soit la valeur initiale de $x^{\mathrm{K}}$, on a

$$l(x^{\mathrm{K}}) = \mathrm{K}\, l(x),$$

car les deux membres s'annulent pour $x = 1$, et les dérivées sont égales.

Plus généralement, si $x', x'', \ldots, x^{(g)}$ cheminent arbitrairement à partir du point $(+1)$, si $\mathrm{K}', \mathrm{K}'', \ldots, \mathrm{K}^{(g)}$ sont des exposants réels commensurables quelconques, on a

$$l(x'^{\mathrm{K}'} x''^{\mathrm{K}''} \ldots x^{(g)\mathrm{K}^{(g)}}) = \mathrm{K}'\, l(x') + \mathrm{K}''\, l(x'') + \ldots + \mathrm{K}^{(g)}\, l(x^{(g)}),$$

pourvu que la valeur initiale des monômes $x'^{\mathrm{K}'}, x''^{\mathrm{K}''}, \ldots, x^{(g)\mathrm{K}^{(g)}}$ soit $(+1)$.

3. Imaginons un chemin simple allant de $x_0$ à X, $x_1$ un point de ce chemin le partageant en deux tronçons $x_0 x_1$, $x_1$X, $[\mathrm{O}_x]$ un anneau, contour fermé ceignant l'origine, partant de $x_1$ pour revenir à $x_1$, si U est la valeur de $l(x)$ en X correspondant au chemin simple, et $\mathrm{U}^{(k)}$ la valeur de $l(x)$ en X qui résulte de l'insertion entre les deux tronçons $[x_0, x_{(1)}]$, $[x_{(1)}, \mathrm{X}]$ de l'anneau $[\mathrm{O}_x]$ parcouru $k$ fois dans le sens direct, on a

$$\mathrm{U}^{(k)} = \mathrm{U} + k\varpi;$$

$\varpi$ est une constante spéciale (dite *augment*) dont la valeur est indépendante de la forme de l'anneau.

4. Soit $\varepsilon$ une quantité réelle, telle que $|\varepsilon| < 1$, et $l(x + \varepsilon x)$ la valeur que prend le logarithme quand on passe de $x$ à $x + \varepsilon x$ en partant du premier point avec la valeur $l(x)$, on a

$$l(x + \varepsilon x) = l(x) + h.$$

où $h$ est une quantité *réelle*, inférieure, égale ou supérieure à zéro en même temps que $\varepsilon$, on a

$$h = \lambda(1 + \varepsilon).$$

5. Le point $x_0 = +1$ étant ainsi que tout point d'affixe réelle et positive sur la partie positive de l'axe réel, comme on part du point $(+1)$ avec la valeur initiale $l(1) = 0$, la valeur atteinte par $l(x)$ sera *réelle* et *unique*, $\gtrless 0$ suivant que l'on a $x \gtrless 1$.

6. Quels que soient la valeur de $x$, de module $\xi$, et le chemin suivi pour y arriver, si l'on représente par $'l(x)$ le premier élément de $l(x)$, on a

$$'l(x) = l(\xi),$$

valeur réelle atteinte par $l(x)$ partant de $l(1) = 0$, quand on chemine de $(+1)$ à $\xi$ sur la partie positive des quantités réelles.

En particulier si $|x| = 1$, $'l(x) = 0$.

7. L'augment $\varpi$ est une quantité imaginaire dont les éléments sont le premier nul, le second positif. Lorsque X est une quantité réelle, positive, tout chemin non équivalent au segment rectiligne $[1, X]$ donne pour $l(X)$ une valeur imaginaire, $'l(X) + k\varpi$, ($k \neq 0$ et entier).

Si X n'est pas une quantité réelle et positive, $l(X)$ est imaginaire, quel que soit le chemin suivi. Soit $X_{(1)}$ la trace de la demi-droite $O_x X$ sur la circonférence $[O_x, 1]$ de centre $O_x$ et de rayon 1, le second élément de $l(X)$ a pour représentation géométrique la longueur de l'un des arcs ayant sur la circonférence $[O_x, 1]$, pour origine $(+1)$, pour extrémité $X_{(1)}$. On a en particulier

$$\varpi = 2i\pi.$$

8. Quand $x$ est infiniment petit ou infini, le second élément de $l(x)$ est indéterminé, mais le premier est infini, négatif dans le premier cas, positif dans le second cas.

9. Soit $\alpha_m$ la racine principale $m^{\text{ième}}$ directe de l'unité. [*Voir* le Mémoire de M. Méray *Sur les radicaux* (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, t. I; 1891)]. Représentons par $l(\alpha_m^n)$ la valeur de $l(x)$ au bout du plus court chemin de sens direct qui conduit de 1 à $\alpha_m^n$ sur la circonférence $[O_x, 1]$, on a toujours

$$l(\alpha_m^n) = \frac{n}{m} 2i\pi.$$

Ainsi, en particulier

$$l(-1) = i\pi, \qquad l(i) = \frac{i\pi}{2}, \qquad l(-i) = \frac{3i\pi}{2}.$$

10. L'auteur s'occupe ensuite de démontrer les deux théorèmes de Cauchy qui suivent :

« 1° Si la fonction $f(x)$ est méromorphe dans l'aire limitée et imperforée (S), mais olotrope sur son contour (C), l'intégrale définie $\int_{C} f(x)\,dx$ prise en

parcourant ce contour une fois dans le sens direct est égale à $2i\pi \mathcal{E}_S f(x)$, $\mathcal{E}_S f(x)$ désignant la somme des résidus de $f(x)$ sur l'aire S. »

« 2° Si $f(x)$ répond aux conditions précédentes, et n'a aucun zéro sur le contour (C), si $m$ est la somme des degrés de multiplicité des zéros de $f(x)$ intérieurs à S, $\mu$ la même somme pour les infinis de cette fonction, $\Delta l f(x)$ la variation que fait éprouver à $lf(x)$ le parcours du contour (C) dans le sens direct, on a

$$m - \mu = \frac{\Delta l f(x)}{2i\pi}.$$

11. *Par inversion* on passera à la fonction exponentielle; la résolution par rapport à $u$ de l'équation $l(u) = x$ donne une fonction de $x$ qui est indéfiniment olotrope et dont le développement par la formule de Maclaurin est

$$u = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots = \varphi(x),$$

on a

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \varphi^m(x) = u;$$

puis

$$\varphi(x')^{K'}\varphi(x'')^{K''}\ldots\varphi(x^{(g)})^{K^{(g)}} = \varphi(K'x' + K''x'' + \ldots + K^{(g)}x^{(g)}),$$

pourvu que l'on parte des valeurs initiales

$$\varphi(0)^{K'} = \varphi(0)^{K''} = \ldots = \varphi(0)^{K^{(g)}} = 1.$$

Ensuite on démontre que

$$\varphi(x + h) = \varphi(x)\varphi(h),$$

puisque

$$\varphi(gx) = [\varphi(x)]^g, \qquad (g \text{ étant entier positif}).$$

Vient ensuite

$$1 = \varphi(x)\varphi(-x), \qquad \varphi(-gx) = [\varphi(x)]^{-g};$$

enfin, si $e = \varphi(1)$, $\varphi(x) = e^x$ pour toute valeur réelle et commensurable de $x$.

12. L'auteur passe aux propriétés de l'exponentielle :

1° Quand $x$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ par des valeurs réelles, $e^x$ est réelle et croît de 0 à $+\infty$;

2° Quand $x'$, premier élément de $x = x' + ix''$, est nul, on a

$$|e^x| = 1,$$

en général

$$|e^{x'+ix''}| = e^{x'};$$

3° Si $m$ et $n$ sont deux entiers, le premier positif, et si $\alpha_m$ désigne toujours la racine principale directe $m^{\text{ième}}$ de l'unité, on a

$$e^{\frac{n}{m}2i\pi} = \alpha_m^n;$$

4° $e^x$ est infinie quand le premier élément de $x$ est infini positif, infiniment petite quand il est infini négatif, indéterminée s'il est fini et différent de zéro, le second élément étant infini;

5° L'équation numérique $e^u = X$ est impossible si $X = 0$. Si $X \neq 0$, elle a pour racines uniques toutes les déterminations de $l(X)$;

6° La fonction exponentielle admet $2i\pi$ comme période élémentaire.

L'auteur termine par la définition et l'étude des logarithmes de base $a$, des logarithmes vulgaires et de la fonction $x^m$.

## *Stieltjes* (*T.-J.*). — Sur la théorie des nombres (étude bibliographique). (1-103).

1. L'idée de nombre vient de la considération de plusieurs objets distincts, et *elle est indépendante de l'ordre dans lequel on les envisage.* De cet axiome découlent les propriétés exprimées par les équations

$$a + b = b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c),$$
$$abc = bac = c(ab), \qquad a(b + c) = ab + ac, \qquad \ldots.$$

2. Le plus petit multiple commun de plusieurs nombres divise exactement tout autre multiple commun de ces nombres; leur plus grand commun diviseur est un multiple de tout autre diviseur commun.

Pour chercher le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) de $a, b, c, \ldots, l$, on peut diviser ces nombres en divers groupes, chercher le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des nombres contenus dans ces groupes, et ensuite le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des nombres ainsi obtenus. Pour deux nombres $a, b$; $a > b$, imaginons les identités successives

$$\begin{array}{ll} a = qb + r & r < b, \\ b = q'r + r' & r' < r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ r^{(k-1)} = q^{(k-1)} r^{(k)} + r^{(k+1)} & r^{(k+1)} < r^{(k)}, \\ r^{(k)} = q^{(k)} r^{(k+1)}. & \end{array}$$

$r^{(k+1)}$ est le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$.

$(a, b, c, \ldots, l)$ désignant le plus grand commun diviseur de $a, b, c, \ldots, l$, $|a, b, c, \ldots, l|$ le plus petit commun multiple des mêmes nombres, on a

$$(ma, mb, \ldots, ml) = m(a, b, \ldots, l),$$
$$|ma, mb, \ldots, ml| = m|a, b, \ldots, l|.$$

Soient $d$ le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des $\alpha$ nombres $a, a', a'', \ldots$; $e$ le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des $\beta$ nombres $b, b', b'', \ldots$; le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des $\alpha\beta$ produits

$$ab, \quad ab', \quad ab'', \quad \ldots, \quad a'b, \quad a'b', \quad \ldots, \quad a''b, \quad a''b', \quad \ldots$$

est $de$.

Le plus petit commun multiple (plus grand commun diviseur) de $a, b, c, \ldots, l$

est égal au produit $abc\ldots l$ divisé par le plus grand commun diviseur (plus petit commun multiple) des produits $bc\ldots l$, $ac\ldots l$, …, $ab\ldots k$.

3. Soient $n$ nombres $a$, $b$, …, $l$. Remplaçons dans le groupe (A) de ces $n$ nombres deux nombres ($a$ et $b$ par exemple), par leur plus grand commun diviseur, et leur plus petit commun multiple. Répétons la même opération sur le groupe ($A_1$) ainsi obtenu et ainsi de suite. On finira toujours par obtenir un système dans lequel deux nombres quelconques sont tels que l'on divise l'autre. Si l'on ordonne les nombres de ce système définitif par ordre de grandeur croissante, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $e_k$ divise $e_{k+1}$, ces nombres forment le *système réduit*, $e_k$ est le $k^{\text{ième}}$ nombre réduit.

Ce système réduit est *unique* et indépendant de la manière dont on a dirigé les opérations.

Soit $D_k$ et $M_k$ le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des $n$ nombres $a$, $b$, …, $l$, multipliés $k$ à $k$, on a

$$e_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} = \frac{M_{n-k+1}}{M_{n-k}},$$

$a'$ et $b'$ étant le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de $a$ et de $b$, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de $(m, a)$ et de $(m, b)$ sont respectivement $(m, a')$ et $(m, b')$.

De même le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de $|m, a|$ et de $|m, b|$ sont respectivement $|m, a'|$ et $|m, b'|$.

Étant donné le système

$$(m, a), \quad (m, b), \quad \ldots, \quad (m, l),$$

le système réduit est

$$(m, e_1), \quad (m, e_2), \quad \ldots, \quad (m, e_n).$$

De même, étant donné le système

$$|m, a|, \quad |m, b|, \quad \ldots, \quad |m, l|,$$

le système réduit est

$$|m, e_1|, \quad |m, e_2|, \quad \ldots, \quad |m, e_n|,$$

$e_1$ est le plus grand commun diviseur de $|a|$, $|b|$, …, $|l|$,
$e_2$ » $|a, b|$, $|a, c|$, …, $|k, l|$,
$e_3$ » $|a, b, c|$, $|a, b, d|$, …,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,
$e_n$ est le plus petit commun multiple de $(a)$, $(b)$, …, $(l)$,
$e_{n-1}$ » $(a, b)$, $(a, c)$, …, $(k, l)$,
$e_{n-2}$ » $(a, b, c)$, $(a, b, d)$, …,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

4. Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux (ont pour plus grand commun diviseur l'unité), tout nombre divisant $a$ et $bc$, divise $a$ et $c$ : les nombres $a, a', \ldots$ étant tels que chacun d'eux est premier avec $b, b', \ldots$, le produit $aa'\ldots$ est premier avec $bb', \ldots$.

*Si $a$, $b$, ..., $l$ sont premiers entre eux deux à deux,* on a

$$|a, b, \ldots, l| = abc \ldots l,$$

et réciproquement; tout nombre les admettant comme diviseurs est divisible par leur produit.

Le $(n+1)^{\text{ième}}$ nombre réduit $e_{n+1} = 1$.

On a

$$(m, ab \ldots l) = (m, a) \times (m, b) \times \ldots \times (m, l).$$

On obtient tous les diviseurs du produit $ab$, ..., $l$, et chaque diviseur une seule fois en multipliant chaque diviseur de $a$ par chaque diviseur de $b$, ..., par chaque diviseur de $l$.

$f(m)$ désignant le nombre des diviseurs de $m$, ou la somme de ces diviseurs, ou la somme de leurs $k^{\text{ièmes}}$ puissances, on a

$$f(ab \ldots l) = f(a) \times f(b) \times \ldots \times f(l).$$

5. Un nombre qui n'admet comme diviseurs que lui-même et l'unité est dit *premier*. Autrement, il est dit *composé*. Tout nombre composé admet un diviseur premier; il est décomposable d'une seule manière en facteurs tous premiers.

Imaginons que l'on ait

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$
$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k},$$

les $p$ étant des nombres premiers, quelques-uns des exposants pouvant d'ailleurs être nuls.

Soient $\alpha_i$, $\beta_i$, ..., $\lambda_i$ les exposants de $p_i$; supposons qu'en les écrivant par ordre de grandeur on ait

$$a_i \geqq b_i \geqq \ldots \geqq l_i.$$

Alors

$$e_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$
$$e_2 = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}.$$

Un nombre $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ admet $(\alpha+1) \times (\beta+1) \times (\gamma+1) \ldots$ diviseurs, et leur somme est

$$\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1} \times \frac{r^{\gamma+1} - 1}{r - 1} \times \ldots.$$

Il y a une infinité de nombres premiers, et la différence de deux nombres premiers consécutifs peut dépasser un nombre donné à l'avance.

Enfin il est toujours possible de mettre le plus petit commun multiple des nombres $a$, $b$, $c$, ..., $l$ sous la forme d'un produit $a'$, $b'$, ..., $l'$ dont les facteurs sont tous premiers entre eux deux à deux et divisent respectivement $a$, $b$, ..., $l$. On peut toujours obtenir une solution du problème précédent sans décomposer les nombres en facteurs premiers.

6. Si la différence des deux nombres $a$, $b$ est divisible par M, $a$ et $b$ sont dits *congrus* par rapport à M; M s'appelle le *module; a* et *b* sont *résidus l'un de l'autre* suivant le module M. On écrit, suivant Gauss, $a \equiv b \pmod{M}$; cette formule est une *congruence*. Tout nombre a un résidu qui ne dépasse pas en valeur absolue la moitié du module : c'est le *résidu minimum*.

$f(x, y, z, \ldots)$ étant un polynôme *à coefficients entiers,* si l'on a

$$a \equiv a', \qquad b \equiv b', \qquad c \equiv c', \qquad \ldots, \qquad (\operatorname{mod} M),$$

on a aussi

$$f(a, a', a'', \ldots) \equiv f(b, b', b'', \ldots) \qquad (\operatorname{mod} M).$$

Si $ma \equiv mb \pmod{M}$: soit $(m, M) = d$, on a

$$a \equiv b \left(\operatorname{mod} \frac{M}{d}\right).$$

Si $aa' \equiv bb'$, $a \equiv b \pmod{M}$; soit $d = (a, M) = (b, M)$, on a

$$a' \equiv b' \left(\operatorname{mod} \frac{M}{d}\right).$$

7. On peut distribuer l'ensemble des nombres entiers en M classes, deux nombres étant ou non d'une même classe suivant qu'ils sont congrus, ou non, suivant le module M : tous les nombres d'une même classe ont avec M le même plus grand commun diviseur : on considère comme étant de la même famille les classes pour lesquelles ce plus grand commun diviseur est le même. Le nombre des classes pour lesquelles le plus grand commun diviseur est 1 sera désigné par $\varphi(M)$. Le nombre des classes qui ont avec M le plus grand commun diviseur $d$ est $\varphi\left(\frac{M}{d}\right)$.

On a donc

$$\sum \varphi\left(\frac{M}{d}\right) = M,$$

$d$ parcourant tous les diviseurs de M, ou $\Sigma\varphi(d) = M$; si $M = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots l^{\lambda}$, $a$, $b$, $\ldots$, $l$ étant premiers et si $f$ et F sont deux fonctions numériques, liées par la relation $F(M) = \Sigma f(d)$, $d$ parcourant tous les diviseurs de M, on a

$$f(M) = F(M) - \sum F\left(\frac{M}{a}\right) + \sum F\left(\frac{M}{ab}\right) - \sum F\left(\frac{M}{abc}\right) + \ldots.$$

Ainsi

$$\varphi(M) = M\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

8. Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients entiers en $x$. Dans la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{M}$, on ne considère comme distinctes que les racines *incongrues* suivant le module M. La congruence $ax + b \equiv 0 \pmod{M}$ est possible seulement lorsque $b$ est divisible par $d = (a, M)$.

Elle admet alors $d$ racines. La théorie des fractions continues limitées donne un moyen de trouver ces racines.

Si l'on cherche tous les nombres $x$ qui satisfont au système suivant de $n$ congruences, $x \equiv \alpha \pmod{A}$, $x \equiv \beta \pmod{B}$, $\ldots$, $x \equiv \lambda \pmod{L}$, soit M le plus petit commun multiple de A, B, $\ldots$, L, si *le problème est possible* (il l'est par

exemple si A, B, ..., L sont premiers entre eux) les solutions sont données par la formule

$$x \equiv a \pmod{M},$$

$a$ étant convenablement choisi. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les différences $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, ..., $\varkappa - \lambda$ soient divisibles respectivement par $(A, B)$, $(A, C)$, ..., $(K, L)$. On peut d'ailleurs ramener le cas général au cas où ces modules sont premiers entre eux.

D'après ce qui précède, la résolution de la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{M}$ où $M = AB\ldots L$, les facteurs étant premiers entre eux, se ramène à celle des congruences

$$f(x) \equiv 0 \pmod{A}, \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{B}, \qquad \ldots, \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{L}.$$

Une congruence de degré $n$ [degré de $f(x)$] par rapport à un *module premier* $p$ admet tout au plus $n$ racines. Les racines de la congruence de degré $n$ $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ étant $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, on a identiquement

$$f(x) \equiv (x - \alpha)(x - \beta)\ldots(x - \lambda) f_1(x) \pmod{p}$$

et la congruence $f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ n'admet aucune racine. Si la congruence de degré $n$, $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ admet $n$ racines et si l'on a

$$f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \pmod{p},$$

les congruences $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) \equiv 0 \pmod{p}$ des degrés $n_1$ et $n_2$, $(n_1 + n_2 = n)$ admettront respectivement $n_1$ et $n_2$ racines. De ces principes, l'auteur déduit la démonstration du théorème de Wilson : « $p$ étant un nombre premier, $1.2\ldots(p-1)+1$ est toujours divisible par $p$ »; et du théorème de Fermat : « $a$ étant un nombre entier non divisible par le nombre premier $p$, $a^{p-1} - 1$ est toujours divisible par $p$. »

L'auteur s'occupe ensuite de l'équation indéterminée

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = u.$$

Soit $a_1 \neq 0$; déterminons $\alpha$ et $\gamma$ par la condition

$$a_1 \alpha + a_2 \gamma = (a_1, a_2).$$

Posons

$$\beta = -a_2 : (a_1, a_2), \qquad \delta = +a_1 : (a_1, a_2) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

puis

$$x_1 = \alpha x'_1 + \beta x'_2,$$
$$x_2 = \gamma x'_1 + \delta x'_2,$$

d'où

$$x'_1 = \delta x_1 - \beta x_2,$$
$$x'_2 = -\gamma x_1 + \alpha x_2,$$

l'équation proposée devient

$$(a_1, a_2) x'_1 + b_2 x'_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = u.$$

Ensuite posons

$$(a_1, a_2)\alpha_1 + a_3 \gamma_1 = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = 1,$$
$$x'_1 = \alpha_1 x''_1 + \beta_1 x'_3, \qquad x''_1 = \delta_1 x'_1 - \beta_1 x_3,$$
$$x_3 = \gamma_1 x''_1 + \delta_1 x'_3, \qquad x'_3 = -\gamma_1 x'_1 + \alpha_1 x_3.$$

On aura

$$(a_1, a_2, a_3)x''_1 + b_2 x'_2 + b_3 x'_3 + a_4 x_4 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = u.$$

On opérera ensuite sur $x''_1$ et $x_4$ et ainsi de suite. Après $n$ opérations on arrivera à l'équation

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) x''_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_{n+1} x'_{n+1} = u.$$

On peut choisir les nombres $\beta, \delta; \beta_1, \delta_1; \dots$, de façon que les $b$ soient nuls; on a alors

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x''_1 + a_{1,2} x'_2 + a_{1,3} x'_3 + \dots + a_{1,n+1} x'_{n+1},\\
x_2 &= \lambda_2 x''_1 + a_{2,2} x'_2 + a_{2,3} x'_3 + \dots + a_{2,n+1} x'_{n+1},\\
x_3 &= \lambda_3 x''_1 + a_{3,3} x'_3 + \dots + a_{3,n+1} x'_{n+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n+1} &= \lambda_{n+1} x''_1 + \dots\dots\dots\dots + a_{n+1,n+1} x'_{n+1}.
\end{aligned}$$

On obtient toutes les solutions de l'équation indéterminée proposée et chaque solution une seule fois en prenant dans les formules précédentes

$$x''_1 = u : (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$$

et en faisant parcourir à $x'_2, \dots, x'_n$ toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

L'auteur déduit de cette solution une proposition donnée par M. Hermite, savoir : « On peut toujours déterminer $n$ lignes de $(n+1)$ nombres entiers telles qu'en ajoutant une $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne et formant le déterminant, les coefficients multipliés dans ce déterminant par les différents termes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne soient des nombres donnés. »

Autre proposition : « Étant donnés les nombres entiers $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, on pourra toujours trouver $n$ lignes de $(n+1)$ nombres entiers telles qu'en les ajoutant à la ligne donnée on obtienne un déterminant égal au plus grand commun diviseur de $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$.

9. Envisageons le cas $u = 0$.

Si l'on a $m$ solutions telles que $(K_j)$ $k_{j,1} k_{j,2} \dots k_{j,n+1}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ on dira qu'elles sont *indépendantes* lorsque les déterminants d'ordre $m$ puisés dans le tableau des nombres $k_{j,h}$ ne sont pas tous nuls.

Si l'on considère les solutions $(K_1), (K_2), \dots, (K_m)$.

$(K_1 t_1 + K_2 t_2 + \dots + K_m t_m)$ constitue une nouvelle solution. On dira qu'un système de solutions $(K_1), (K_2), \dots, (K_m)$ forme un *système fondamental* dans le cas où l'on obtient *toutes* les solutions et chaque solution *une seule fois* en donnant à $t_1, t_2, \dots, t_m$ toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Un système fondamental de solutions se compose nécessairement de $n$ solutions indépendantes. Et un système de $n$ solutions indépendantes tel que le plus grand commun diviseur de ses déterminants $M_1, M_2, \dots, M_{m+1}$, soit 1, forme un *système fondamental* de solutions. L'auteur donne ensuite un moyen de trouver un système fondamental de solutions.

10. Considérons le système de congruences

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n \equiv u_i \pmod{M}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Soit Δ le déterminant formé avec les coefficients des inconnues, *si Δ est premier avec* M, le système considéré admet une solution unique, déterminée par les équations

$$\Delta x_i = u_1 \alpha_{1i} + u_2 \alpha_{2i} + \ldots + u_n \alpha_{ni},$$

$\alpha_{ik}$ étant le coefficient de $a_{ik}$ dans Δ, les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ainsi trouvées satisferont encore à la congruence

$$a_{n+1,1} x_1 + a_{n+1,2} x_2 + \ldots + a_{n+1,n} x_n \equiv u_{n+1} \pmod{M}$$

si l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & u_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & u_{n+1} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{M}.$$

11. On appelle *matrice* un tableau tel que

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{Vmatrix}.$$

On dit que cette matrice est du type $n \times m$. Si l'on a un système d'équations linéaires ou de congruences, les coefficients des inconnues constituent la matrice de ce système. Si l'on ajoute à cette matrice une colonne formée par les termes connus, on a la *matrice complétée* du système. Les déterminants d'une matrice sont les déterminants du degré le plus élevé que l'on peut former avec les lignes ou les colonnes de la matrice. Le plus grand commun diviseur d'une matrice est le plus grand commun diviseur des déterminants de cette matrice. Deux matrices $\|A\|$ et $\|B\|$ des types $m \times (m+n)$ et $n \times (m+n)$ sont de types *complémentaires*.

Considérons la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m+n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m+n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m+n} \end{Vmatrix}$$

du type $m \times (m+n)$ : elle a $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m}$ déterminants.

Soit $\Delta = |a_{ik}|$ $(k, i = 1, 2, \ldots, m)$ le déterminant formé par les $m$ premières colonnes de la matrice. Désignons par $\Delta_{i,m+k}$ le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la $i^{\text{ième}}$ colone par la $(m+k)^{\text{ième}}$ colonne de la matrice. Les $mn+1$ déterminants $\Delta, \Delta_{i,m+k}$ sont indépendants. Les autres s'expriment rationnellement au moyen de ceux-là.

12. Considérons d'abord le système linéaire et homogène

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,m+n} x_{m+n} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ces équations étant linéairement indépendantes.

M. Stieltjes donne le moyen d'obtenir toutes les solutions en nombres entiers de ce système, et chacune d'elles une fois; les solutions sont de la forme

$$x_i = \beta_{1,i}t_1 + \beta_{2,i}t_2 + \ldots + \beta_{n,i}t_n,$$

où l'on donne à $t_1, t_2, \ldots, t_n$ toutes les valeurs entières de $(-\infty)$ à $(+\infty)$.

Imaginons $r$ solutions du système, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ : elles sont *indépendantes* si tous les déterminants d'ordre $r$ qu'on peut former avec leurs éléments ne sont pas nuls. On peut trouver tout au plus $n$ solutions indépendantes. $A_1t_1 + A_2t_2 + \ldots + A_rt_r$ constitue une nouvelle solution. On dira que $A_1$, $A_2, \ldots, A_r$ forment un *système fondamental de solutions* lorsqu'on obtient toutes les solutions possibles, et chacune d'elles une seule fois, en donnant à $t_1, t_2, \ldots, t_r$ toutes les valeurs entières de $(-\infty)$ à $(+\infty)$. Un système fondamental de solutions se compose de $n$ solutions indépendantes. La matrice d'un système fondamental de solutions a pour plus grand commun diviseur l'unité.

Incidemment, M. Stieltjes démontre les deux théorèmes suivants :

« 1° Un système de $m+n$ équations entre $n$ inconnues

$$\alpha_i = \beta_{1,i}t_1 + \beta_{2,i}t_2 + \ldots + \beta_{n,i}t_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

admet toujours une solution unique et en nombres entiers lorsque le plus grand commun diviseur de la matrice du système est égal à 1 et que tous les déterminants de la matrice complétée sont nuls. »

« 2° Un système de $(m+n)$ congruences entre $n$ inconnues

$$\alpha_i \equiv \beta_{1,i}t_1 + \beta_{2,i}t_2 + \ldots + \beta_{n,i}t_n \pmod{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

admet toujours une solution unique lorsque le plus grand commun diviseur de la matrice du système est premier avec M, et que tous les déterminants de la matrice complétée sont congrus à 0 (mod M). »

13. Soit

$$\|a_{i,k}\| \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m+n \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \|A\|$$

une matrice de type $n \times (m+n)$ et $\|c_{i,k}\|$ ou $\|C\|$ une matrice du type $n \times n$, on représente par $\|C\| \times \|A\| = \|A'\|$ la matrice dont les éléments sont

$$a'_{ik} = c_{i,1}a_{1,k} + c_{i,2}a_{2,k} + \ldots + c_{i,n}a_{n,k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m+n \end{pmatrix}.$$

Soit $\|C_1\|$ une autre matrice de type $n \times n$, on écrira

$$\|C_1\| \times \|A'\| = \|C_1\| \times \|C\| \times \|A\| = \{\|C_1\| \times \|C\|\} \times \|A\|.$$

Dans le cas où $|C| = \varepsilon = \pm 1$, on désignera par $\|C\|^{-1}$ la matrice $\|\varepsilon\gamma_{i,k}\|$, $\gamma_{i,k}$ étant le coefficient de $c_{i,k}$ dans $|C|$; on a

$$\|C\| \times \|C\|^{-1} = 1.$$

Cela posé, lorsque le plus grand commun diviseur de la matrice $\|B\|$ du type $n \times (m+n)$ est égal à 1, et que les déterminants d'une matrice $\|A\|$ du type $n \times (m+n)$ sont proportionnels aux déterminants correepondants de $\|B\|$, il existe une matrice $\|C\|$ et une seule telle que $\|A\| = \|C\| \times \|B\|$.

Revenons au système (I)

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,m+n}x_{m+n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les déterminants d'une matrice formée par $n$ solutions indépendantes du type $n \times (m - n)$ sont proportionnels aux déterminants correspondants de la matrice du type $m \times (m + n)$ du système (I).

Soit $d$ le plus grand commun diviseur de cette dernière matrice : un déterminant d'un système fondamental de solutions est égal au déterminant correspondant de la matrice du système (I), divisé par $d$.

L'auteur s'occupe ensuite du problème suivant : Étant donnée une matrice $\| A \|$ du type $n \times (m + n)$, dont $d$ est le plus grand commun diviseur, trouver toutes les solutions de l'équation $\| A \| \times \| C \| = \| B \|$, le déterminant $| C |$ étant égal à $\pm d$.

13 *bis*. Considérons maintenant le système (II)

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,m+n}x_{m+n} = = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que le système (II) admette des solutions, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de la matrice du système soit égal au plus grand commun diviseur de la matrice complétée.

La solution la plus générale du système non homogène (II) s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution la plus générale du système homogène (I).

Soit $d$ le plus grand commun diviseur de la matrice, complétée ou non, du système (II), il y a $d^{m-1}$ systèmes de résidus $u_i$ par rapport à $d$ pour lesquels le système (III) admet des solutions entières.

M. Stieltjes démontre ensuite qu'il y a exactement $\Delta$ systèmes de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui satisfont aux inégalités

$$0 \leq \frac{\partial \Delta}{\partial a_{i1}} x_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{i2}} x_2 + \ldots + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{im}} x_m < \Delta,$$

$\Delta$ étant le déterminant

$$| a_{ik} | \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix};$$

les $a_{ik}$ sont des nombres entiers tels qu'on ait $\Delta > 0$. Puis viennent des problèmes sur les matrices, savoir :

1° Soit

$$\| a_{ik} \| \quad \text{ou} \quad \| A \| \qquad \begin{bmatrix} i = 1, 2, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots, (m + n) \end{bmatrix}$$

une matrice donnée du type $m \times (m + n)$, dont $d$ est le plus grand commun diviseur. On se propose de trouver toutes les matrices

$$\| c_{ik} \| \quad \text{ou} \quad \| C \| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, m - n \end{pmatrix}$$

du type complémentaire $n \times (m - n)$ telles que $\begin{vmatrix} A \\ C \end{vmatrix} = \pm d$ :

2° On se propose de trouver toutes les matrices du type $m \times (m + n)$ dont les déterminants ont des valeurs données.

Ces valeurs données ne peuvent pas être quelconques, les déterminants $\Delta$, $\Delta_{i,m+k}$ (*voir* le § II) ne peuvent pas même être arbitraires : car il faut que les autres déterminants, qui sont des fonctions rationnelles des $\Delta$ et des $\Delta_{i,m+k}$ aient des valeurs entières; mais ces conditions, une fois vérifiées, le problème est toujours possible et admet une infinité de solutions.

3° Soient $\| A \| = \| a_{i,k} \|$ une matrice du type $m \times (m+n)$, dont le plus grand commun diviseur est $\delta$, $\| C \| = \| c_{i,k} \|$ une matrice du type complémentaire $n \times (m+n)$ telle que $\left| \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \right| = \pm \delta$; soit $\| B \| = \| b_{i,k} \|$ une matrice du type $n \times (m+n)$ formée par un système fondamental de solutions des équations linéaires et homogènes

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,m+n}x_{m+n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Les matrices $\| B \|$ et $\| C \|$ sont du même type : à un déterminant $\Delta_b$ de la première on peut faire correspondre un déterminant $\Delta_c$ de la seconde, les deux déterminants correspondants étant formés avec $n$ colonnes de même rang, et prises dans le même ordre, dans les deux matrices. Cela posé, on a

$$\Sigma \Delta_b \Delta_c = 1,$$

la sommation s'étendant à toutes les paires de déterminants correspondants.

A l'aide de ce résultat, on peut résoudre le problème suivant :

« Étant donnée une matrice $\| A \|$ du type $m \times (m+n)$, dont le plus grand commun diviseur est $\delta$, trouver les matrices $\| D \|$ du même type, telles que

$$\Sigma \Delta_a \Delta_d = \delta,$$

$\Delta_a$ et $\Delta_d$ étant deux déterminants correspondants des deux matrices.

Voici maintenant quelques remarques sur le plus grand commun diviseur d'une matrice :

1° Soit $\delta$ le plus grand commun diviseur d'une matrice $\| a_{i,k} \|$ du type $m \times (m+n)$. Considérons les $m$ fonctions linéaires

$$X_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,m+n}x_{m+n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et $m$ valeurs de ces fonctions

$$A_{i,k} = a_{k,1}d_{i,1} + \ldots + a_{k,m+n}d_{i,m+n} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$\delta$ est la plus petite valeur (sauf 0) que peut prendre le déterminant $| A_{i,k} |$.

2° Soient $\| a_{i,k} \|$ ou $\| A \|$ une matrice du type $m \times (m+n)$, $\| A_p \|$ la matrice du type $m \times p$ formée par $p$ colonnes de $\| A \|$ $(p < m)$, soient $d_p$ le plus grand commun diviseur de $\| A_p \|$, et D le plus grand commun diviseur de tous les déterminants de A qui renferment les $p$ colonnes de $\| A_p \|$ : *tous les déterminants de* $\| A \|$ *sont divisibles par* $\frac{D}{d_p}$.

Si $d_p = 1$, D est le plus grand commun diviseur de la matrice $\| A \|$; lorsque le plus grand commun diviseur de la matrice $\| A \|$ est 1, on a

$$D = d_1.$$

3° Considérons une matrice

$$\|B\| \quad \text{ou} \quad \|b_{i,k}\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m+n \end{pmatrix},$$

formée par un système fondamental de solutions de

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,m+n}x_{m+n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

soient $\|B_p\|$ une matrice formée par $p$ colonnes de $\|B\|$, $(p < n)$, $d_p$ le plus grand commun diviseur de $\|B_p\|$, $\delta$ le plus grand commun diviseur de la matrice des $a_{i,k}$, $\delta_p$ le plus grand commun diviseur de la matrice obtenue en supprimant, dans la matrice des $a_{i,k}$, les $p$ colonnes qui correspondent aux colonnes de $\|B_p\|$, le plus grand commun diviseur $d_p$ est égal à $\frac{\delta_p}{\delta}$.

Le théorème est encore vrai dans le cas $p = n$.

14. Étant donné un système de $m$ congruences entre $n$ inconnues

$$X_i = a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ M),$$

on considère la forme bilinéaire

$$F = \sum\sum a_{i,k}x_k y_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix};$$

on dira que cette forme bilinéaire correspond au système de congruences donné.

On appelle *forme,* en Arithmétique, un polynome homogène de plusieurs indéterminées $x$, $y$, $z$, ..., à coefficients entiers. Si une telle forme F prend une certaine valeur $m$ pour certaines valeurs entières des indéterminées, on dit qu'elle *représente* le nombre $m$. Si l'on fait dans F une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers, on obtient une nouvelle forme F, et l'on dit que F *renferme* F'. Si le module de la substitution est égal à $\pm 1$, on dit que F et F' sont *équivalentes.* Lorsque deux formes sont équivalentes, il existe certains nombres $I_1, I_2, \ldots, I_k$, dépendant d'une façon déterminée des coefficients de l'une des formes F, et égaux aux nombres $I'_1, I'_2, \ldots, I'_k$ qui dépendent de la même façon des coefficients de l'autre forme F'. $I_1, I_2, \ldots, I_k$ forment un système complet d'*invariants* de la forme F.

Parmi les formes bilinéaires équivalentes à la forme

$$F = \sum\sum a_{i,k}x_k y_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

il y en a toujours une, qui affecte la forme

$$e_1 x_1 y_1 + e_2 x_2 y_2 + \ldots + e_p x_p y_p,$$

et que nous appellerons la forme *réduite;* $e_1, e_2, \ldots, e_p$ sont des entiers positifs. $e_{k-1}$ divise $e_k$, $p$ est tout au plus égal au plus petit des nombres $m$ et $n$.

Deux formes bilinéaires seront équivalentes si elles admettent la même réduite.

On appelle forme *normale* de la forme bilinéaire considérée une forme équi-

valente,

$$\delta_1 x_1 y_1 + \delta_2 x_2 y_2 + \ldots + \delta_p x_p y_p,$$

où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ sont des nombres positifs; $e_1, e_2, \ldots, e_p$ sont les nombres *réduits* de $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, le nombre $p$ s'appelle le *rang* de la forme bilinéaire ou de la matrice des $a_{i,k}$.

Considérons un déterminant quelconque de degré $k$ de la matrice des $a_{i,k}$; divisons ce déterminant par le plus grand commun diviseur de ses propres mineurs, soit $E_k$ le plus grand commun diviseur de tous les quotients que l'on obtient ainsi; on a

$$E_k = e_k.$$

Pour qu'une forme bilinéaire G soit *contenue* dans la forme F, il faut et il suffit que le rang de G ne surpasse pas celui de F, et que les invariants de G soient divisibles par ceux de F.

16. Considérons les systèmes de congruences linéaires

$$\text{(I)} \qquad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n \equiv u_i \pmod{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient $e_i$ et $\varepsilon_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) les invariants de la matrice du système et ceux de la matrice complétée. Supposons que $d_n$ (le déterminant $|a_{i,k}|$) ne soit pas nul.

Posons

$$c_i = (M, e_i), \qquad \gamma_i = (M, \varepsilon_i),$$
$$C = c_1 c_2 \ldots c_n, \qquad \Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n.$$

Pour que le système (I) admette des solutions, il faut et il suffit que l'on ait $C = \Gamma$ : il y a alors exactement C solutions.

D'ailleurs le théorème subsiste même si $d_n$ est nul. Si nous envisageons le système

$$a_{i,1} x_1 + \ldots + a_{i,m+n} x_{m+n} \equiv u_i \pmod{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des solutions est encore $C = \Gamma$; mais le nombre des solutions est $CM^m$.

Soit enfin le système

$$a_{i,1} x_1 + \ldots + a_{i,n} x_n \equiv u_i \pmod{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n + m),$$

on doit avoir

$$\varepsilon_{n+1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, M),$$

puis

$$C = \Gamma$$

et le nombre des solutions est C.

L'auteur termine par le théorème suivant :

« Envisageons les équations non homogènes

$$\text{(I)} \qquad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n + a_{i,n+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Soient $\| A \|$ et $\| A' \|$ la matrice du système et la matrice complétée. Pour que le système (I) admette une ou plusieurs solutions, il faut et il suffit que

le rang $p$ de $\|A\|$ soit égal au rang de $\|A'\|$, et que le plus grand commun diviseur des déterminants du degré $p$ soit le même pour les matrices $\|A\|$ et $\|A'\|$.

LE VAVASSEUR.

---

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, FUSIONNÉE AVEC L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE. COMPTES RENDUS DES SESSIONS [1].

16e session (Toulouse); 1887.

*Laisant* (*C.-A.*). — Notice historique sur les travaux des première et deuxième sections, de 1879 à 1886 inclusivement. (163).

Cette Notice a été imprimée en une brochure à part, et ne figure pas dans le deuxième Volume des *Comptes rendus*.

*Astor* (*A.*). — Lignes géodésiques des surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant, et dont le paramètre de distribution est constant. (163-164, 1*-12*).

M. Astor montre que ces surfaces, pour des valeurs données de l'angle et du paramètre, sont applicables les unes sur les autres, et applicables sur des surfaces de révolution. Il étudie en outre celles de ces surfaces dont la ligne de striction est plane, et celles dont le cône directeur est de révolution.

*Lemoine* (*E.*). — Questions diverses sur la nouvelle Géométrie du triangle. (164, 13*-42*).

Divers problèmes et théorèmes se rapportant, entre autres, aux points de Brocard et de Lemoine.

*Collignon* (*E.*). — Problème de Mécanique. (164, 42*-63*).

Mouvement d'un point animé de deux vitesses de grandeurs constantes, l'une

---

[1] Voir *Bulletin*, $\text{XVII}_2$, 197. *L'Association française* comprend un grand nombre de sections; nous n'analysons ici, comme précédemment, que les travaux des deux premières sections : *Mathématiques, Astronomie, Géodésie et Mécanique*. Rappelons que les comptes rendus de l'Association sont publiés chaque année en deux Volumes; premier Volume : *Documents officiels, Conférences, Procès-verbaux;* second Volume : *Notes et Mémoires*. Les renvois sans astérisques se rapportent à la pagination du premier Volume, et ceux qui sont accompagnés d'astérisques, à la pagination du second Volume.

normale au rayon vecteur joignant le mobile à un point fixe, l'autre parallèle à une direction fixe. Développements divers.

*Escary.* — Sur la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'une série convergente ordonnée suivant des polynomes dépendants des coordonnées elliptiques dans le plan. (165, 63*-74*).

Ces polynomes naissent du développement de l'inverse d'un radical analogue à celui qui conduit aux fonctions $Y_n$.

*Oltramare (G.).* — De l'intégration des équations linéaires à coefficients constants. (165, 75*-87*).

Application du calcul de généralisation. L'auteur montre en outre comment ce calcul peut servir à la détermination des fonctions inverses des intégrales définies.

*Vigarié (E.).* — Premier inventaire de la Géométrie du triangle. (165, 87*-112*).

Essai de coordination des résultats obtenus.

*Laisant (C.-A.).* — Sur les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. (165, 113*-114*).

Construction des directions asymptotiques par les équipollences.

*Tellier (Ch.).* — Nouveau moteur thermodynamique. (166, 114*-116*).

Il s'agit d'une machine à air qui présenterait une économie énorme et divers autres avantages.

*Pellet (A.).* — Sur les sphères tangentes à deux surfaces. (166, 116*-118*).

Étude des lignes formées par les points de contact sur l'une et l'autre surface.

*Le Pont (H.).* — Note de Géométrie. (166, 119*-122*).

Proposition sur trois groupes de trois plans, et théorème corrélatif.

*Barbarin (P.).* — Retrouver les éléments d'une surface de révolution dont on ne possède qu'un fragment. (166-167, 123*-126*).

Solution fondée sur l'emploi des cercles géodésiques tracés sur la surface.

*Barbarin* (*P.*). — Sur les racines de l'équation du troisième degré. (167, 126*-127*).

Détermination de trois coefficients $a$, $b$, $c$ tels que

$$x_2 = a + \frac{b}{c + x_1}, \qquad x_3 = a + \frac{b}{c + x_2}, \qquad x_1 = a + \frac{b}{c + x_3}.$$

*Haro.* — Note sur une nouvelle méthode de notation graphique des logarithmes. (167, 128*-132*).

Cercle logarithmique permettant de déterminer les logarithmes avec quatre décimales.

*Kluyver* (*J.-C.*). — Sur un système d'invariants communs à deux coniques. (167, 132*-141*).

Ce Mémoire se rapporte aux polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre.

*Collignon* (*E.*). — Sur une méthode approximative pour la trisection de l'angle, imaginée par M. E. Fortin. (167-168, 141*-164*).

La construction consiste à partager la corde en trois parties égales, à élever une perpendiculaire égale aux $\frac{7}{12}$ de la flèche et à joindre le centre au point obtenu. Extension à la division en $n$ parties égales.

*Stieltjes* (*T.-J.*). — Sur les maxima et minima d'une fonction étendue sur une surface fermée. (168).

Pour une surface fermée $2k+1$ fois connexe, $2-2k$ est la différence entre le nombre des maxima et minima et le nombre des cols.

*Sylvester.* — Sur les nombres dits de Hamilton. (168, 164*-168*).

Indication d'un calcul très facile permettant d'obtenir ces nombres.

*Tarry* (*G.*). — Essai sur la Géométrie des figures imaginaires. (168-169, 168*-188*).

Définitions et propriétés diverses du point imaginaire et de la droite imaginaire, à un point de vue purement géométrique.

*Schoute* (*P.-H.*). — Sur un complexe du troisième ordre. (169, 189*-197*).

Ce complexe est formé par les droites joignant les couples de points isogonaux par rapport aux faces d'un tétraèdre. Propriétés diverses.

*Berdellé* (*Ch.*). — Arithmétique des directions et rotations. (169-170, 197*-206*).

Étude des imaginaires fondée sur les logarithmes de direction. L'auteur ne considère pas $(a+ib)^{m+in}$ comme réductible à la forme $p+iq$.

*Berdellé* (*Ch.*). — La numération binaire et la numération octavale. (170, 206*-209*).

Remplacement des chiffres par des signes permettant de faire mécaniquement les calculs.

*Berdellé* (*Ch.*). — Boîte à multiplication. (170, 210*-211*).

Appareil construit sur les mêmes principes que les bâtons de Neper.

*Cayley* (*A.*). — Note sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques. (170, 211*-213*).

Cette très remarquable Note, consistant presque exclusivement en calculs, ne se prête à aucune analyse.

*Dormoy* (*E.*). — Théorie mathématique des jeux de Bourse. (170-171, 214*-215*).

Détermination de l'espérance mathématique de l'acheteur de prime.

*Janssen.* — L'oxygène et les atmosphères célestes. (171).

Recherches pouvant fournir des éléments à l'étude de la mécanique moléculaire et à celle des atmosphères.

*Rindi* (*S.*). — Sur les normales doubles des surfaces algébriques. (171, 216*-218*).

Nombre des normales doubles; application d'un théorème de M. Zeuthen.

*Laisant* (*C.-A.*). — Quelques applications arithmétiques de la Géométrie des quinconces. (171-172, 218*-235*).

Application de l'échiquier. Représentation figurative des fractions périodiques.

*Langlois* (*M.*). — Sur l'homogénéité de la formule fondamentale du mouvement atomique. (172, 235*-241*).

Démonstration nouvelle d'une formule antérieurement donnée par l'auteur.

*Pichon* (*A.*). — La roue universelle Pichon. (172, 242*-256*).

Description, théorie et applications d'un appareil mécanique inventé par l'auteur.

*Mantel.* — Nouvelle théorie des couples et de la composition des forces. (172-173, 257*-263*).

Cette théorie est fondée sur la notion du centre d'un système de forces dans un même plan, et sur l'emploi du Calcul des quaternions.

*Caminati (P.).* — Sur la valeur de l'inverse de $2\pi R$ exprimée par un nombre infini de facteurs. (173).

Calcul des périmètres des polygones réguliers de $2^n r$ côtés.

*Caminati (P.).* — Des nombres réciproques. (173).

Applications de formules connues à des calculs pratiques.

*Lucas (E.).* — Géométrie des réseaux. (173-174).

Sur certaines figures pouvant se tracer en $n$ traits.

*Schlegel.* — Sur un théorème de Géométrie à quatre dimensions. (174, 264*-266*).

Sur les solides à quatre dimensions analogues au prisme trilatéral et au tétraèdre.

*Schlegel.* — Sur les distances moyennes entre un point et des variétés de points discrètes ou continues. (174, 266*-281*).

Solution de problèmes à deux dimensions par la Géométrie à trois dimensions, et de problèmes à trois dimensions par la Géométrie à quatre dimensions.

*Laisant (C.-A.).* — Sur l'inversion d'un système de $n$ points; construction de deux points remarquables du triangle. (174, 282*-285*).

$n$ points sur un plan étant transformés par inversion par rapport à un pôle X, déterminer X de façon qu'il soit le barycentre des points transformés. Il y a $n-1$ solutions.

*Cosserat.* — Sur l'hyperbole de Kiepert. (175).

Génération nouvelle et propriétés de cette hyperbole.

*Desboves (A.).* — Théorème d'analyse indéterminée. (175).

On peut trouver par un seul système de formules la solution de l'équation

$aX^4 - bY^4 = 2Z^2$ lorsque $a$ et $b$ sont deux nombres premiers consécutifs de la forme $8n+7$, $8n+5$ ou $8n+5$, $8n+3$.

*Oltramare* (*G.*). — Mémoire sur les principes généraux du calcul de généralisation. (175, 285*-305*).

Notions fondamentales, avec quelques applications à l'intégration des équations.

17e session (Oran); 1888.

*Laisant* (*C.-A.*). — Propriétés des équations; conséquences géométriques. (149, 1*-4*).

Généralisation d'un théorème de M. Catalan.

*Collignon* (*E.*). — Examen de certaines séries numériques, et applications à la Géométrie. (149-150, 4*-24*).

$a$, $b$, $c$ étant donnés, on forme $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ et ainsi de suite. La généralisation des séries ainsi formées conduit à l'inscription des polygones réguliers par approximations graphiques successives.

*Le Pont* (*H.*). — Note d'Analyse. (150, 25*-29*).

Relations entre les éléments d'une surface et ceux d'une courbe tracée sur cette surface.

*Mittag-Leffler* (*G.*). — Sur les fonctions uniformes d'une ou plusieurs variables. (150).

Remarques sur une fonction de trois variables satisfaisant à une équation différentielle.

*Lucas* (*Ed.*). — Sur un théorème de Cauchy. (150, 29*-31*).

Sur la divisibilité de $(a+b)^n - a^n - b^n$ par $a^2 + ab + b^2$ et par

$$(a^2 + ab + b^2)^2.$$

*Tarry* (*G.*). — Nouvel essai sur la Géométrie imaginaire. (151, 31*-53*).

Continuation des études de l'auteur présentées au Congrès précédent. (*Voir* ci-dessus).

*Collignon* (*E.*). — Recherches sur la courbe d'ombre d'un piquet vertical. (151, 53*-72*).

Propriétés de la courbe d'ombre et développements divers de gnomonique.

*Laisant.* — Note sur la somme des $p$ premiers coefficients du développement $(x+y)^n$. (151, 72*-75*).

Méthode pour obtenir cette somme par la construction d'un échiquier arithmétique.

*Lemoine (E.).* — De la mesure de la simplicité dans les Sciences mathématiques. (152, 75*-95*).

Essai d'évaluation de la simplicité des propositions et des constructions, en Mathématiques, par la décomposition en éléments simples.

*Genty.* — Note de Géométrie vectorielle sur la théorie des surfaces. (153, 95*-99*).

Établissement d'une formule, et applications à diverses propriétés concernant la courbure des surfaces.

*Pelletreau.* — Problèmes de Géométrie. (153, 99*-109*).

Sur le problème de Malfatti et sur l'ellipsoïde tangent à trois plans rectangulaires.

*Berdellé (Ch.).* — Réponse à quelques objections contre l'Arithmétique directive. (153, 109*-112*).

Complément des communications présentées aux Congrès précédents sur le même sujet. (*Voir* plus haut).

*Laisant (C.-A.).* — Sur une propriété des tangentes aux coniques. (154, 113*-118*).

Sur deux tangentes issues d'un point et les deux rayons menés de ce point aux foyers.

*Sylvester.* — Sur certains cas du théorème de Dirichlet regardant les séries arithmétiques. (154, 118*-120*).

*De Commines de Marsilly (L.-J.-A.).* — Réfutation de l'interprétation de la Géométrie non euclidienne envoyée par M. Beltrami. (154, 121*-135*).

L'auteur s'attache à relever quelques inadvertances dans le Mémoire de M. Beltrami, publié en 1868; et la démonstration de l'impossibilité de démontrer le postulatum d'Euclide ne lui paraît pas rigoureusement établie.





*Neuberg* (*J.*). — Sur les triangles équibrocardiens. (154, 135*-144*).

Étude de la série de tous les triangles d'un plan ayant même angle de Brocard.

*Humbert* (*E.*). — Sur les équations du troisième degré qui servent à la recherche des plans principaux d'une surface du second ordre ou à l'étude de l'intersection de deux coniques. Discussion algébrique complète de ces équations. (155, 145*-159*).

La méthode de l'auteur repose sur deux théorèmes relatifs à la théorie des formes.

*Langlois* (*M.*). — Sur un point de la théorie du mouvement atomique. (155, 159*-162*).

Continuation des études de l'auteur sur la physique moléculaire; considérations inspirées par la Monadologie de Leibniz.

*Langlois* (*M.*). — Détermination des rayons moléculaires dans la théorie du mouvement atomique. (155).

Suite de l'étude présentée au Congrès précédent. (*Voir* plus haut.)

*Humbert*. — Démonstration simple et directe de cette propriété du catalecticant d'être un invariant. (155, 163*-164*).

Calcul ingénieux, montrant que le déterminant ainsi dénommé par M. Sylvester et relatif à une forme binaire ne change pas si l'on remplace $x$ par $x + \lambda y$.

*Lemoine* (*E.*). — Notes sur diverses questions de la Géométrie du triangle. (155-156, 165*-175*).

Suite des études présentées aux Congrès précédents; indication d'une cubique remarquable.

18e session (Paris); 1889.

*Collignon* (*E.*). — Observations au sujet de la rencontre de deux points mobiles dans un plan. (227, 1*-7*).

Définition du cercle dangereux; conditions du choc; condition de la non-rencontre.

*Collignon* (*E.*). — Note sur les courbes circulaires synchrones. (227-228, 7*-23*).

Exemples divers de mouvements qui admettent pour courbes synchrones des cercles.

*Joukovsky* (*N.*). — Un appareil nouveau pour la détermination des moments d'inertie des corps. (228, 23*-24*).

Le dispositif de l'auteur semble des plus ingénieux, et la théorie en est très simple.

*Perrin* (*R.*). — Sur les caractères de divisibilité. (228, 24*-38*).

Emploi d'une suite périodique indéfinie d'où l'on peut déduire simplement les caractères de divisibilité par un nombre quelconque.

*Berdellé* (*Ch.*). — Théorie des logarithmes fondée sur la multiplication des séries. (229, 38*-42*).

Emploi de tableaux analogues au triangle de Pascal.

*Gélion Towne*. — Présentation d'un ouvrage d'Astronomie pratique populaire. (229).

*Delannoy* (*H.*). — Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité. (229-230, 43*-52*).

Nombre des marches de tours ou de reines sur des échiquiers de diverses formes. Applications à quelques problèmes.

*Genty*. — Note de Géométrie vectorielle sur les surfaces isothermiques. (230, 53*-60*).

Applications à un théorème de Christoffel et à la théorie des surfaces minima.

*Tarry* (*G.*). — Géométrie générale. (230, 60*-87*).

M. Tarry, reprenant ses études précédentes sur le même sujet, présente ici les premiers éléments de la Géométrie générale sous une forme définitive.

*De Commines de Marsilly*. — Études sur le postulatum d'Euclide et sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire. (230-231, 88*-100*).

Discussion des opinions de Houël et de M. de Tilly sur ce sujet. Proposition d'adopter franchement de nouveaux axiomes, empruntés à la notion de mouvement.

*Schoute* (*P.-H.*). — Sur des quadruples équiharmoniques ou harmoniques. (231, 100*-117).

Propositions analogues d'un théorème de Clebsch. Applications.

*Rabut.* — Sur un certain point limite dans le pentagone convexe. (231).

*Lucas* (*Ed.*). — Sur le mode de croisement (*dextrorsum* et *sinistrorsum*) de deux lignes dans l'espace, étant données leurs équations. (231).

*Vigarié* (*E.*). — Calendrier lunaire perpétuel. (231, 141*-144*).

Une sorte de petit appareil, décrit par l'auteur, permet d'avoir l'âge de la Lune à une date quelconque.

*Vigarié* (*E.*). — Esquisse historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle. (232, 117*-141*).

Notice très étudiée, surtout au point de vue bibliographique.

*Catalan.* — Sur une formule relative aux fonctions circulaires. (232).

Expression de $\frac{\sin pq\theta \sin\theta}{\sin p\theta \sin q\theta}$ sous forme de somme.

*Oltramare* (*G.*). — Application du calcul de généralisation à la détermination des intégrales des équations linéaires aux différentielles partielles avec coefficients variables. (232, 145*-158*).

*Cailler.* — Note sur l'expression

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cdots + \cfrac{1}{2n-1}}}$$

(232, 158*-161*).

Extension d'une relation de Lambert.

*Stephanos* (*C.*). — Une propriété des substitutions linéaires. (232-233).

Propriété du déterminant d'une substitution.

*Pellet* (*A.*). — Sur les cercles ou sphères se coupant sous des angles donnés. (233, 161*-163*).

Propriétés reposant surtout sur la considération des centres et des axes radicaux.

*Pellet* (*A.*). — Sur la résolution trigonométrique de certaines équations. (233, 164*-165*).

Équations où les coefficients de trois termes consécutifs sont liés par une équation linéaire et homogène.

*Jaubert.* — Nouvelle division du ciel. (233).

*Marin* (*V.*). — Mémoire sur les mouvements des fluides parfaitement élastiques, libres dans un milieu indéfini du même fluide. (233-234).

Considérations sur l'élasticité et sur la conservation de l'énergie.

*Neuberg* (*J.*) et *Gob* (*A.*). — Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert (234, 166*-179*).

Nombreuses propriétés. Généralisation de propositions déjà connues.

*Neuberg* (*J.*) et *Gob* (*A.*). — Sur les foyers de Steiner d'un triangle. (234, 179*-195*).

Les auteurs appellent ainsi les foyers de l'ellipse de Steiner, qui touche en leurs milieux les côtés du triangle. Nombreuses propriétés nouvelles.

*Lemoine* (*E.*). — Contributions à la Géométrie du triangle. (234, 197*-222*).

Point de Tarry, triangles homologiques, coordonnées tripolaires, etc.

*Secretan* (*G.*). — Équatorial à deux lunettes de 108mm de diamètre. (235, 223*-225*).

Cet appareil semble présenter d'assez notables avantages; l'auteur présente aussi un bain de mercure perfectionné.

*Laisant* (*C.-A.*). — Intégration directe de l'expression

$$\cos^p x \sin^q x \, dx.$$

(235, 225*-227).

L'intégration s'effectue au moyen de simples multiplications algébriques.

*Lucas* (*Ed.*). — Sur la collection des machines à calculer du Conservatoire des Arts et Métiers. (235).

*Lemoine.* — Sur la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. (235).

*D'Ocagne* (*M.*). — Sur les trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée. (235, 228*-233*).

Construction et propriétés des centres de courbure des trajectoires.

*Gonnessiat*. — Sur quelques erreurs affectant les observations méridiennes. (236).

Résultats de recherches entreprises à l'observatoire de Lyon.

*Bierens de Haan*. — Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des œuvres de Christiaan Huygens. (236, 243*-237).

L'initiative de cette édition appartient à l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam. Analyse intéressante de la correspondance.

19e session (Limoges); 1890.

*Escary* (*J.*). — Sur le problème des trois corps. (143).

Le Mémoire n'a pas été inséré dans les *Comptes rendus* à cause de sa trop grande longueur. D'après l'auteur, les intégrations qu'exige ce problème fameux seraient ramenées par lui à des quadratures.

*Gob* (*A.*). — Sur quelques transformations de figures. (144, 1*-18*).

Propriétés concernant les triangles directement semblables construits sur les côtés d'un triangle donné.

*Neuberg* (*J.*). — Sur les figures symétriques successives. (144, 18*-23*).

Discussion complète de cette question : étant données $n$ droites dans un plan, trouver un polygone tel que ces droites soient les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés; et autres problèmes analogues.

*Laisant* (*C.-A.*). — Propriétés du triangle : orientation moyenne; points équisegmentaires. (144, 23*-29*).

Définition de l'orientation moyenne, qui n'est autre que celle de la droite de Jerabek. Les points équisegmentaires M sont tels que les droites AM, BM, CM coupent les côtés opposés en A', B', C' de telle sorte que $CA' = AB' = BC'$, ou $BA' = CB' = AC'$.

*Delannoy* (*H.*). — Problèmes divers concernant le jeu. (144-145, 29*-35*).

Limite de l'écart entre les gains et les pertes d'un joueur à chances égales; c'est $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}$. Nombre moyen des équilibres. Autres questions de probabilités.

*Delannoy* (*H.*). — Formules relatives aux coefficients du binôme. (145, 35*-37*).

Identités intéressantes et qui paraissent nouvelles. Expressions diverses de la somme des $q$ premiers coefficients du développement $(a+b)^m$.

*Collignon* (*E.*). — Examen d'un lieu géométrique. (145-146, 38*-49*).

Ce lieu, dont l'origine physique est empruntée à la statique des corps flottants, a pour équation polaire $r^2 = R^2 - \frac{1}{3} a^2 \tang^2\theta$. Emploi possible d'un appareil fondé sur cette étude, pour déterminer la densité d'un corps solide.

*Raffard.* — Sécheur de vapeur détendue. (146).

Indication d'un appareil permettant d'envoyer dans le cylindre d'un moteur de la vapeur sèche légèrement surchauffée.

*Fontaneau* (*E.*). — Sur l'équilibre d'élasticité des corps isotropes. (146, 49*-69*).

Intégration des équations aux dérivées partielles de l'élasticité lorsque la rotation élémentaire coïncide en direction avec l'une des dilatations principales.

*Laisant* (*C.-A.*). — Interpolation cinématique. (146-147, 70*-(73*).

Trouver le mouvement d'un mobile qui passe par des positions données à des instants donnés.

*Laisant* (*C.-A.*). — Sur deux genres remarquables de courbes planes. (147, 74*-78*).

Recherche d'une courbe qui soit à elle-même sa quatrième développée.

*Matrot* (*A.*). — Sur la décomposition d'un entier quelconque en une somme de carrés. (147, 79*-81*).

Démonstration très simple du théorème de Bachet : « Tout entier est décomposable en une somme de quatre carrés. »

*Matrot* (*A.*). — Sur les résidus quadratiques. (147, 82*-88*).

Représentation graphique de la loi de réciprocité; caractère quadratique de 2.

*Lucas* (*Ed.*). — Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité. (147).

Démonstration reposant sur les lois arithmétiques de la Géométrie du tissage.

*Parmentier* (Général). — Sur les carrés magiques. (147-148, 88*-99*).

Carrés magiques impairs; carrés magiques avec des nombres discontinus; carrés magiques logarithmiques.

*Lucas* (*Ed.*). — Sur les carrés magiques et leurs applications à l'Arithmétique. (148).

Application aux formules d'Euler et de Lagrange. Extension de l'indicateur $\varphi(n)$.

*Schoute*. — Sur l'arrangement des joueurs d'échecs à l'occasion d'un concours. (148).

Tableau de combinaisons deux à deux dû à M. Deelman.

*Collignon* (*E.*). — Problème de Mécanique. (148, 100*-111*).

Étude du mouvement que prend dans un liquide un corps de forme sphérique qu'on y laisse tomber.

*Lemoine* (*E.*). — Mesure de la simplicité des constructions. (148).

Principes et applications à quelques exemples.

*Lemoine* (*E.*). — Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la Géométrie du triangle. (148, 111*-146*).

Étude très complète des divers cas qui peuvent se présenter. On appelle *orthologiques* deux triangles ABC, A'B'C', tels que les perpendiculaires de A sur B'C', de B sur C'A', de C sur A'B' sont concourantes; cette propriété est réciproque.

*Longchamps* (*G. de*). — Intégration de l'équation de Brassinne au moyen des fonctions hyper-bernoulliennes. (149, 146*-152*).

Rappel de la théorie de ces fonctions, imaginées par l'auteur; application à une équation différentielle du deuxième ordre.

*Commines de Marsilly* (*de*). — Sur un paradoxe de Géométrie analytique. (149).

Sur l'intersection de deux droites parallèles à l'infini.

*Commines de Marsilly* (*de*). — Sur une exposition de la Géométrie euclidienne. (149).

Développement des idées contenues dans les précédents Mémoires de l'auteur. (*Voir* plus haut).

*Lucas* (*Ed.*). — Sur le criterium de Paoli. (149).

Nombre des solutions positives de l'équation indéterminée $ax + by = c$.

*Tarry* (*G.*). — Géométrie générale : la ligne droite. (150, 152*-185*).

Généralisation de toutes les propositions du premier livre de la Géométrie ordinaire.

*Berdellé* (*Ch.*). — De l'incommensurabilité des angles des triangles rectangles en nombres entiers. (150, 186*-191*).

Démonstration de cette proposition qu'un triangle rectangle en nombres entiers a ses trois angles incommensurables entre eux.

*Poche*. — Sur l'origine des forces de la nature; nouvelle théorie remplaçant celle de l'attraction. (150-151).

Considérations sur la force élastique de l'éther.

*Casalonga* (*D.-A.*). — Considérations élémentaires sur la chaleur. (151-152).

Critique du coefficient de Clausius et de la loi de Carnot.

*Schoute*. — Quelques problèmes sur les plans osculateurs. (152, 192*-200*).

Équation symbolique du plan osculateur de l'intersection de deux surfaces. Étude de divers problèmes.

*Pellet* (*A.-E.*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. (152-153, 203*-204*).

Intégration d'un système d'équations simultanées.

*Pellet* (*A.-E.*). — Rayons de courbure et de torsion d'une courbe tracée sur une surface. (152-153, 200*-202*).

Démonstration directe de théorèmes connus.

*Lecornu* (*L.*). — Problèmes de Mécanique infinitésimale. (153, 204*-213*).

Étude, au voisinage d'un point, des propriétés mécaniques d'un milieu continu, soumis à des forces également continues.

*Schoute*. — Sur une série doublement infinie de triangles. (153).

Triangles podaires des points du plan par rapport à une parabole donnée.

*Tarry* (*H.*). — Géométrie de situation : problème des $n$ reines sur l'échiquier. (153).

Solution complète pour $n = 11$; étude du cas $n = 12$.

*Pellet*. — Rectification approximative des arcs de courbe. (154).

Construction d'une droite qui ne diffère de l'arc que d'un infiniment petit du cinquième ordre.

*Garrigou-Lagrange* (*P.*). — Sur le choc et les actions au contact. (154).

Analyse de l'action des forces dans le choc.

*Barbarin*. — Propriétés de l'hyperbole déduites de la Géométrie descriptive. (154).

*Barbarin*. — Sur une équation du second ordre. (154).

*Sauvage*. — Sur la production du mouvement rectiligne au moyen de tiges articulées. (154).

A. L.

---

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by J.-W.-L. GLAISHER. London and Cambridge, Macmillan and C° (¹).

Tome XVII; 1887-1888.

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Sur la transformation et les développements des douze fonctions elliptiques et des quatre fonctions zéta. (1-18).

---

(¹) Voir *Bulletin*, $XII_2$, p. 127.

Formules qui donnent les transformations des fonctions elliptiques et des fonctions zêta, quand on change $q$ en $-q$, en $q^2$ ou en $\sqrt{q}$. Développements de ces fonctions suivant les puissances de $x$.

Tables des valeurs que prennent les fonctions elliptiques, quand on augmente l'argument de K, $i$K', K + $i$K' et des valeurs de ces fonctions pour certaines valeurs particulières de l'argument.

*Cayley.* — Système d'équations pour trois cercles qui se coupent mutuellement sous des angles donnés. (18-21).

Construction simple d'un triangle d'arcs de cercle dont on donne les sommets et les angles.

*Cayley.* — Note sur les coefficients de Legendre de seconde espèce. (21-23).

L'équation du second ordre

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

où $n$ est un nombre entier positif, admet pour intégrale, outre le polynôme de Legendre $P_n$, une seconde solution

$$y=\frac{1}{2}P_n\log\frac{x+1}{x-1}-Z_n,$$

$Z_n$ étant un polynôme de degré $n-1$ qui peut être défini comme la partie entière de $\frac{1}{2}P_n\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, quand on y remplace le logarithme par son développement suivant les puissances de $\frac{1}{x}\cdot$ L'auteur donne le Tableau des fonctions $P_n$ et $Z_n$ jusqu'à $n=10$.

*Larmor (J.).* — La transformation des intégrales multiples relatives à une surface en intégrales multiples relatives à des lignes. (23-30).

Application de la formule de Stokes à certaines intégrales que l'on rencontre en Physique mathématique.

*Jenkins (M.).* — Sur les principales équations de la Trigonométrie sphérique. (30-34).

L'auteur propose de prendre comme formules fondamentales

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c},\qquad \frac{\sin(A+B)}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1-\cos c},$$

et montre comment on peut en déduire les autres formules.

*Woolsey Johnson (W.).* — Sur la seconde solution de l'équation

différentielle de la série hypergéométrique, et sur les séries qui représentent K′, E′, ... dans la théorie des fonctions elliptiques. (35-50).

On sait que lorsque, dans l'équation de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

$\gamma$ est égal à un nombre entier positif, on n'a plus immédiatement qu'une intégrale dans le domaine du point $x = 0$. L'auteur montre comment on peut en trouver une seconde par un passage à la limite. Il applique sa méthode aux équations qui se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques et aussi à l'équation de Bessel, qui peut se déduire comme cas limite de l'équation étudiée par Gauss.

*Morley* (*F.*). — Sur les cubiques planes qui présentent des points d'inflexion aux points de rencontre avec les asymptotes. (51-57).

Lorsque la cubique a un point double, on obtient des relations géométriques très simples. Pour la cubique générale, l'enveloppe de la droite qui joint les points d'inflexion quand on se donne les trois asymptotes est une courbe du quatrième degré tangente aux trois asymptotes.

*Roberts* (*Samuel*). — Note sur certains théorèmes relatifs au cercle polaire d'un triangle et sur le théorème de Feuerbach relatif au cercle des neuf points. (57-60).

Démonstration directe de deux théorèmes sur les triangles inscrits ou circonscrits à une conique et conjugués par rapport à une autre conique, dans le cas particulier où ces deux coniques sont des cercles.

*Cayley*. — Sur le système de trois cercles qui ont leurs centres en ligne droite et qui se coupent sous des angles donnés. (60-69).

Retour sur le problème traité à la page 18. M. Cayley traite directement le cas où les centres sont en ligne droite, qui offre un intérêt particulier, à cause de ses rapports avec la théorie des groupes fuchsiens.

*Dawson* (*H.-G.*). — Note sur un théorème d'Algèbre supérieure. (69-72).

Il s'agit d'un théorème sur l'équivalence de certains opérateurs dans la théorie des formes binaires.

*Cayley*. — Sur les systèmes de rayons. (73-78).

Remarques sur les différentes façons de définir un système de rayons dépendant de deux paramètres.

*Buchheim* (*Arthur*). — Sur un théorème de Klein relatif aux matrices symétriques. (79).

Soient $a$ et $b$ deux matrices réelles symétriques; si la forme quadratique qui correspond à la matrice $b$, décomposée en carrés, a $q$ carrés d'un signe et $q+r$ carrés de l'autre signe, l'équation $|a - xb| = 0$ a au moins $r$ racines réelles.

*Brill* (*J.*). — Nouvelle méthode de représentation graphique des quantités complexes. (80-93).

L'idée essentielle de cet article consiste dans la représentation de la quantité complexe $u + iv$ par la droite qui a pour équation $ux + vy - 1 = 0$. On obtient ainsi quelques démonstrations intéressantes.

*Cayley*. — Note sur les deux relations entre les distances mutuelles de quatre points sur un cercle. (94-95).

Soient $c, b, h, g, a, -f$ les quatre côtés du quadrilatère et les deux diagonales. On a entre ces six quantités les deux relations

$$\Delta = af + bg + ch = 0, \qquad \nabla = abc + agh + bhf + cfg = 0.$$

Si l'on regarde $a, b, c, h, g, f$ comme les distances mutuelles de quatre points d'un plan, la relation entre ces six distances peut s'écrire

$$\Omega = \Delta[(a^2 + f^2)(-af + bg + ch) + \ldots] - \nabla^2 = 0,$$

les termes non écrits s'obtenant par permutation circulaire sur $(a, b, c)$, $(f, g, h)$.

*Cayley*. — Note sur le rapport anharmonique. (95-96).

Moyen simple d'effectuer le produit

$$(x - \theta)\left(x - \frac{1}{\theta}\right)(x + 1 + \theta)\left(x + \frac{1}{1 - \theta}\right)\left(x + \frac{\theta}{1 + \theta}\right)\left(x + \frac{1 + \theta}{\theta}\right),$$

qui se présente dans la théorie du rapport anharmonique.

*Tucker* (*R.*). — Les orthocentres d'un triangle et la cubique qui passe par ces points. (97-103).

*Morrice* (*G.-G.*). — Note sur la multiplication des nonions. (104-105).

*Chree* (*Charles*). — Les tourbillons dans un fluide compressible. (105-118).

*Allan Cunningham*. — Abaissement des équations différentielles. (118-145).

On sait que l'ordre d'une équation différentielle peut être abaissé lorsqu'elle ne contient pas l'une des variables ou qu'elle possède certaines homogénéités. S'il arrive qu'elle présente à la fois plusieurs de ces caractères, l'ordre peut être abaissé de plusieurs unités. L'auteur discute tous les cas possibles, et termine par l'application à l'équation différentielle des coniques.

*Rogers* (*L.-J.*). — Extension d'une certaine formule d'inégalité. (145-151).

Le point de départ de l'auteur est la formule suivante :

$$\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right)^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} > b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n},$$

qui se démontre d'une façon élémentaire et qui a lieu pour toutes les valeurs positives des lettres qui y figurent.

Par des transformations simples, on en déduit une foule d'autres formules, par exemple la suivante :

$$s_m^{r-t} s_t^{m-r} > s_r^{m-t}, \qquad \text{où} \qquad s_i = a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i, \qquad m > r > t.$$

On peut aussi obtenir des inégalités où entrent des intégrales définies. Par exemple, si dans la dernière relation on suppose que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient les valeurs successives $f(x_1), f(x_1 + h), \ldots, f(x_1 + nh)$, où $x_1 + nh = x_2$, d'une fonction continue $f(x)$, en faisant croître le nombre $n$ indéfiniment, on parvient à l'inégalité

$$\left(\int y^m dx\right)^{r-t} \left(\int y^t dx\right)^{m-r} > \left(\int y^r dx\right)^{m-t}.$$

*Mathews.* — La Géométrie sur une quadrique. (151-152).

L'auteur indique le parti que l'on peut tirer, pour l'étude de la Géométrie sur une quadrique, de la projection faite d'un ombilic comme point de vue sur un plan parallèle au plan tangent en cet ombilic. Les sections planes de la surface se projettent suivant des cercles.

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Expression de $\Theta(x)$ par une intégrale définie. (152-153).

L'intégrale définie présente une certaine analogie avec les intégrales de Fresnel.

*Forsyth* (*A.-R.*). — Invariants homographiques et quotients différentiels. (154-192).

Les invariants considérés dans ce travail sont moins généraux que ceux d'Halphen ; ils ne concernent que les transformations homographiques de la forme

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad y_1 = \frac{ey + f}{gy + h}.$$

M. Forsyth étudie successivement le cas où l'on ne change pas $x$, celui où l'on ne change pas $y$, et le cas général.

## Tome XVIII; 1888-1890.

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Sur les séries qui représentent les douze fonctions elliptiques et les quatre fonctions zéta. (1-83).

La notation $zsx$, .... La notation $d$, $d'$, $\delta$, $\delta'$. Les symboles $\sigma$, $\zeta$, $\zeta'$, .... Système de seize séries algébriques et leurs valeurs développées. Séries procédant suivant les puissances ascendantes de $q$ pour les seize fonctions elliptiques et les fonctions zéta. Séries de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+na)$. Les $q$ séries. Séries pour les fonctions elliptiques et les fonctions zêta, ordonnées suivant les puissances de $x$, les coefficients étant exprimés en fonction de $h$. Les cinq coefficients $\varphi_n$, $\psi_n$, $\chi_n$, $f_n$, $F_n$. Valeurs de $\varphi_n(a, b)$, $\psi_n(a, b)$, ..., pour

$$n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Valeurs des coefficients pour les arguments 0 et 1. Expressions approchées pour les fonctions elliptiques et les fonctions zêta suivant les puissances de $q$ et de $k$. Identités trigonométriques déduites des résultats obtenus. Séries procédant suivant les puissances de $q$ et de $e^{ix}$. Séries procédant suivant les puissances de $q'$ et de $e^x$. Séries de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\infty}^{+\infty} \frac{e^{ux}}{r\mu + si\pi}$. Séries de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + r\pi + si\mu}$. Systèmes d'identités. Développements suivant les puissances de $q$ et de $x$. Les fonctions $\sigma_t(n)$, $\zeta_t(n)$, .... Les fonctions $E_t(n)$ et $E'_t(n)$. Remarques sur les développements procédant suivant les puissances de $q$ et de $x$. Valeurs des seize séries doubles. Valeurs de $\sum^{\infty} \sigma_{2t-1}(n) q^{2n}$, .... — Tableau des résultats. Résultats obtenus en différentiant par rapport à $\mu$. Cas spécial où le module est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Sommes des inverses des puissances des nombres complexes. Analogie avec les sommes des inverses des puissances des nombres ordinaires. Formules donnant les puissances de $\omega$ en séries procédant suivant les puissances de $e^{-\pi}$. Identités déduites des formules précédentes. Séries pour les nombres de Bernoulli et d'Euler.

*Burnside* (*W.*). — Note sur le potentiel d'un cylindre elliptique. (85-88).

On obtient ordinairement le potentiel d'un cylindre elliptique comme cas limite du potentiel d'un ellipsoïde.

L'auteur montre comment on peut l'obtenir directement par un calcul assez simple, où l'on rencontre l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - 2x\cos\varphi + x^2)\, d\varphi.$$

*Johnston* (*J.-P.*). — Les lignes de courbure d'une surface parallèle à une quadrique. (88-89).

Ces lignes sont situées sur des quadriques ayant les mêmes plans de symétrie que la première.

*Cayley*. — Note sur l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$. (90).

*Wace* (*F.-C.*). — Note sur les inégalités. (90-94).

Démonstrations simples de quelques inégalités bien connues, telles que

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

*Lloyd Tanner* (*H.-W.*). — Une représentation graphique des théorèmes de Sturm et Fourier. (95-99).

*Cayley*. — Note sur la relation entre les distances de cinq points dans l'espace. (100-102).

L'auteur identifie la relation qu'il a donnée, en 1841, dans le *Cambridge Mathematical Journal*, t. II, p. 267-271, avec la relation obtenue par Lagrange (*Œuvres*, t. III, p. 677).

*Buchheim* (*Arthur*). — Note sur les matrices en involution. (102-104).

*Cayley*. — Sur le théorème d'Hermite relatif au produit de fonctions H. (104-107).

Il s'agit de l'expression donnée par M. Hermite, dans les Notes de la sixième édition du *Calcul différentiel et intégral* de Lacroix, pour le produit

$$\frac{\mathrm{H}(x-\alpha_1)\ldots\mathrm{H}(x-\alpha_n)}{\Theta^n(x)}, \quad \text{où} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

*Holmes* (*R.*). — Sur les équations du mouvement d'une onde sonore dans un fluide compressible qui est rendu hétérogène par une force accélératrice constante dans une direction donnée. (108-113).

*Sylvester* (*J.-J.*). — Note sur certaines équations aux différences qui ne possèdent qu'une intégrale. (113-122).

*Allan Cunningham*. — Abaissement des équations différentielles. (122-127).

Addition au Mémoire publié sous le même titre dans le volume précédent. L'auteur indique trois nouvelles méthodes pour intégrer l'équation différentielle des coniques.

*Cayley.* — Une correspondance entre des cartésiennes homofocales et les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde. (128-130).

Soient $\rho$, $\sigma$, $\tau$ les distances d'un point quelconque à trois points en ligne droite A, B, C. La relation entre ces trois distances représente un hyperboloïde à une nappe, si l'on y regarde $\rho$, $\sigma$, $\tau$ comme des coordonnées rectilignes. Les génératrices de cet hyperboloïde correspondent aux cartésiennes ayant pour foyers les trois points A, B, C.

*Mc Aulay (Alex.).* — Démonstration des propriétés fondamentales des quaternions. (130-136).

*Forsyth (A.-R.).* — Note sur l'intégration d'une équation différentielle homogène. (136-139).

Étant donnée l'équation homogène

$$(1) \qquad \frac{dy}{V(y, x)} = \frac{dx}{U(y, x)} = dt,$$

où U et V sont deux polynômes homogènes d'ordre $n$, en $x$, $y$, soit $\theta$ une racine de l'équation

$$(2) \qquad V(\theta, 1) = \theta\, U(\theta, 1);$$

on déduit de l'équation (1) la nouvelle équation

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}(y - \theta x) = (y - \theta x)\, W(y, x, \theta),$$

W étant un polynôme homogène d'ordre $n-1$, dont les coefficients dépendent de $\theta$. Si $\theta_1$, $\theta_2$, ..., $\theta_{n+1}$ sont les $n+1$ racines, supposées distinctes de l'équation (2), on forme ainsi $n+1$ équations analogues à l'équation (3) dont on déduit une combinaison intégrable

$$\sum_{r=1}^{n+1} p_r \frac{d}{dt}[\log(y - \theta_r x)] = 0,$$

$p_1$, ..., $p_{n+1}$ étant des constantes telles que l'on ait identiquement

$$p_1 W_1 + p_2 W_2 + \ldots + p_{n+1} W_{n+1} = 0.$$

La discussion des équations qui déterminent les $p_r$ offre une application intéressante de la méthode d'élimination de Bézout.

*Mc Aulay (Alex.).* — La transformation des intégrales multiples de surfaces en intégrales multiples de lignes. (139-145).

Remarques sur un article de M. Larmor sur le même sujet, paru dans le volume précédent. Discussion de la généralité des conclusions de M. Larmor.

*Dawson* (*H.-G.*). — Un théorème d'Algèbre (145-148).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les $n$ racines d'une forme binaire d'ordre $n$, U, $\Delta = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$ un opérateur quelconque. On a, d'une manière générale,

$$\frac{1}{U}\Delta^m U = m!\sum\left[\frac{(p-\alpha_1 q)\ldots(p-\alpha_m q)}{(x-\alpha_1 y)\ldots(x-\alpha_m y)}\right].$$

*Cayley*. — Formules relatives à une octade de points. (149-152).

Si deux tétraèdres sont conjugués par rapport à une même quadrique, les huit sommets forment une octade, c'est-à-dire que toute quadrique qui passe par 7 de ces points passe par le huitième.

*Rogers* (*L.-J.*). — Note sur les annihilateurs conjugués des expressions différentielles homogènes et isobariques. (153-158).

*Brill* (*J.*). — Sur un certain théorème de minimum. (158-167).

Discussion d'un théorème de Clebsch sur le minimum d'une certaine intégrale double, qui se présente en Hydrodynamique.

*Kleiber* (*Joseph*). — Sur quelques équations différentielles auxquelles satisfont les quantités K, E, ... de la théorie des fonctions elliptiques. (167-184).

Équations différentielles où l'on prend pour variable indépendante l'angle modulaire θ, défini par la relation $k = \sin\theta$. Tableau de formules contenant les quantités K, E, et les quantités analogues, ainsi que leurs rapports.

*Calliphronas* (*G.-C.*). — Sur le mouvement d'un liquide dans un secteur sphérique animé d'un mouvement de rotation. (185-191).

*Day* (*Henry-George*). — Note sur le théorème de Taylor. (191-192).

*Wilkinson* (*M.-M.-U.*). — Quelques formules sur les fonctions elliptiques. (192).

Tome XIX; 1889-1890.

*Sylvester* (*J.-J.*). — Démonstration nouvelle de la possibilité de ramener une forme quadratique à la forme canonique (c'est-

à-dire à une fonction linéaire de carrés) par une substitution réelle orthogonale. (1-5).

La méthode proposée par l'illustre géomètre est indépendante de la théorie de l'équation en $s$, et offre une application intéressante des substitutions infinitésimales.

Par exemple, si l'on effectue une substitution orthogonale infinitésimale

$$\delta x = \varepsilon y, \qquad \delta y = -\varepsilon x,$$

dans la forme $ax^2 + 2hxy + by^2$, on a

$$\delta h = (a-b)\varepsilon$$

ou

$$\delta(h^2) = 2(a-b)h\varepsilon.$$

Si l'on imagine qu'on effectue successivement une infinité de pareilles transformations, on peut choisir le signe de $\varepsilon$ de façon que $\delta(h^2)$ soit toujours négatif. On finira donc par arriver à une forme pour laquelle $h = 0$, à moins de rencontrer une forme où $b = a$. Dans l'un et l'autre cas, le théorème est immédiat.

La proposition s'établit pour $n = 3, 4$ par des considérations analogues, et la méthode s'étend d'ailleurs au cas général.

*Elliott* (*E.-B.*). — Note sur l'équation différentielle des coniques. (5-7).

L'auteur remarque que $y''^{-\frac{11}{3}}$, $y''^{-\frac{13}{3}}$ sont deux multiplicateurs pour l'équation différentielle des coniques. Chacun d'eux conduit à l'intégrale générale par une suite d'intégrations qui n'offrent aucune difficulté.

*Elliott* (*E.-B.*). — Sur les expressions différentielles qui ne changent pas de forme après la transformation $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x'}$. (7-14).

Si l'on pose $x = e^u$, $y = ve^{\frac{1}{2}u}$, la transformation considérée devient $u = -u'$, $v = v'$. Cette remarque permet de parvenir simplement aux expressions générales demandées.

*Leudesdorf* (*C.*). — Sur les réciproques de quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (14-18).

Il s'agit des théorèmes de M. Casey, extensions du théorème de Ptolémée, établissant une relation entre les longueurs des tangentes communes à quatre cercles tangents à un cinquième. L'auteur montre que la relation obtenue exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre cercles soient tangents à un cinquième.

*Stuart* (*G.-H.*). — Sur la formule de Stirling et quelques autres formules d'interpolation (19-29).

*Cayley.* — Note sur les sommes de deux séries. (29-31).

Les deux séries considérées sont les suivantes :

$$S = \frac{1}{1+e^{\pi\alpha}} + \frac{1}{3(1+e^{3\pi\alpha})} + \frac{1}{5(1+e^{5\pi\alpha})} + \ldots,$$

$$S_1 = \frac{1}{2+\pi\alpha} + \frac{1}{3(2+3\pi\alpha)} + \frac{1}{5(2+5\pi\alpha)} + \ldots,$$

où $\alpha$ est réel, positif et très petit. On a

$$S_1 = \frac{1}{4}(C + 2\log 2 - \log\pi) - \frac{1}{4}\log\alpha, \qquad S_2 = -\frac{1}{4}\log\alpha,$$

C étant la constante d'Euler. On voit que, lorsque $\alpha$ tend vers zéro, la différence $S_1 - S_2$ ne tend pas vers zéro, quoique les deux séries deviennent égales terme à terme (elles sont d'ailleurs divergentes pour $\alpha = 0$). Ceci s'explique en remarquant que, pour $\alpha$ très petit, la série S converge plus rapidement qu'une progression géométrique de raison $e^{-\pi\alpha}$, tandis que la convergence de la série $S_1$ est comparable à celle de la série $\sum \frac{1}{x^2}$.

*Karl Pearson.* — Note sur l'énergie dans un solide élastique. (31-41).

*Sylvester.* — Sur la réduction d'une forme bilinéaire d'ordre $n$ à une somme de $n$ produits par une double substitution orthogonale. (42-46).

L'auteur étend aux formes bilinéaires la méthode qu'il a déjà donnée pour les formes quadratiques. Afin de donner une idée du mode de démonstration, considérons la forme

$$axu + \alpha xv + \beta yu + byv,$$

et les deux substitutions orthogonales infinitésimales

$$\delta x = \varepsilon y, \quad \delta y = -\varepsilon x; \quad \delta u = \lambda v, \quad \delta v = -\lambda u.$$

On a

$$\delta\alpha = a\lambda - b\varepsilon, \quad \delta\beta = a\varepsilon - b\lambda,$$

$$\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta = (a\alpha - b\beta)\lambda + (a\beta - b\alpha)\varepsilon.$$

On peut toujours choisir $\lambda$ et $\varepsilon$ de façon que $\alpha^2 + \beta^2$ aille en décroissant, sauf si l'on a : 1° $a = 0$, $b = 0$; 2° $\alpha = \beta = 0$; 3° $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \pm 1$, et dans chacun de ces cas la forme est ramenée immédiatement à la forme canonique. En appliquant une infinité de transformations infinitésimales on arrivera donc à une forme pour laquelle $\alpha = \beta = 0$, à moins de rencontrer auparavant un des cas précédents.

*Greenhill (A.-G.).* — La trajectoire parabolique. (47-56).

Étude élémentaire des propriétés de la parabole.

*Brill* (*J.*). — Solution d'un cas spécial du problème de la corrélation entre deux figures planes. (57-62).

Cas particulier du problème de Christoffel. Il s'agit d'appliquer conformément la portion du plan extérieure à un polygone convexe sur une portion de plan limitée par un segment de l'axe des $x$ et deux parallèles indéfinies à l'axe des $y$.

*Sylvester.* — Sur un théorème d'Arithmétique relatif aux fractions continues périodiques. (63-67).

*Isuruta Kenji.* — Sur une extension d'un problème de Pappus. (67-68).

L'énoncé du problème est le suivant : étant données deux lignes droites et un point, mener par ce point une ligne droite de longueur donnée s'appuyant sur les deux droites données. La solution est obtenue par l'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole.

*Michell* (*J.-H.*). — Les petites déformations des courbes et des surfaces, avec application aux vibrations d'une hélice et d'un anneau circulaire. (68-82).

*Michell* (*J.-H.*). — Sur l'application de la méthode de Neumann pour trouver le mouvement d'un solide de révolution dans un liquide, et autres problèmes semblables. (83-86).

*Michell* (*J.-H.*). — Vibrations d'un fil étendu sur une surface. (87-88).

*Fiske* (*Thomas-S.*). — Note sur l'Algèbre supérieure moderne. (89-91).

Toute fonction entière et rationnelle de $n^2$ arguments, qui possède la même loi de multiplication qu'un déterminant, est une puissance d'un déterminant. On en conclut qu'un concomitant d'un système de formes est nécessairement multiplié par une puissance du module de la transformation quand on effectue sur les variables une substitution linéaire.

*Baker* (*H.-F.*). — Les séries de Gordan. (91-96).

*Burnside* (*W.*). — Notes de Mathématiques. (96-98).

L'une de ces Notes est relative à une interprétation géométrique de la condition d'intégrabilité de l'expression $l\,dx + m\,dy + n\,dz$. L'autre concerne la propagation de l'énergie dans un champ électro-magnétique.

*Burnside* (*W.*). — Les lignes de longueur nulle d'une surface prises pour coordonnées curvilignes. (99-104).

Formules bien connues de la théorie des surfaces.

*Burnside* (*W.*). — Sur la composition de deux déplacements finis d'un corps solide. (104-108).

Construction géométrique simple du déplacement hélicoïdal résultant de deux mouvements hélicoïdaux connus. Remarques sur le déplacement d'un corps solide dans un espace non euclidien.

*Dawson* (*H.-G.*). — Note sur l'intersection d'une ligne droite avec une courbe de degré impair. (108-113).

Soient $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ les coordonnées de trois points en ligne droite sur la cubique $x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz = 0$. On a entre ces coordonnées deux relations indépendantes de $m$,

$$x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = 0,$$
$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2) = 0.$$

L'auteur donne un énoncé géométrique qui permet l'extension immédiate, par des formules symboliques, à une courbe quelconque de degré impair.

*Cayley*. — Sur les focales d'une quadrique. (113-117).

Détermination des focales d'une quadrique comme lignes doubles de la développable circonscrite, à la quadrique et au cercle de l'infini. Les calculs sont poussés jusqu'au bout.

*Lloyd Tanner* (*H.-W.*). — Solution du problème

$$(a, b, \ldots, c) = (a^p, b^p, \ldots, c^p).$$

(118-128).

Dans le tome XV du *Messenger*, M. Cayley s'était proposé de trouver quatre quantités identiques à leurs carrés pris dans un certain ordre. L'auteur de cet article, généralisant le problème se propose de déterminer $n$ quantités $a$, $b$, $c$, $\ldots$, $l$, identiques à leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$ prises dans un certain ordre. La discussion n'est au fond qu'une application immédiate de la théorie des racines primitives de l'équation binôme $x^N = 1$.

*Karl Pearson*. — Note sur le théorème des trois moments de Clapeyron. (129-135).

*Cayley*. — Sur les carrés latins. (135-137).

Euler appelle ainsi des carrés de $n^2$ cases, chaque case renfermant une des $n$ lettres $a, b, c, \ldots, l$ de telle façon que la même lettre ne figure pas deux fois dans une même ligne ni dans une même colonne. M. Cayley montre comment on peut former ces carrés, et trouver leur nombre.

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Note sur des séries dont les coefficients contiennent des puissances des nombres de Bernoulli. (138-146).

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Développements de K, I, E, G suivant les puissances de $k'^2 - k^2$. (146-150).

*Brill* (*J.*). — Solution d'un cas spécial du problème de la corrélation entre deux figures planes (second Mémoire). (151-155).

Dans ce nouvel article, l'auteur se propose d'appliquer conformément sur un rectangle la portion de plan comprise entre deux polygones convexes rectilignes. La formule qu'il obtient dépend des fonctions H elliptiques.

*Childe* (*G.-F.*). — Sur une relation directe entre les intégrales définies elliptiques de première et de seconde espèce. (155-164).

Des formules connues

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

on déduit, par un calcul facile, en posant $F = (1 + m) E$,

$$e \frac{dm}{de} - m^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

L'auteur montre comment on peut intégrer cette équation par approximations successives.

*Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Sur les développements de $\frac{G}{K}, \frac{K}{G}, \frac{L}{E}, \cdots,$ suivant les puissances de $k^2$. (164-174).

*Cayley*. — Note sur les lignes réciproques. (174-175).

L'auteur appelle ainsi les lignes droites que nous appelons conjuguées par rapport à une quadrique. Si l'on prend un point sur chacune de ces droites, la droite qui les joint rencontre la quadrique en deux points qui sont conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers. L'article contient une démonstration géométrique très élégante de ce théorème, en supposant que la quadrique est une surface à génératrices réelles.

*Franklin* (*F.*). — Démonstration du théorème de réciprocité pour les résidus quadratiques. (176-177).

La démonstration proposée paraît réellement très simple.

*Mannheim* (*A.*). — Note de Géométrie à propos d'un théorème de M. Stewart. (178-180).

L'auteur montre qu'un théorème de M. Stewart peut se déduire au moyen d'une transformation par polaires réciproques, d'un théorème bien connu qui donne l'expression du rapport des diagonales d'un quadrilatère convexe inscrit dans une circonférence.

*Michell* (*J.-H.*). — Sur la stabilité d'un fil courbé et tordu. (181-184).

*Cayley*. — Sur l'équation $x^{17} - 1 = 0$. (184-188).

Valeurs approchées des périodes.

*Motoda* (*T.*). — Démonstration, au moyen des quaternions, de théorèmes relatifs aux lignes asymptotiques. (188-189).

*Hugh W. Segar*. — Quelques inégalités. (189-192).

Si $a > b > c$, on a

$$a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n > a^n b^m + b^n c^m + c^n a^m,$$

si $m > n$, et des inégalités analogues.

---

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, edited by N.-M. Ferrers, A. Cayley, J.-W.-L. Glaisher, A.-R. Forsyth ([1]).

Tome XXIII; 1889.

*Cockle* (sir *James*). — Sur les solutions synthétiques et les changements de forme. (1-7).

Il s'agit des équations linéaires que l'on peut écrire sous forme symbolique

$$u = \frac{1}{P_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{P_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{P_i}\frac{du}{dx},$$

et des différentes formes que l'on peut donner à une même équation. L'auteur renvoie à chaque instant à des travaux antérieurs, ce qui rend son article difficile à lire.

---

([1]) Voir *Bulletin*, XII, p. 148.

*Walton* (*William*). — Sur la coïncidence des rayons lumineux dans un cristal biaxe, correspondant à certains plans conjugués de polarisation. (7-10).

Les directions des rayons lumineux ne peuvent coïncider que si les plans conjugués sont parallèles aux plans principaux du cristal ou perpendiculaires à l'axe optique.

*Chree* (*C.*). — Applications d'une nouvelle solution des équations d'un corps solide isotrope élastique, en particulier à des cas variés de corps solides en rotation. (11-33).

*Routh* (*E.-J.*). — Sur un théorème de dynamique de Jacobi. (33-45).

Le théorème en question est relatif au mouvement d'un corps solide pesant de révolution, fixé par un point de son axe. L'auteur donne une représentation un peu différente de celle qui a été adoptée par M. Darboux et Halphen.

*Forsyth* (*A.-R.*). — Sur la théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. (45-78).

L'application de la théorie des formes à l'étude des équations différentielles linéaires a été poursuivie dans deux voies différentes, d'une part par Fuchs, Klein, etc., d'autre part par Brioschi. M. Forsyth donne dans ce travail quelques exemples de la méthode de Brioschi, qui est surtout algébrique. Partant pour cela d'une équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Iy,$$

il examine successivement les cas où l'on connait, en fonction de $z$, une forme quadratique des deux intégrales $y_1$, $y_2$, une forme cubique, une forme biquadratique, une forme d'ordre $n$ telle que $a_0 y_1^n + a_1 y_2^n$, et enfin une forme du cinquième ordre.

*Whitehead* (*A.-N.*). — Sur le mouvement des fluides visqueux incompressibles. (78-93).

*Larmor* (*J.*). — Images électro-magnétiques et autres, planes et sphériques. (94-101).

*Forsyth* (*A.-R.*). — Systèmes de formes ternaires simultanées réduites, équivalentes à une forme ternaire donnée, qui contiennent plusieurs séries de variables. (102-138).

Tableau des formes réduites jusqu'au sixième degré.

*Mac Mahon* (*P.-A.*). — L'éliminant de deux formes binaires. (139-143).

Formes nouvelles de l'éliminant. L'une d'elles, où ne figurent que les sommes des puissances semblables des racines des équations, est particulièrement intéressante.

*Whitehead* (*A.-N.*). — Seconde approximation pour le mouvement d'un fluide visqueux. (143-152).

*Love* (*A.-E.-H.*). — Sur le mouvement d'un cylindre elliptique liquide soumis à sa propre attraction. (153-158).

*Love* (*A.-E.-H.*). — Les oscillations d'une masse liquide pesante, ayant la forme d'un cylindre elliptique, qui tourne comme un système rigide autour de son axe. (158-165).

*Cayley*. — Les recherches de Wallis sur l'expression de $\pi$. (165-169).

Explication en langage moderne de la méthode suivie par Wallis. Elle repose en définitive sur la considération des intégrales de la forme

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx.$$

*Richmond* (*Herbert W.*). — Un système symétrique d'équations pour les lignes droites d'une surface cubique qui a un point conique. (170-179).

L'équation d'une surface cubique qui a un point conique étant mise sous la forme $\alpha\beta\gamma = \delta\varepsilon\zeta$, où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ sont six fonctions linéaires des coordonnées liées par les relations

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon + \zeta, \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + f\zeta = 0,$$

$a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ étant six constantes telles que l'on ait

$$abc + def = 0, \qquad a + b + c + d + e + f = 0;$$

les lignes droites dont il s'agit sont les neuf lignes droites telles que

$$(\alpha = 0, \ \delta = 0),$$

et les six lignes droites telles que

$$(a\alpha + d\delta = 0, \ b\beta + e\varepsilon = 0, \ c\gamma + f\zeta = 0).$$

L'auteur étudie les configurations que l'on peut former avec ces quinze droites, et qui présentent une certaine analogie avec les configurations déduites du

théorème de Pascal. Ainsi elles sont situées trois par trois dans quinze plans tri-tangents. Les intersections de ces quinze plans, autres que les lignes précédentes, forment un système de soixante droites K, que l'auteur appelle *lignes de Pascal*. Les intersections de ces lignes trois à trois sont des points Steiner ou des points Kirkman, etc.

*Jeffery* (*H.-M.*). — Sur les cercles tangents à trois des quatre cercles qui sont tangents aux trois côtés d'un triangle. (180-197).

Il y a dix-sept cercles de cette espèce, non compris les trois côtés du triangle. L'auteur donne les équations de ces dix-sept cercles.

*Jeffery* (*H.-M.*). — Sur les cercles sphériques tangents à trois des huit petits cercles qui sont tangents aux trois côtés d'un triangle sphérique. (198-222).

Équations de ces soixante-quatre cercles.

*Sheppard* (*W.-F.*). — Sur quelques développements d'une fonction d'une seule variable au moyen des fonctions de Bessel. (223-260).

*Berry* (*Arthur*). — Les réciproquants simultanés. (260-316).

Soient $(x, y)$, $(x', y')$ deux couples de variables. L'auteur appelle *réciproquant simultané* toute fonction de $x, y, x', y', \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \ldots,$ qui se reproduit, multipliée par un facteur ne dépendant que de la substitution, quand on effectue une même substitution linéaire sur les deux couples de variables.

Il considère successivement les réciproquants *orthogonaux*, correspondant à une substitution orthogonale, les réciproquants *purs*, correspondant à une substitution linéaire entière, et enfin les réciproquants *projectifs*, correspondant à la substitution linéaire générale. Les notations employées sont celles de Sylvester. Chaque théorie est accompagnée d'applications géométriques.

*Chree* (*C.*). — Sur les vibrations longitudinales. (317-342).

*Dixon* (*A.-C.*). — Sur les cubiques gauches qui remplissent certaines conditions. (343-357).

Recherche des cubiques passant par cinq points et tangentes ou osculatrices à un plan. Il n'existe pas en général de cubique tangente à quatre droites données. La condition pour qu'il en existe une est mise sous une forme élégante.

*Jeffery* (*H.-M.*). — Sur le problème des contacts généralisé. (358-371).

Le problème classique du cercle tangent à trois cercles donnés a été généralisé ainsi par Cayley. Étant données trois coniques doublement tangentes à une conique C, trouver une autre conique doublement tangente à C et tangente aux trois premières. Des solutions élégantes ont été données par Cayley lui-même et Casey. M. Jeffery remarque que, si la conique C est indécomposable, le problème se ramène par une transformation simple à celui-ci : Trouver sur une sphère un cercle tangent à trois cercles donnés. Si la conique C se décompose, le problème se ramène au problème classique.

*Jessop* (*C.-M.*). — Une propriété des quartiques bicirculaires. (371-375).

Propriété relative aux angles sous lesquels se coupent deux cercles doublement tangents à la quartique, appartenant à des familles différentes.

*Cayley*. — Un théorème sur les arbres. (376-378).

Nombre d'arbres que l'on peut former avec $n+1$ nœuds donnés.

*Herman* (*R.-A.*). — Équations des lignes de courant dues au mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide parfait et dans un fluide visqueux. (378-384).

---

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXIV, 1892 ([1]).

*Poincaré*. — Sur un mode anormal de propagation des ondes. (16-18).

M. Poincaré signale une solution particulière de l'équation du mouvement ondulatoire, solution qui correspond à des circonstances remarquables qui peuvent devenir sensibles quand la longueur d'onde n'est pas trop petite.

L'équation d'un mouvement ondulatoire qui se propage avec la vitesse V est

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\xi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right),$$

si $\xi$ ne dépend que de $z$, de $t$ et de $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. XVII$_2$, p. 76.

Cette équation admet l'intégrale

$$\xi = AJ_0(h\rho)\cos 2\pi\left(\frac{z}{l} - \frac{t}{T}\right),$$

où les constantes $h$ et $l$ satisfont à la relation

$$\frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{l^2},$$

dans laquelle on a posé $VT = \lambda$.

On voit que la longueur d'onde *apparente* $l$ sera plus grande que la longueur d'onde *normale* $\lambda$; la différence sera d'autant plus grande que $h$ sera plus grand, c'est-à-dire que le pinceau de rayons sera plus délié, mais elle restera toujours très petite.

La forme de l'expression de $\xi$ pourrait induire à penser que la vitesse de propagation est égale à $\frac{l}{T}$ et, par conséquent, plus grande que la vitesse normale. C'est le contraire qui est vrai.

M. Poincaré montre que la perturbation se propage avec la vitesse

$$\frac{V^2T}{l} = \frac{V\lambda}{l},$$

moindre que la vitesse normale.

## *Resal*. — Sur la résistance et les faibles déformations des ressorts en hélice. (37-41).

## *Markoff*. — Sur la série hypergéométrique. (54-55).

Le nombre $N_1$ des racines positives de l'équation algébrique

$$x^n - \frac{n.2\alpha.2\beta}{2n(n-\frac{1}{2})}x^{n-1} + \frac{n(n-1).2\alpha(2\alpha-1).2\beta(2\beta-1)}{1.2.2n(2n-1)(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}x^{n-2} - \ldots = 0,$$

où la somme $\alpha + \beta$ est égale à l'entier négatif $-n$, est égal au plus petit des nombres 0, 1, 2, 3, ..., qu'il faut ajouter au plus grand des nombres $2\alpha$ et $2\beta$ pour avoir un nombre positif. Toutes ces racines sont plus petites que l'unité.

Le nombre $N_2$ des racines négatives de la même équation est égal à

$$\frac{1-(-1)^{N_1+n}}{2}.$$

## *Kœnigs*. — Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques. (55-57).

Si $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées homogènes d'un point du plan et $u$, $v$ les paramètres des deux familles de courbes d'un réseau tracé dans ce plan, on peut définir les coefficients $a$, $b$, $c$ de l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta = 0$$

par la condition que $x$, $y$, $z$ en soient trois solutions. D'après une termino

logie déjà employée par M. Kœnigs (*Comptes rendus*, 28 déc. 1891), les invariants de (E) seront les invariants du réseau : ces invariants sont égaux lorsque

$$\frac{da}{du} = \frac{db}{dv}.$$

Si l'on mène les tangentes MP, MQ au point de croisement M des courbes A($v$ = const.) et B($u$ = const.), lorsque M décrit B, MP enveloppe une courbe $B_1$, et touche cette courbe en un point dont les coordonnées sont

$$\frac{dx}{du} + bx, \quad \frac{dy}{du} + by, \quad \frac{dz}{du} + bz;$$

ces courbes $B_1$ fournissent donc une interprétation géométrique de la transformation de Laplace. De même les courbes $A_1$ enveloppes des tangentes MQ fournissent une interprétation de l'autre transformation de Laplace

$$\theta' = \frac{d\theta}{dv} + a\theta.$$

Or, pour que les invariants de l'équation (E) soient égaux, il faut et il suffit qu'il existe une conique $\Omega$ ayant un contact du second ordre avec la courbe $A_1$ au point Q et avec la courbe $B_1$ au point P.

En combinant ce théorème avec une proposition due à M. Sophus Lie, M. Kœnigs parvient au résultat suivant, qui pourrait d'ailleurs être obtenu directement :

Les perspectives des asymptotiques d'une surface sur un plan forment un réseau à invariants égaux. Et, réciproquement, tout réseau plan à invariants égaux est la perspective des asymptotiques d'une surface, qui, lorsque le réseau est connu, s'obtient par quadratures.

En transformant cet énoncé par la méthode des polaires réciproques, on retrouve, comme cas particulier, le théorème qui a servi de point de départ à MM. Lelieuvre et Guichard dans leurs recherches sur les asymptotiques.

## *Jamet.* — Sur les séries à termes positifs. (57-60).

M. Jamet signale un cas étendu de convergence d'une série à termes positifs $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ tels que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers l'unité.

D'abord si l'on pose

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \alpha_n,$$

le produit $n\alpha_n$ devra croître au delà de toute limite.

Cela posé, s'il existe un nombre $p$, compris entre 0 et 1, tel que le produit $n^{1-p}\alpha_n$ tende vers une limite, la série sera convergente toutes les fois que cette limite ne sera pas nulle.

On conclut encore de là la règle suivante :

La série à termes positifs $u_1, u_2, u_3, \ldots$ est convergente, s'il existe un nombre positif $p$ tel que l'expression $u_n^{\frac{1}{n^p}}$ tende vers une limite inférieure à 1. Elle est divergente s'il existe un nombre positif $p$ tel que cette expression tende vers une limite plus grande que 1.

*Resal.* — Nouvelle Note sur la résistance et les faibles déformations des ressorts en hélice. (99-102).

*Painlevé.* — Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre possédant un nombre limité de valeurs. (107-109).

Étant donnée une équation du premier ordre

$$(1) \qquad y' = \frac{A_q y^q + \ldots + A_0}{B_r y^r + \ldots + B_0},$$

où les coefficients A, B dépendent algébriquement de $x$, si l'intégrale générale ne prend qu'un nombre limité $n$ de valeurs autour des points critiques mobiles, on peut donner à l'équation la forme

$$(2) \qquad \frac{F(y, |x|)}{G(y, |x|)} = C,$$

F et G étant du degré $n$ en $y$, et C désignant une constante arbitraire.

En général, C ayant une valeur arbitraire, si le point $x$ parcourt le plan sans tourner autour des points critiques fixes, les $n$ valeurs de $y$ se permutent toutes entre elles. Parmi les valeurs particulières de C pour lesquelles il n'en est pas ainsi, il faut distinguer les valeurs *remarquables* pour lesquelles plusieurs déterminations de $y$ se confondent quel que soit $x$.

Or M. Painlevé montre que, si l'intégrale est transcendante, il ne peut exister plus de deux valeurs remarquables de C.

Dès lors, on peut toujours reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) est une fonction *transcendante* qui ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles, et l'équation se ramène alors par des calculs algébriques à une équation de Riccati. Il n'y a qu'un cas exceptionnel, et dans ce cas l'équation proposée s'intègre par une quadrature.

Ce théorème subsiste si les coefficients de (1) sont des fonctions transcendantes de $x$ s'exprimant algébriquement au moyen d'une même fonction.

La recherche des intégrales algébriques est plus compliquée que celle des solutions transcendantes. L'auteur développe à ce sujet une méthode qui réussit dans des cas très étendus, mais qui échoue nécessairement dans le cas où l'intégrale algébrique est de genre plus grand que zéro et admet plus de deux valeurs remarquables.

Les résultats obtenus s'étendent à une équation algébrique quelconque en $y'$, $y$ et $x$. On peut toujours reconnaître si l'intégrale est une fonction transcendante qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, ou bien l'on intègre l'équation par une quadrature.

*Stanievitch.* — Sur un théorème arithmétique de M. Poincaré. (109-112).

L'auteur, s'appuyant sur une formule due à M. Mertens, indique une démonstration simple des théorèmes de M. Poincaré (*Comptes rendus*, 14 décembre 1891) sur la distribution des nombres premiers de la forme $4n+1$.

Il établit ensuite des résultats analogues concernant la distribution des nombres premiers de la forme $4n - 3$ et plus généralement de la forme $kn + l$, $k$ étant premier avec $l$. Ainsi :

Le nombre des nombres premiers de la forme $kn + l$ inférieurs à $x$ est une infinité de fois plus petit que $\frac{ax}{\varphi(k)\log x}$, si $a > 1$, et une infinité de fois plus grand que $\frac{ax}{\varphi(k)\log x}$, si $a < 1$.

La somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $kn + l$ inférieurs à $x$ est une infinité de fois plus petite que $\frac{ax}{\varphi(k)}$, si $a > 1$, et une infinité de fois plus grande que $\frac{ax}{\varphi(k)}$, si $a < 1$.

*Resal*. — Sur les propriétés de la loxodromie d'un cône de révolution et leur application au ressort conique. (147-152).

*Fabry*. — Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante. (158-161).

On ne connaissait jusqu'ici aucune courbe algébrique réelle à torsion constante. M. Fabry en fait connaître une : c'est la courbe engendrée par un point d'une ellipse dont le plan tourne autour d'un axe $Oz$, d'un mouvement uniforme, pendant que le point décrit l'ellipse de façon que le rayon vecteur qui passe par le centre décrive dans son plan des aires proportionnelles au temps.

*Phragmén*. — Sur une extension du théorème de Sturm.

L'auteur donne, pour déterminer le nombre des racines réelles d'un système d'équations algébriques à l'intérieur d'un domaine donné, une méthode élémentaire inspirée d'ailleurs par les idées de M. Hermite sur le même sujet.

Mais, en appliquant au cas très particulier considéré par M. Phragmén la formule générale de M. Picard qui donne le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, on trouve, comme l'a montré M. Picard, le résultat que M. Phragmén établit directement.

*Lie* (*S*.). — Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel. (277-280).

L'auteur s'est proposé et a résolu ce problème :

Trouver toutes les surfaces courbes qui peuvent être engendrées de quatre manières différentes par la translation de certaines courbes.

Au point de vue analytique, la question revient à déterminer huit fonctions A, B, C, D, de telle manière que les trois équations

$$A_k(t_1) + B_k(t_2) + C_k(t_3) + D_k(t_4) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

donnent entre les arguments $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ deux relations seulement, chacune d'elles contenant au moins trois arguments.

On obtient toutes les solutions du problème en prenant une équation

$F(x, \beta) = 0$ du quatrième ordre irréductible ou réductible, formant ensuite les expressions

$$\int^{x} \frac{x\,dx}{F'_\beta} = \varphi_1(x), \qquad \int^{x} \frac{\beta\,dx}{F'_\beta} = \varphi_2(x), \qquad \int^{x} \frac{dx}{F'_\beta} = \varphi_3(x),$$

et posant

$$A_k(x) = B_k(x) = C_k(x) = D_k(x) = \varphi_k(x).$$

M. Lie énonce un théorème analogue dans le cas de $n$ dimensions

Les $p$ équations fonctionnelles

$$A_{k1}(t_1) + \ldots + A_{k,p-1}(t_{p-1}) = A_{kp}(t_p) + \ldots + A_{k,2p-2}(t_{2p-2})$$
$$(k = 1, \ldots, p),$$

quand on assujettit les arguments $t_1, \ldots, t_{2p-2}$ à être liés seulement par $p-1$ équations dont chacune contienne au moins $p$ arguments, sont vérifiées de la manière la plus générale par des expressions de la forme

$$A_{ki}(t) = \varphi_k(t),$$

$\varphi(x), \ldots, \varphi_p(x)$ désignant $p$ intégrales abéliennes de première espèce et de genre $p$. Il existe des solutions spéciales qui toutes sont des intégrales abéliennes de genre plus petit que $p$.

## *Painlevé.* — Sur les intégrales des équations du premier ordre qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs. (280-283).

M. Painlevé établit un important résultat concernant les équations du premier ordre dont le premier membre est un polynome irréductible en $y$ et $y'$ et une fonction algébrique de $x$ :

On peut toujours reconnaître si l'intégrale d'une telle équation est une fonction transcendante qui ne prend qu'un nombre fini (non donné) de valeurs autour des points critiques mobiles (et l'on ramène alors l'équation à une équation de Riccati), ou bien on l'intègre par des quadratures. Ces quadratures portent, suivant les cas, sur des différentielles ordinaires ou sur des différentielles totales. La méthode de M. Painlevé s'étend aux équations dont les coefficients dépendent algébriquement d'une même fonction transcendante de $x$.

Il resterait à traiter le cas où l'intégrale est algébrique. L'auteur développe une méthode qui, si elle ne donne pas une solution générale du problème, fournit dans tous les cas d'importants renseignements sur la forme possible des intégrales et permet dans des cas très étendus de reconnaître si l'équation s'intègre algébriquement ou de l'intégrer par quadratures.

Quoi qu'il en soit, on sait maintenant, grâce aux recherches de M. Painlevé, ramener algébriquement aux transcendantes définies par les quadratures ou par l'équation de Riccati les transcendantes n'admettant dans le plan qu'un nombre fini de déterminations, qui intègrent une équation du premier ordre.

## *Appell.* — Extension des équations de Lagrange au cas du frottement de glissement. (331-333).





Lorsque certains points d'un système glissent avec frottement sur des surfaces, on peut employer la méthode de Lagrange, à condition d'ajouter aux forces données les forces de frottement dont les intensités, proportionnelles aux réactions normales, sont par le fait inconnues; ces grandeurs inconnues, il faut ensuite les éliminer. M. Appell modifie la méthode de Lagrange de manière à obtenir des équations du mouvement ne contenant ni les forces de liaison ni les forces de frottement.

*Lie* (S.). — Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. (334-337).

De sa théorie des groupes continus, M. Lie tire des résultats d'une grande généralité; entre autres le suivant :

Étant données $m+1$ équations de la forme

$$V_k = A_{k,1}(t_1) + \ldots + A_{k,m}(t_m) \qquad (k = 1, \ldots, m+1),$$

pour que la relation obtenue par l'élimination des paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ soit algébrique en $V_1, \ldots, V_{m+1}$, il faut et il suffit que deux quelconques des quantités $A_{ki}$, $A_{ji}$ soient liées elles-mêmes par une relation algébrique.

Ceci suppose que les déterminants de l'ordre le plus élevé de la matrice $\left| \frac{\partial A_{ki}}{\partial t_i} \right|$ ne soient liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants. S'il n'en est pas ainsi, on réduit immédiatement le système proposé à un système plus simple :

$$V'_k = B_{k,1}(s_1) + \ldots + B_{k,m-q}(s_{m-q}) \qquad (k = 1, \ldots, m-q+1),$$

où figurent $m-q+1$ quantités, $V'_k$ fonctions linéaires homogènes linéaires et à coefficients constants des $V_k$. Pour que ce système soit algébrique, il faut et il suffit que deux quelconques des quantités $B_{ki}$, $B_{ji}$ soient liées par une relation algébrique.

Ce théorème est susceptible de généralisations remarquables. Par exemple, M. Lie prend un groupe continu et transitif dont les transformations sont algébriques et permutables

$$(1) \qquad \Phi_k(y_1, \ldots, y_p) = \Phi_k(x_1, \ldots, x_p) + t_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

En désignant par $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ des intégrales totales de différentielles algébriques choisies de manière que les équations (1) déterminent un groupe *algébrique*, on peut toujours reconnaître si $p+1$ équations

$$\Phi_k(y_1, \ldots, y_p) = A_{k,1}(t_1) + \ldots + A_{k,p}(t_p) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p+1)$$

déterminent une relation algébrique entre $y_1, \ldots, y_p$.

*Phragmén.* — Sur la distribution des nombres premiers. (337-340).

L'auteur énonce une proposition très générale d'où l'on peut déduire comme cas très particuliers les théorèmes de M. Poincaré sur la distribution des nombres premiers de la forme $4n+1$. Voici cette proposition :

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle $x$ et $\sigma$ une constante positive; on suppose que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1}\, dx$$

soit convergente pour les valeurs de $s$ dont la partie réelle est supérieure à l'unité et qu'elle soit égale dans le voisinage de $s = 1$ à une série procédant suivant les puissances positives de $s - 1$, convergente dans un cercle de rayon plus grand que $\sigma (\sigma \leqq 1)$; si $x_0$ et $\delta$ sont deux quantités positives arbitraires, aucune des deux inégalités

$$\varphi(x) > \delta x^{1-\sigma}, \qquad \varphi(x) < -\delta x^{1-\sigma}$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de $x$ supérieures à $x_0$.

Toutes les questions de valeurs asymptotiques de fonctions numériques dépendent de ce théorème.

*Resal.* — Sur une interprétation géométrique de l'expression de l'angle de deux normales infiniment voisines d'une surface et sur son usage dans les théories du roulement des surfaces et des engrenages sans frottement. (381-385).

Soient $Ox$, $Oy$ deux axes rectangulaires tracés dans le plan tangent au point O d'une surface (S); $m$ étant un point de (S) infiniment voisin de O, $n$ la projection de $m$ sur $xOy$ et I le point de rencontre de $On$ et de l'intersection AB du plan tangent en $m$ avec $xOy$.

Comme l'angle $m$IA est égal à l'angle $n$IA = OIB, OI et I$m$ sont deux éléments consécutifs de l'hélice tracée sur le cylindre dont $Oy$, AB et leur parallèle en $m$ sont (par choix de l'axe $Oy$) trois génératrices consécutives, qui coupent ces génératrices sous l'angle $90° - i$ ($i$ étant l'inclinaison de $On$ sur $Ox$). Il résulte de là que ces éléments sont aussi ceux de la section normale de (S) faite suivant OI.

*Poincaré.* — Sur la théorie de l'élasticité. (385-387).

Soit un prisme rectangle dont les quatre faces latérales sont libres et dont les bases sont soumises à des forces quelconques. M. Poincaré cherche comment varie le rapport des deux rayons de courbure que prend une des quatre faces libres après sa déformation.

Dans le cas particulier $(N_2 = T_3 = N_1 = 0)$ traité par de Saint-Venant, M. Poincaré trouve que ce rapport est constant et égal à

$$\frac{-\lambda}{2\lambda + 2\mu}.$$

Pour la solution la plus générale du problème, le rapport en question conserve encore cette même valeur non plus sur toute la face libre, mais seulement tout le long de l'arête latérale.

*Autonne.* — Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (407-409).

Lorsqu'on cherche les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre, la seule difficulté consiste à trouver un maximum pour le degré de l'intégrale.

Dans le langage géométrique dont M. Autonne fait usage, la question s'énonce ainsi : Trouver un maximum pour le degré $n$ d'une intégrante algébrique indécomposable G, située sur une surface algébrique donnée $\mathfrak{F}$ de degré N.

M. Autonne résout ce problème dans l'hypothèse où G est dépourvue de points multiples. Supposant que sur la surface $\mathfrak{F}$ les $N(N^2-2N+2)$ points *nodaux* soient distincts, il établit le théorème suivant :

Le degré $n$ de l'intégrante algébrique G ne peut dépasser le plus grand entier contenu dans

$$\frac{(N-1)(N-3)}{3}-\frac{2}{N-2}.$$

Il est à remarquer que ce maximum dépend uniquement du degré de la surface et non des exposants afférents aux divers nodaux.

## *De Fontviolant.* — Sur les déformations élastiques maximum des arcs métalliques. (410).

Dans un arc quelconque d'une section constante ou variable, sollicité par des charges quelconques, les points de la fibre moyenne dont les déplacements élastiques sont maximum ou minimum appartiennent à des sections dont les déplacements angulaires sont nuls.

Si le déplacement du point considéré a lieu au-dessus de la tangente, ces conditions sont renversées.

## *Tisserand.* — Sur une équation différentielle relative au calcul des perturbations. (441-444).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x(q^2+2q_1\cos 2t)=0,$$

considérée pour la première fois par Lagrange et qui a été l'objet de travaux importants de M. Gyldén et de M. Lindstedt.

La forme de l'intégrale la plus commode pour les applications est, suivant M. Tisserand,

$$x=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} n_i\cos[(h+2i)t+c],$$

où $c$ et $n_0$ sont les deux constantes arbitraires. Les rapports $\frac{n_i}{n_0}$ sont des fonctions connues de $q$ et $q_1$ et la constante $h$ est déterminée aussi au moyen de $q$ et $q_1$.

Il importe de savoir si $h$ est réel ou imaginaire; car, dans le premier cas, l'orbite déterminée par l'équation différentielle est stable; dans le second, elle est instable.

M. Tisserand trouve que, $q_1$ étant suffisamment petit, $h$ est imaginaire pour $q = \pm 1$ et $q = \pm 2$, réel pour toutes les autres valeurs entières de $q$.

## *Lie* (*S.*). — Sur les fondements de la Géométrie. (461-462).

L'auteur fait ressortir quelques imperfections dont sont entachées les remarquables recherches de l'illustre Helmholtz sur les fondements de la Géométrie.

Helmholtz cherche à déterminer tous les groupes continus aux variables $x$, $y$, $z$, pour lesquels deux points ont un invariant et un seul. Il suppose de plus que le mouvement est possible quand un ou deux points d'un corps sont fixes. Enfin il admet qu'un corps tournant autour de deux points fixes puisse reprendre sa position première sans que le mouvement change de sens.

Un tel groupe G contient, d'après la théorie de M. Lie, six transformations infinitésimales qu'on peut supposer développables suivant les puissances de $x$, $y$, $z$. Les transformations *linéaires* infinitésimales qu'on obtient en supprimant les termes d'ordre supérieur au premier forment aussi un groupe Γ.

1° Or il est inexact que deux points aient toujours, comme l'admet Helmholtz, le même nombre d'invariants par rapport aux groupes G et Γ.

2° Il n'est pas vrai que, si le groupe G comporte la possibilité du mouvement, il en soit nécessairement de même pour le groupe linéaire de Γ.

3° Enfin Helmholtz se trompe en affirmant que son principe de monodromie est vérifié en même temps pour un groupe G et pour le groupe correspondant Γ.

## *De Saint-Germain* et *Lecornu*. — Sur l'impossibilité de certains mouvements. (526-527).

Lorsqu'on envisage au seul point de vue géométrique les liaisons auxquelles sont assujettis certains mécanismes, il semble qu'ils peuvent prendre certains mouvements, auxquels en réalité les lois du frottement s'opposent d'une manière absolue.

Les auteurs citent un problème très simple de Mécanique rationnelle qui, si l'on fait abstraction des résistances passives, conduit à des impossibilités et à des contradictions.

Aux extrémités A, B et au milieu M d'une tige rigide et sans masse sont fixés trois points d'égale masse assujettis à rester sur la surface polie d'un cône; la tige coïncidera toujours avec une génératrice du cône; on lui imprime un mouvement connu, et il s'agit de trouver le mouvement qu'elle va prendre sous l'influence des seules forces qui représentent les réactions du cône sur les points A, B, M.

## *De Sparre*. — Sur le mouvement du pendule conique à tige. (528-530).

Halphen a montré que la projection horizontale de la courbe décrite par le pendule conique peut présenter des points d'inflexion et que ces points correspondent à ceux pour lesquels la pression du mobile sur la sphère est nulle.

M. de Sparre montre que cette propriété est un cas particulier de la suivante :

Un point mobile sur une surface étant soumis à une force de direction constante : 1° la projection de la trajectoire sur un plan normal à la force aura

des points d'inflexion correspondant à une pression nulle sur la surface; 2° cette courbe en aura également si, la pression n'étant pas nulle, le plan osculateur de la trajectoire est normal à la surface et contient la force.

*Bertrand.* — Note sur un théorème du Calcul des probabilités. (701-703).

*Boussinesq.* — Sur le calcul théorique approché du débit d'un orifice en mince paroi. (704-710).

*Kœnigs.* — Sur les réseaux plans à invariants égaux. (728-729).

M. Kœnigs indique divers modes très généraux de génération de réseaux plans à invariants égaux.

1° Les réseaux isothermes plans fournissent une première famille de pareils réseaux.

2° La perpective d'un réseau conjugué à invariants égaux tracé sur une surface est un réseau plan à invariants égaux.

3° Soit

$$2\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}+\beta\theta=0$$

l'équation de Laplace relative à un réseau plan à invariants égaux. Si l'on effectue la transformation de Laplace

$$\theta'=\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\theta,$$

on sait que $\theta'$ vérifie une nouvelle équation à invariants égaux. On peut ainsi, par la transformation de Laplace, déduire d'un réseau plan à invariants égaux une double suite (généralement illimitée) de pareils réseaux.

*Guichard.* — Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan. (729-731).

Voici le moyen indiqué par M. Guichard pour construire ces congruences H' :

On prend une surface quelconque S; on en projette un point M sur un plan fixe P; on fait tourner cette projection $m$ de 90° autour d'un point fixe de P. Par le point ainsi obtenu on mène une droite D parallèle à la normale en M. Quand M décrit S, D décrit une congruence H'.

Les plans focaux de H' sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de S.

Si S est une surface minima, H' est une congruence de normales. On retrouve ainsi les surfaces de M. Bonnet où la somme des rayons de courbure principaux est double de la normale.

Si S est une surface à courbure totale constante, les développables de H' touchent les surfaces focales suivant leurs lignes de courbure.

Si S est une surface réglée, l'une des surfaces focales de H' est une développable. Aux génératrices de cette développable correspondent, sur la seconde surface focale, des paraboles.

## *Riquier.* — De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. (731-733).

M. Bourlet a fait voir que tout système différentiel est réductible à un certain type linéaire, ***complètement intégrable ou non.***

En possession d'une formule beaucoup plus générale que celle de M. Bourlet, M. Riquier effectue la réduction d'un système quelconque à un système ***complètement intégrable,*** d'ordre égal ou supérieur à 1 et présentant, avec certaines particularités, la forme entière par rapport aux dérivées des fonctions inconnues : les particularités dont il s'agit sont de nature telle que, lorsque le système est du premier ordre, il est en même temps linéaire.

## *Picard.* — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (805-807).

M. Picard a posé le problème général suivant, qui est la généralisation du problème qui se présente dans la théorie des variables complexes :

Trouver un système de $m$ équations ($m \geqq n$) contenant uniquement les dérivées partielles du premier ordre de $n$ fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dépendant de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \frac{\partial P_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et telles que si l'on considère un second système (arbitraire) de solutions $Q_1$, $Q_2, \ldots, Q_n$, les fonctions P considérées comme fonctions des Q satisfassent aux mêmes équations

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial Q_n}, \frac{\partial P_2}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial Q_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

M. Picard a montré comment la solution complète de ce problème est donnée par la théorie des groupes de M. Lie.

Actuellement, il élargit le problème en supposant d'une manière plus générale que les dérivées partielles d'ordre quelconque figurent dans les équations : il fait voir que la formation des équations peut être déduite des mêmes principes.

Revenant au cas où les équations ne contiennent que les dérivées partielles du premier ordre, il traite à fond le cas où le nombre $n$ des variables est 2 ou 3.

Pour $n = 2$, on n'a (comme systèmes *distincts*), en dehors du système de la théorie des fonctions d'une variable complexe, que le seul système

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y}\right)^k,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y}\right)^k,$$

où $k$ et $\lambda$ sont des constantes, et qui conduit (par l'élimination de Q) à l'équation immédiatement intégrable

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 P}{\partial x \, \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Les systèmes, beaucoup plus nombreux, correspondant à $n = 3$, n'offrent rien d'intéressant.

*Boussinesq.* — Débit des orifices circulaires et sa répartition entre leurs divers éléments superficiels. (807-812).

*Boussinesq.* — Écoulement par les orifices rectangulaires sans contraction latérale; calcul théorique de leur débit et de sa répartition. (868-873).

*Painlevé.* — Sur les transformations en Mécanique. (901-904).

Soient $T(q'_1, \ldots, q'_k, q_1, \ldots, q_k)$ et $T_1(q'_1, \ldots, q'_k, q_1, \ldots, q_k)$ deux formes quadratiques des variables $q'_1$, dont les discriminants $\Delta$ et $\Delta_1$ sont différents de zéro; et soient $Q_i$, $Q'_i$ des fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_k$. On forme les équations de Lagrange

$$\left.\begin{aligned} &(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = Q_i, \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt} \\ &(2) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{dT_1}{dq_i} = Q'_i, \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt_1} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

M. Painlevé se pose la question suivante :

Étant donné un système d'équations (1), former tous les systèmes (2) tels que les relations entre les $q_i$ définies par (1) et par (2) coïncident.

Voici comment il la résout :

D'abord, si tous les $Q_i$ sont nuls (et dans ce cas les $Q'_i$ le sont aussi) on peut passer du système (1) au système (2) par la transformation

$$(4) \qquad \frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}} = C\,\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}}.$$

Quand T et $T_1$ satisfont à cette condition, à des fonctions $Q_i$ quelconques correspondent des fonctions $Q'_i$ telles que les systèmes (1) et (2) définissent les mêmes relations entre les $q_i$ et l'on passe encore de (1) à (2) par les transformations (4).

Dans le cas général (si on laisse de côté deux transformations qui s'appliquent quelle que soit la forme de T) il ne saurait exister d'équations (2) répondant à la question que si le problème des géodésiques relatives à T admet une intégrale du second degré.

*Jablonski.* — Sur l'analyse combinatoire circulaire. (904-907).

Des objets combinés, arrangés ou permutés, peuvent être supposés soit en ligne droite, soit en cercle; le but de M. Jablonski est d'évaluer les nombres de permutations et d'arrangements circulaires complets. Des combinaisons il n'y a rien de nouveau à dire : elles sont les mêmes dans les deux analyses.

*Boussinesq.* — Calcul de la diminution qu'éprouve la pression moyenne sur un plan horizontal fixe à l'intérieur du liquide

pesant remplissant un bassin et que viennent agiter des mouments quelconques de houle ou de clapotis. (937-940).

Si $p_0$ est la pression statique en un point du plan horizontal, $p$ la pression au temps $t$, $w$ la composante verticale de la vitesse, $\sigma$ l'aire du bassin, $\tau$ la durée d'une période, $\rho$ la densité du liquide, $g$ la gravité, on a, par l'application du théorème des quantités de mouvement,

$$-\frac{1}{g}\int_0^\tau \frac{dt}{\tau}\int_\sigma w^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_0^\tau \frac{dt}{\tau}\int_\sigma \frac{p-p_0}{\rho g}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

c'est-à-dire

$$\text{Valeur moyenne de } \frac{p_0-p}{\rho g} = \text{Valeur moyenne de } \frac{w^2}{g}.$$

*Tresse.* — Sur les invariants différentiels d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace. (948-950).

M. Lie a montré qu'à tout groupe de transformations correspondent certaines séries d'invariants différentiels définis comme solutions de certains systèmes complets. Les invariants d'une même suite se déduisent par différentiation d'un nombre limité d'entre eux dont la recherche présente un grand intérêt.

M. Tresse donne une méthode pour calculer les invariants du groupe fini $G_6$ des transformations conformes de l'espace, ainsi que ceux du groupe $G_{16}$ qui sont fonctions des précédents. Cette méthode offre un exemple de l'application des formes réduites au calcul des invariants.

Voici, dans cet ordre d'idées, deux propositions qui s'appliquent aussi bien aux groupes infinis qu'aux groupes finis :

1° Si une équation ou un système d'équations admet, relativement à un groupe de transformations, une forme canonique déterminée d'une manière unique, les coefficients de cette forme canonique sont des invariants du groupe;

2° S'il y a une forme réduite et un sous-groupe de transformations qui n'en altère pas les caractères, les invariants des coefficients de cette forme réduite par rapport aux transformations de ce sous-groupe sont des invariants du groupe général.

*Liouville (R.).* — Sur un problème d'Analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique. (974-977).

Lorsqu'un système matériel est soumis à l'action de forces dérivant d'un potentiel, si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les variations dont sa position dépend à chaque instant, les équations qui déterminent les trajectoires des divers points peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \qquad dx_i\, d^2x_k - dx_k\, d^2x_i = \sum_{h,h'} (p^{(k)}_{h,h'}\, dx_i - p^{(i)}_{h,h'}\, dx_k)\, dx_h\, dx_{h'},$$

mais un exemple d'équation du type (1) ne définit pas toujours les trajectoires des points d'un système.

Si l'on assujettit les coefficients $p'_{h,h}$, $p_{h,h}$, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aux conditions

$$\sum_{(h)} p_{i,h} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les $\frac{m(m+1)(m+2)}{2}$ équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_{ii}}{\partial x_i} - 2\sum_{p} p_{h,i} f_{i} = 0, \quad \dfrac{\partial f_{ik}}{\partial x_i} = \sum_{(h)} (p^{k}_{p,i} f_{i,p} + p_{h,i} f_{h,k}), \\ \dfrac{\partial f_{ii}}{\partial x_k} - 2\dfrac{\partial f_{i,k}}{\partial x_i} - 2\sum_{(h)} (p_{i,h} f_{i,h} - p^{i}_{k,h} f_{i,h} - p^{i}_{k,h} f_{h,k}) = 0, \end{cases}$$

soient vérifiées par les $\frac{m(m+1)}{2}$ inconnues $f_{ii}$, $f_{ik}$ qu'elles renferment linéairement.

En s'aidant de cette proposition, l'auteur montre que, si l'on désigne par $f''_{i,k}$ les fonctions qui constituent un second ensemble satisfaisant aux équations (2), par $\Delta$ le déterminant symétrique des $f_{i,k}$, par $\Delta''$ celui des $f''_{i,k}$, le rapport

$$\frac{\sum \dfrac{\partial \Delta''}{\partial f''_{i,k}} dx_i\, dx_k}{\sum \dfrac{\partial \Delta}{\partial f_{i,k}} dx_i\, dx_k},$$

égalé à une constante, est une intégrale des équations différentielles des trajectoires, résultat déjà obtenu sous une autre forme et grâce à une méthode différente par M. Painlevé.

M. R. Liouville rattache encore à son théorème général quelques autres résultats non encore signalés.

## *Hamy.* — Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. (993-996).

L'auteur établit à l'aide de principes très simples le théorème suivant, sur lequel repose la méthode de M. Darboux pour l'approximation des fonctions de grands nombres :

Soient $F(z)$ une fonction développable par la série de Laurent entre deux cercles de rayon R et $r$ ($R > r$) et $M_n$ le coefficient de $z^n$. On suppose qu'il existe sur la circonférence (R) un point singulier $a$ dans le domaine duquel on a

$$F(z) = \varphi(z) + H_1(z-a)^{h_1} + \ldots + H_q(z-a)^{h_q} + (z-a)^h \psi(z),$$

$h$ étant positif, non entier et supérieur aux nombres $h_1, h_2, \ldots, h_q$; les coefficients H désignant des constantes, $\varphi(z)$ une fonction holomorphe autour de $a$ et $\psi(z)$ une fonction finie dans le voisinage de $a$. Dans ces conditions, le

coefficient $M'_n$ de $z^n$ dans la fonction

$$F_1(z) = H_1(z-a)^{h_1} + H_2(z-a)^{h_2} + \ldots + H_q(z-a)^{h_q},$$

diffère de $M_n$ d'une quantité de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+h}}$.

## *Appell.* — Du tautochronisme dans un système matériel. (996-998).

Un système à liaisons indépendantes du temps est sollicité par des forces connues, ne dépendant que du lieu. On suppose que la position du système soit définie par $k$ paramètres géométriquement indépendants.

Quelles nouvelles liaisons, au nombre de $k-1$, faut-il imposer à ce système pour que le système à liaisons complètes ainsi obtenu soit *tautochrone*, c'est-à-dire mette le même temps à revenir à une position déterminée quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse?

Il faut et il suffit que les $k$ paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ vérifient les deux relations

$$\sqrt{\Sigma a_{ij}\,dq_i\,dq_j} = ds,$$

$$Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2 + \ldots + Q_k\,dq_k = -\mu s\,ds,$$

dont la seconde a pour premier membre l'expression du travail virtuel et où les $a_{ij}$ représentent les coefficients de la force vive

$$2T = \Sigma_{ij} a_{ij} q'_i q'_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Comme on n'a que deux relations pour déterminer $q_1, q_2, \ldots, q_k$ en fonction de $s$, on doit se donner arbitrairement $k-2$ relations compatibles entre $q_1$, $q_2, \ldots, q_k$ et $s$.

## *Poincaré.* — Sur la propagation des oscillations hertziennes. (1046-1048).

Un fil très mince et rectiligne que l'on prend pour axe des $z$ a une extrémité libre que l'on prend pour origine et est indéfini dans l'autre sens. On suppose qu'à l'origine se produise une perturbation quelconque. Comment cette perturbation va-t-elle se propager le long du fil et dans le diélectrique environnant?

Soient A un point quelconque du fil, $u$ sa distance à l'origine; M un point quelconque du diélectrique, $\rho$ sa distance au fil, $r = \sqrt{\rho^2 + (z-u)^2}$ sa distance au point A.

M. Poincaré suppose que la perturbation se propage le long du fil avec une vitesse constante et égale à celle de la lumière qu'il choisit pour unité.

Soit alors $F(u-t)$ le courant au point A. Soit $\Pi$ la *fonction de Hertz*, c'est-à-dire une fonction de $\rho$, $z$, $t$, telle que la force magnétique et les deux composantes de la force électrique perpendiculaire et parallèle au fil soient respectivement

$$\frac{d^2\Pi}{d\rho\,dt}, \qquad -\frac{d^2\Pi}{d\rho\,dz}, \qquad \frac{d^2\Pi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Pi}{d\rho}.$$

L'auteur trouve

$$H = \int_0^\infty \frac{F(u - t + r)\,du}{r},$$

d'où, si le point M est très voisin du fil,

$$\frac{dH}{d\rho} = -2\frac{F(z-t)}{\rho}.$$

Ainsi, dans le voisinage du fil, la force magnétique et la composante de la force électrique perpendiculaire au fil varient à peu près en raison inverse de $\rho$. La composante parallèle est beaucoup plus petite, car elle reste finie pour $\rho = 0$ et se réduit à

$$\frac{2}{z}[F(z-t) - F'(z-t)].$$

L'équation rigoureuse des lignes de force est

$$F(r_0 - t)\left(1 - \frac{z}{r}\right) = \text{const.}$$

Elles coupent normalement le fil, ce qui justifie l'hypothèse que la vitesse de propagation dans le fil est égale à celle de la lumière.

Mais cette théorie, quoique plus approchée que celle de Hertz, ne rend pas encore compte de l'amortissement des oscillations observé par M. Blondlot.

## *Hadamard.* — Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$. (1053-1055).

Soit une fonction entière $\varphi(x)$ développée en série de Taylor, et telle que le coefficient de $x^m$ soit, à partir d'un certain rang, moindre que $\frac{1}{(m!)^\alpha}$. L'auteur montre que cette fonction croît moins vite que $e^{|x|^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}}}$, si petit que soit $\varepsilon$. Si donc cette fonction est de la forme $e^{G(x)}$, la partie réelle de $G(x)$ augmente (du moins quand elle est positive) plus lentement que $|x|^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}}$, et par suite $G(x)$ ne peut être qu'un polynome.

Ces résultats, subsistant quand on change d'une façon quelconque les premiers coefficients de la fonction $\varphi$, permettent d'établir le théorème bien connu de M. Picard pour les fonctions entières dont les coefficients satisfont à la condition ci-dessus.

## *D'Arone.* — Un théorème sur les fonctions harmoniques. (1055-1057).

Une fonction harmonique continue pour tous les points de l'espace à distance finie et qui ne peut prendre toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$ doit nécessairement se réduire à une constante. De là ces corollaires :

1° Une fonction harmonique régulière en tous les points à distance finie doit nécessairement s'annuler.

2° Une fonction harmonique régulière pour tous les points à distance finie

et dont la valeur absolue reste inférieure à une quantité fixe, se réduit à une constante (propriété bien connue).

*Schlesinger.* — Sur la théorie des fonctions fuchsiennes.

M. Schlesinger a démontré (*Journal de Crelle*, t. 105) que les fonctions fuchsiennes symétriques de deuxième famille peuvent être considérées comme les limites de certaines fonctions algébriques correspondant à une série des sous-groupes du groupe de ces fonctions fuchsiennes.

Actuellement il étend ce mode de génération au cas des fonctions fuchsiennes de genre zéro, mais d'ailleurs quelconques.

*Demoulin.* — Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques. (1102-1104).

Parmi les divers résultats obtenus par M. Demoulin, signalons seulement le suivant, relatif aux surfaces algébriques développables et qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux surfaces algébriques les plus générales.

En un des points communs à une sécante (D) et à une développable algébrique, soient R le rayon de courbure principal, $\varpi$ et $\varphi$ les angles que (D) fait respectivement avec la génératrice et la normale, on a

$$\Sigma \frac{\sin^2\varpi}{R\cos^3\varphi} = 0.$$

Ce théorème permet d'établir plusieurs propriétés infinitésimales des cubiques gauches et des biquadratiques gauches de première espèce.

*Painlevé.* — Sur les transformations en Mécanique. (1104-1107).

L'auteur ajoute diverses remarques au problème qu'il a posé et résolu dans une Communication antérieure :

Étant donné un système d'équations de Lagrange

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_k), \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt}\;(i = 1, 2, \ldots, k),$$

former tous les systèmes d'équations

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial T'}{\partial r_i} = Q'_i(r_1, \ldots, r_k), \qquad r'_i = \frac{dr_i}{dt}\;(i = 1, 2, \ldots, l),$$

tels que les relations entre les $r_i$ définies par (2) se déduisent des relations entre les $q_i$ définies par (1), par un changement de variables

$$q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k).$$

M. Painlevé fait, en terminant, remarquer les différences qui existent entre le problème qu'il traite et celui que s'est posé M. R. Liouville.

*Painlevé.* — Sur les intégrales de la Dynamique. (1168-1171).

Généralisation de cette proposition de M. Darboux :

Si l'on sait résoudre le problème du mouvement d'un point M pour une certaine fonction de force, on sait déterminer les géodésiques de cette surface.

*Liouville (R.).* — Sur les équations de la Dynamique. (1171-1172).

« S'il s'agit, dit l'auteur, d'étudier *en général* le mouvement d'un système de points soumis à l'action des forces qui dérivent d'un potentiel et notamment les transformations que peuvent subir les équations de ce mouvement, il est permis de se borner aux cas où les forces s'évanouissent, c'est-à-dire au problème des géodésiques généralisé.

» Les résultats obtenus pour ce dernier problème s'étendent d'eux-mêmes, et sans déterminer la constante de l'énergie, aux cas en apparence plus généraux où les forces existent et admettent un potentiel. »

*De Sparre.* — Équation approchée de la trajectoire d'un projectile dans l'air lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. (1172-1174).

Le capitaine russe Zaboudski a donné une solution de cette question au moyen des fonctions elliptiques et en partageant, pour les grands angles de projection, la trajectoire en trois arcs.

M. de Sparre indique les principes d'une méthode qui donne des résultats presque identiques au moyen de fonctions élémentaires.

*Poincaré.* — Sur la propagation des oscillations électriques. (1229-1233).

M. Poincaré a étudié récemment la théorie de la propagation des oscillations hertziennes le long d'un fil indéfini. En supposant le fil infiniment mince, il a trouvé que l'amortissement devait être nul.

Il reprend le même problème en assimilant cette fois le fil à un cylindre de révolution de diamètre $\rho_0$.

Si l'on prend l'axe du cylindre pour axe des $z$, et si l'on appelle $\rho$ la distance d'un point M du diélectrique à cet axe; $\mu$ sa distance à une génératrice quelconque; $r$ sa distance au point où cette génératrice coupe le plan des $xy$; $r_0$ sa distance à l'origine; $\varphi$ le dièdre formé par les plans qui se coupent suivant l'axe des $z$ et qui passent l'un par le point M, l'autre par la génératrice considérée, on trouve pour la fonction Π de Hertz

$$-2\pi\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} = \int_0^{2\pi}\frac{F(r-t)(r+z)}{r^2}\,\frac{\rho-\rho_0\cos\varphi}{\mu^2}\,d\varphi.$$

$F(r-t)$ étant l'intensité du courant de conduction.

Comme le diamètre n'est pas très grand, $r$ diffère peu de $r_0$ et l'on a sensi-

blement

$$\frac{dH}{d\rho} = -\frac{F}{r_1 - z}\,\frac{\rho}{r_1}.$$

Par suite, le champ électromagnétique est sensiblement le même à l'extérieur du fil que si le courant était concentré sur l'axe.

Les carrés de la force magnétique et de la force électrique sont respectivement

$$\frac{F'^2}{(r_1 - z)^2}\,\frac{\rho^2}{r_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{F'^2}{(r_0 - z)^2}\,\frac{\rho^2}{r_0^2} + \frac{F^2}{r_0^4}.$$

Pour avoir l'énergie, il faut faire la somme de ces deux carrés, intégrer cette somme dans toute l'étendue du diélectrique et diviser par $2\pi$. Si l'on fait le calcul en négligeant les quantités de l'ordre de $\rho_1$, et qu'on pose $r_0 - t = v$, on trouve pour l'énergie totale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[-F'^2\left(\log\frac{\rho_1}{2(v+t)} - \frac{1}{2}\right) + \frac{F^2}{2(v+t)^2}\right]dv.$$

Pour qu'il y eût conservation de l'énergie, il faudrait que $\frac{dE}{dt}$ fût nul; comme il n'en est pas ainsi, pour conserver au courant de conduction son intensité primitive, il faudrait lui fournir dans le temps $dt$ une quantité d'énergie égale à $\frac{dE}{dt}dt$; si donc une source étrangère ne fournit pas cette quantité d'énergie, il faut que le courant s'amortisse. Le taux de l'amortissement est $\frac{dE}{dt}\frac{1}{2E}$; ce rapport devient infiniment petit avec $\rho_0$.

« Il serait curieux, dit M. Poincaré, mais sans doute assez difficile, de vérifier expérimentalement les conséquences de cette théorie en cherchant si l'amortissement dépend du diamètre du fil. »

*Serret* (*P.*). — Sur une propriété commune à trois groupes de deux polygones : inscrits, circonscrits ou conjugués à une même conique. (1254-1256).

Soient, dans le plan d'une conique S,

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 3,\quad 1',\ 2',\ \ldots,\ 3'$$

les sommets successifs des polygones considérés, inscrits tous deux, ou tous deux circonscrits, ou l'un et l'autre auto-conjugués à S. Les côtés successifs

$$1, 2;\quad 1', 2';\quad 2, 3';\quad 2', 3';\quad \ldots;\quad 3, 1;\quad 3', 1'$$

des deux polygones se coupant deux à deux aux points

$$a,\ b,\ \ldots,\ c,$$

on a, de $2n$ manières différentes, la relation

$$\frac{a1}{a2}\,\frac{a1'}{a2'} \times \frac{b2}{b3}\,\frac{b2'}{b3'} \times \ldots \times \frac{c3}{c1}\,\frac{c3'}{c1'} = \mathrm{PP}' = \pm 1.$$

Cette relation fournit une démonstration très simple du théorème de Poncelet, sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques S, S'.

*Tresse.* — Sur les développements canoniques en série dont les coefficients sont les invariants différentiels d'un groupe continu. (1256-1258).

Étant données $n$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et $p$ fonctions $z_1, \ldots, z_p$ de ces variables soumises aux transformations d'un groupe continu fini ou infini

$$x' = X(x, z), \qquad z' = Z(x, z),$$

on sait (Lie) qu'il existe une suite infinie d'invariants différentiels, qu'on peut déduire d'un nombre fini d'entre eux en formant le quotient de leurs déterminants fonctionnels.

M. Tresse a déjà indiqué sur un exemple particulier comment on pouvait appliquer les développements en série au calcul des invariants différentiels. Mais on peut énoncer une proposition générale qui régit cette théorie.

Soient, dans le voisinage d'un point arbitraire $(x_0, z_0)$,

$$z_i = z_i^0 + \Sigma_k a_{ik}(x_k - x_k^0) + \ldots \tag{1}$$

les équations de la multiplicité. Quand on effectue une transformation du groupe, le point $(x_0, z_0)$ devient le point $(x'_0, z'_0)$, et la multiplicité transformée a pour équations

$$z'_k = z'^0_i + \Sigma a'_{ik}(x'_k - x'^0_{ik}) + \ldots . \tag{1'}$$

Un invariant différentiel est une fonction des $x_0$ et des coefficients de (1), qui ne change pas de valeur quand on y remplace les lettres par les lettres accentuées. La proposition annoncée est alors la suivante :

Qu'on dispose des arbitraires de la transformation de façon que, parmi les $x'_0$ et les coefficients de (1'), un certain nombre aient des valeurs fixes arbitraires. La transformation étant ainsi déterminée, les expressions des autres coefficients de (1') en fonction des $x_0$ et des coefficients de (1) sont les invariants différentiels du groupe.

*De Sparre.* — Sur le calcul du coefficient de résistance de l'air lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. (1259-1261).

*Coculesco.* — Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps. (1339-1341).

Le problème résolu par M. Coculesco a été posé par M. de Haertl.

Dans une étoile double, les orbites des deux masses égales A et B sont circulaires. Un troisième point C dont la masse est infiniment petite se meut dans le plan de ces orbites, de manière qu'à l'origine il se trouve sur le prolongement de AB à une distance de A égale à la moitié de BA et que, en quittant

cette position, il décrirait autour de A une orbite circulaire, si B n'existait pas. (A l'origine, tous les mouvements se font dans le même sens.)

M. de Haertl a montré que, vers la fin de la troisième révolution, le mobile tend à s'éloigner du centre d'attraction A. Le mobile continuera-t-il à s'éloigner indéfiniment?

La réponse à cette question est négative, comme le fait voir M. Coculesco. De plus, il y aura stabilité au sens où l'entend Poisson, c'est-à-dire que le mobile passera une infinité de fois aussi près qu'on voudra de sa position initiale.

*Poincaré.* — Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps. (1305-1309).

L'auteur montre que la méthode de M. Lindstedt peut être appliquée à l'étude des variations séculaires des orbites des planètes, mais qu'elle ne peut sans modification s'étendre au problème des trois corps, et quelles sont les modifications à faire pour que cela devienne possible. Il est inutile d'ajouter que, dans la méthode modifiée par M. Poincaré, comme dans la méthode originale de M. Lindstedt, les séries ne sont pas convergentes, mais seulement semi-convergentes, comme la série de Stirling, ce qui limite les conditions dans lesquelles on peut s'en servir.

*Picard.* — Sur une classe de fonctions analytiques d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires. (1310-1312).

M. Poincaré a montré que les équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales ont leurs points critiques fixes, ne peuvent conduire à des transcendantes nouvelles.

M. Painlevé a fait voir qu'il en est de même pour les équations du premier ordre, dont les intégrales n'ont qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles.

M. Picard se demande si l'on ne pourrait pas obtenir des classes de fonctions d'un caractère plus général, en considérant des fonctions analytiques d'une variable complexe dépendant de *deux constantes réelles*, qui ne dépendent pas d'une seule *constante complexe*.

Pour cela, il forme les quatre équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f(u, v, x, y),\\ \frac{du}{dy} &= \varphi(u, v, x, y),\\ \frac{dv}{dx} &= -\varphi(u, v, x, y),\\ \frac{dv}{dy} &= f(u, v, x, y), \end{aligned}\right.$$

où $u$ et $v$ sont deux fonctions réelles des deux variables réelles $x, y$.

Ces quatre équations admettront un système $(u, v)$ de solutions dépendant

de deux constantes, si l'on a, entre $f$ et $\varphi$, les deux relations

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\varphi+\left(\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)f+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\varphi-\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)f-\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

Les équations (1) définissent alors une famille de fonctions analytiques

$$u+iv=\mathrm{F}(z, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$$

de la variable $z=x+iy$, renfermant deux constantes réelles, $\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{C}_2$.

Étant donné un système (1), on peut reconnaître si les intégrales ont leurs points critiques fixes (indépendants de $\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{C}_2$). M. Picard regarde comme très probable que les intégrales de ces équations constituent un type nouveau de transcendantes.

*Serret* (*P.*). — Sur une propriété commune à trois groupes de deux polygones : inscrits, circonscrits ou conjugués à une conique. (1343-1345).

*Painlevé.* — Sur les groupes discontinus de substitutions non linéaires à une variable. (1345-1347).

M. Poincaré a enseigné à former tous les groupes discontinus de substitutions linéaires

$$z=\frac{a_i z_i+b_i}{c_i z_i+d_i}.$$

M. Painlevé étudie les groupes de substitutions dans lesquelles à une valeur de $z$ correspond un nombre donné $n$ de valeurs de $z_i$. Il ramène la théorie de ces groupes à celle des groupes linéaires.

D'abord, si $n$ est un nombre premier quelconque, les groupes discontinus *non algébriques* de substitutions à $n$ valeurs $(z, z_i)$ se déduisent des groupes linéaires $(t, t_i)$ par un des deux changements de variables

$$z=\varphi(t), \qquad \mathrm{R}(z)=t,$$

où $\varphi$ et R sont des fonctions rationnelles de degré $n$. Les groupes algébriques $(z, z_i)$ se déduisent des groupes linéaires finis par les mêmes changements de variable, ou sont semblables à un groupe de transformations en elle-même d'une courbe de degré $n$ et de genre plus grand que zéro.

Si $n$ est un entier quelconque, tout groupe discontinu *non algébrique* de substitutions à $n$ valeurs $(z, z_i)$ se déduit d'un groupe linéaire $(t, z_i)$, par un changement algébrique de la variable $\mathrm{F}(t, z)=0$, où F est un polynome de degré $n'$ en $z$, de degré $n''$ en $t\,(n'n''=t)$. Tout groupe algébrique $(z, z_i)$ se déduit d'un groupe linéaire fini par le même changement de variable, ou est semblable algébriquement à un groupe de transformations en elle-même d'une courbe C de degré $n''$ et de genre plus grand que zéro : à chaque point de C correspondent $n'$ valeurs de $z$.

Ces résultats sont à rapprocher du théorème de M. Lie : tout groupe continu $(z, z_i)$ est semblable à un groupe linéaire $(t, t_i)$.

*Raffy.* — Sur le problème général de la déformation des surfaces. (1407-1409).

Le problème qui consiste à trouver toutes les surfaces admettant un élément linéaire donné

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

peut être ramené à la détermination de la courbure moyenne $h$ et de l'angle $\theta$ que fait l'une des courbes coordonnées $v = \text{const.}$ avec l'une des lignes asymptotiques.

Une fois $\theta$ connu, $h$ sera donné explicitement par l'équation

$$h\left[\frac{\partial}{\partial u}(\text{C}\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial v}(\text{A}\cos\theta)\right] + \sqrt{k}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\text{C}\sqrt{k}\cos\theta) - \frac{\partial}{\partial v}(\text{A}\sqrt{k}\sin\theta)\right] = 0,$$

$-k^2$ désignant la courbure totale.

Quant à l'inconnue $\theta$, elle vérifie une équation *linéaire par rapport aux dérivées secondes* de $\theta$, et que l'on obtiendra en substituant la valeur de $h$, tirée de la relation précédente, dans l'équation

$$\frac{\partial}{\partial v}(h\text{A}\sin\theta - \frac{\partial}{\partial u}(h\text{C}\cos\theta) + \sqrt{k}\left[\frac{\partial}{\partial v}(\text{A}\sqrt{k}\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial u}(\text{C}\sqrt{k}\sin\theta)\right] = 0.$$

*Schlesinger.* — Sur la théorie des fonctions fuchsiennes. (1405-1411).

La décomposition des groupes fuchsiens, que l'auteur a indiquée précédemment en supposant que le groupe soit formé de $n$ substitutions fondamentales entre lesquelles n'existe aucune relation, donne naissance à une suite indéfinie de fonctions algébriques d'une variable $x$, convergente vers une limite $z$ dont $x$ est une fonction fuchsienne du genre zéro et de la deuxième ou quatrième famille. C'est ce que l'auteur établit pour les fonctions de la deuxième famille, donnant ainsi une démonstration nouvelle du théorème fondamental de M. Poincaré sur l'existence des équations fuchsiennes d'un type donné, démonstration qui ne s'appuie pas sur la méthode de continuité, mais dans laquelle il faut appliquer le principe de Dirichlet, pour pouvoir conclure l'existence d'une fonction algébrique, appartenant à une surface de Riemann donnée.

*Painlevé.* — Sur les transformations en Mécanique. (1412-1414).

L'auteur insiste sur la différence qui existe entre le problème de transformation qu'il a résolu et celui que s'est posé M. R. Liouville.

*D'Ocagne.* — Sur la détermination du point le plus probable donné par une série de droites non convergentes. (1415-1416).

Étant données, sur un plan, $n$ droites $d_1, d_2, \ldots, d_n$, trouver un point M tel que, si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ désignent ses distances à ces $n$ droites, la somme

$$k_1\delta_1^2 + k_2\delta_2^2 + \ldots + k_n\delta_n^2,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des constantes données soit minimum.

Voici la solution de ce problème proposée par M. d'Ocagne.

O étant un point quelconque du plan, soient :

G le centre de gravité des masses $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ respectivement appliquées aux projections du point O sur les droites $d_1$, $d_2$, ..., $d_n$;

H le centre de gravité des mêmes masses appliquées aux projections de G sur les parallèles à $d_1$, $d_2$, ..., $d_n$ menées par O;

K la projection de H sur la perpendiculaire à OG menée par O;

I le point où GH coupe la perpendiculaire élevée en O à OH.

Le point cherché M est à la rencontre de OH et de la perpendiculaire menée par G à IK.

## *Mangeot.* — De la loi de correspondance des plans tangents dans la transformation des surfaces par symétrie courbe.

Soient $S_1$, $S_2$ deux surfaces symétriques l'une de l'autre par rapport à une surface S; on les regarde comme décrites respectivement par les deux extrémités $m_1$, $m_2$ d'un segment de longueur variable qui dans son déplacement reste normal en son milieu $m$ à la surface S. Soient $P_1$, $P_2$ les plans tangents en $m_1$, $m_2$ à $S_1$, $S_2$; $t_1$, $t_2$ les traces de ces deux plans sur un plan principal $\Pi$ de S.

La loi de correspondance entre les plans tangents $P_1$ et $P_2$ est donnée par le théorème suivant qui, $P_1$ étant donné, permet de construire deux droites de $P_2$ par l'emploi des deux plans principaux $\Pi$, $\Pi'$ et des deux centres de courbure O, O' de la surface S;

Si $r$ désigne la projection du point de concours de $t_1$ et $t_2$ sur $m_1$, $m_2$, le symétrique de $r$ par rapport à $m$ est le conjugué harmonique de O par rapport à $m_1$ et $m_2$.

L'auteur développe diverses conséquences de cette proposition. Il fait remarquer que, si S est une surface minima, les projections sur $m_1$, $m_2$ du point de rencontre de $t_1$, $t_2$ et du point de rencontre $t'_1$, $t'_2$ (correspondant à $\Pi'$) seront toujours symétriques par rapport à S, propriété qui n'appartient qu'aux surfaces minima.

## *Flamant.* — Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. (1463-1466).

L'auteur étudie les pressions qui se développent aux différents points d'un prisme rectangulaire vertical, de longueur et d'épaisseur infinies, soumis sur sa face supérieure à une charge normale appliquée en tous les points d'une droite perpendiculaire à ses deux autres faces, et égale à P par unité de longueur.

Prenant pour origine le milieu O de cette droite, pour axe des $y$ cette droite elle-même, traçant l'axe des $x$ horizontalement et celui des $z$ verticalement de haut en bas, l'auteur montre que tous les points situés dans un même plan parallèle aux $zx$ restent dans ce plan et que tous les points placés sur une même droite parallèle à l'axe des $y$ restent sur une parallèle à cet axe. Il suffit donc d'étudier ce qui se passe dans le plan des $zx$.

Avec les notations usitées, on trouve alors

$$N_1 = -\frac{2P}{\pi r}\frac{x^2 z}{r^2}, \qquad N_2 = -\frac{2P}{\pi r}\frac{z^3}{r^2}, \qquad T_y = -\frac{2P}{\pi r}\frac{xz^2}{r^2},$$

$$\theta = -\frac{Pz}{(\lambda+\mu)\pi r^2}, \qquad (r = \sqrt{x^2+z^2}).$$

De plus la pression totale sur un élément plan quelconque est indépendante de la direction de cet élément. Si l'on appelle $\alpha$ et $\alpha + d\alpha$ les angles formés avec la verticale par les rayons vecteurs qui vont de l'origine aux deux extrémités de l'élément, la pression totale qu'il supporte est $\frac{2P}{\pi}\cos\alpha\, d\alpha$, et cette pression est toujours dirigée vers l'origine.

*Boussinesq.* — Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords à la face supérieure d'une poutre rectangulaire et de longueur indéfinie posée de champ soit sur un sol horizontal, soit sur deux appuis transversaux équidistants de la charge. (1510-1516).



ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI. Série 4a; Rendiconti; in-4°.

T. VI, 1890; 1er semestre (¹).

*Millosevich (E.).* — Sur l'orbite de la comète 1889 II (Barnard, mars 31). (6-7).

*Bordiga (G.).* — Sur une certaine congruence du troisième ordre et de la sixième classe de l'espace ordinaire. (8-13).

*Volterra (V.).* — Sur les équations différentielles provenant de questions de calcul des variations. (43-54).

Les équations différentielles que l'on obtient en posant = o, la variation première d'une integrale

$$I = \int F\, dx_1 \ldots dx_n,$$

peuvent prendre la forme

$$\frac{\partial p_{i_1}^{(i)}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_2}^{(i)}}{\partial x_{i_2}} + \ldots + \frac{\partial p_{i_t}^{(i)}}{\partial x_{i_t}} = \frac{\partial H}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{i_1}^{(i)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_{i_t}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{i_t}^{(i)}};$$

(¹) Voir *Bulletin*, $XVII_2$, p. 57.

réciproquement tout système analogue à celui-ci peut être ramené à un problème de calcul des variations. L'auteur, après avoir établi ces deux propositions réciproques, donne quelques relations qui passent entre les fonctions H, F, et d'autres fonctions liées au problème en question. Une de ces relations en particulier est appliquée par lui à l'étude de certains cas où les fonctions inconnues sont déterminées par des conditions aux limites.

*Peano* (*G.*). — Sur la définition de l'aire d'une surface. (54-57).

Voici la définition donnée par l'auteur et qui évite les objections que l'on a faites aux autres.

L'aire d'une portion de surface est la limite supérieure de la somme des grandeurs des bivecteurs de ses parties.

*Del Re* (*A.*). — Sur les groupes complets de trois transformations linéaires involutives dans les espaces de $n$ dimensions. (57-65).

*Garibaldi* (*P.-M.*). — L'activité solaire et le magnétisme terrestre à Gênes pour l'an 1889 et pour la période 1873-89. (65-73).

*Tacchini* (*P.*). — Sur les observations de taches, facules et protubérances solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain dans le quatrième trimestre de 1889. (80-81).

*Bigiavi* (*C.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (86-90).

Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques et ayant dans le parallélogramme des périodes un seul point critique pour les intégrales admettent une intégrale particulière uniforme de seconde espèce, si les racines de la déterminante relative au point critique sont des nombres entiers.

*Volterra* (*V.*). — Sur une extension de la théorie Jacobi-Hamilton du calcul des variations. (127-138).

Cette extension est faite au moyen des *fonctions de lignes* (notion établie par l'auteur même dans ces *Rendiconti*, t. III), en formant une fonction de lignes, qui remplace la fonction caractéristique. L'auteur suppose que l'intégrale dont la variation première doit être annulée soit une intégrale double

$$I = \int\int U\,du\,dv = \int\int\left(p_{ih}\frac{\partial H}{\partial p_{ih}} - H\right)du\,dv,$$

étant

$$H = H(x_1, x_2, x_3, p_{ih}, \ldots, u, v), \qquad p_{ih} = \frac{\partial U}{\partial \xi_{ih}}, \qquad \xi_{ih} = \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)},$$

et les équations différentielles du problème sont

$$\frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{ih}}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

L'auteur considère les trois fonctions inconnues $x_1$, $x_2$, $x_3$ et les $p_{ih}$ comme des fonctions des lignes qui forment le contour du champ d'intégration, et, en substituant leurs expressions dans l'intégrale donnée, il obtient la fonction W de lignes dont nous parlions tout à l'heure. Il trouve les relations différentielles qui doivent être satisfaites par W, et démontre deux théorèmes, qui pour $H = \frac{1}{2}(p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2)$ se réduisent à deux propositions réciproques sur les systèmes de surfaces *minima* et sur leurs trajectoires orthogonales, trouvées par M. Padova (*Rendiconti dei Lincei,* t. IV).

## *Tonelli* (*A.*). — Sur la connexion des espaces. (139-142).

Nouvelle démonstration du théorème suivant :

« Soit ($a$) un système de $n$ espaces formés de $t$ dimensions, qui, même combinés entre eux de toute manière que l'on veut, ne forment jamais le contour complet d'un espace de $t+1$ dimensions, tandis qu'ils forment un tel contour avec tout autre espace fermé de $t$ dimensions; soit ($b$) un système analogue à ($a$) constitué de $m$ espaces, et ayant ces mêmes propriétés. Alors on doit avoir $m = n$. »

## *Reina* (*V.*). — Sur les lignes conjuguées d'une surface. (156-165).

L'auteur obtient des propriétés relatives à ces lignes en considérant les paramètres différentiels du premier ordre, relatifs aux formes

$$A = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds^2,$$

$$B = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{ds^2}{\rho},$$

$$C = \frac{(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-ds^2}{\tau},$$

$\frac{1}{\tau}$ étant la torsion géodésique.

## *Pincherle* (*S.*). — Sur certaines intégrales particulières des équations différentielles non homogènes. (199-202).

Soit l'équation

$$(1) \qquad \Delta\varphi = x^p Q(x)\frac{d^p\varphi}{dx^p} + x^{p-1}Q_1(x)\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-1}} + \ldots + Q_p(x)\varphi = P(x),$$

étant

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m),$$

et P un polynome arbitraire de degré $m-1$, et l'équation $\Delta\varphi = 0$ étant supposée avoir ses intégrales régulières. L'auteur appelle *fonction simple relative à* $\alpha$, une branche de fonction analytique, singulière en $\alpha$ et à l'infini, régulière en tout autre point, et se réduisant monodrome lorsqu'on coupe le plan depuis $\alpha$ jusqu'à l'infini. Cela posé, l'auteur démontre que : étant $\alpha_k$ une des racines de $Q(x)$, on peut toujours déterminer les coefficients de $P(x)$ de manière que l'équation (1) ait pour intégrale une fonction simple relative à $\alpha_k$.

*Reina* (*V.*). — Nouvelles recherches sur les lignes conjuguées d'une surface. (203-209).

Expression géométrique des formes différentielles bilinéaires :

$$A^* = E\ du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\ dv\,\delta v,$$
$$B^* = L\ du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\ dv\,\delta v,$$
$$D^* = E_1\,du\,\delta u + F_1\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_1\ dv\,\delta v.$$

*Tacchini* (*P.*). — Sur les observations de taches, facules et protubérances solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain dans le premier trimestre 1890. (225-226).

*Bianchi* (*L.*). — Sur une classe de représentations équivalentes de la sphère sur le plan. (226-229).

L'auteur résout le problème suivant :

« Déterminer les représentations d'une sphère sur un plan, par lesquelles les aires sont conservées, et un double système orthogonal de droites du plan est l'image d'un système orthogonal sur la sphère. »

Il rattache ce problème à la théorie des surfaces pseudosphériques en montrant que : à tout couple de surfaces pseudosphériques complémentaires correspond une des représentations cherchées, et inversement. La forme de l'élément linéaire de la sphère devient

$$ds'^2 = e^{-2\alpha}\,d\beta^2 + e^{2\alpha}\,d\gamma^2.$$

*Del Re* (*A.*). — Sur les couples de formes bilinéaires. (237-244).

Dans cette Note, l'auteur, se bornant aux formes binaires, démontre que : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de formes bilinéaires symétriques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ puisse être transformé linéairement en un couple semblable $f'_1 = 0$, $f'_2 = 0$ est que cela ait lieu pour les homographies P, P′ qui résultent respectivement de la composition des involutions $I_1$, $I_2$ représentées par $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, et de celle des involutions $I'_1$, $I'_2$ représentées par $f'_1 = 0$, $f'_2 = 0$.

*Cavalli* (*E.*). — Contribution à la théorie des transmissions télodynamiques. (244-260).

*Bianchi* (*L.*). — Sur les groupes de substitutions linéaires à coefficients entiers complexes. (331-339).

Les groupes G de substitutions linéaires

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

à déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ prenant tous les valeurs

entières complexes formées avec la racine quatrième $i$ ou avec la racine cubique $\varepsilon$ de l'unité sont *improprement discontinus* en tout le plan complexe $z$. Ils contiennent cependant un nombre infini de sous-groupes proprement discontinus fuchsiens auxquels correspondent autant de classes de fonctions fuchsiennes. Dans cette Note, l'auteur fait la recherche des substitutions génératrices et du polyèdre fondamental du groupe G, puis il interprète géométriquement les conditions pour qu'une forme binaire quadratique, à indéterminées conjuguées, soit réduite suivant Hermite. Après il considère les sous-groupes exceptionnels Γ de G, définis par les congruences

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod{\mu},$$

$\mu$ étant un nombre premier dans le champ considéré, et construit un groupe Λ d'un nombre fini de substitutions isomorphe avec G, dont la substitution identique correspond à Γ. Si $\mu$ est complexe, Λ ne diffère pas du groupe modulaire ordinaire; si $\mu$ est réel (premier) et de la forme $4n+3$ (ou $6n+5$), Λ est un groupe simple de degré $\frac{q^2(q^4-1)}{2}$ doublement transitif sur $q^2+1$ éléments, et pour $q=3$ est holoédriquement isomorphe avec le groupe alterne sur six éléments.

*Bigiavi* (*C.*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (339-346).

L'auteur donne ici une extension au cas des équations de l'ordre $n$, d'un théorème démontré par lui-même pour les équations du second ordre (*voir* ci-dessus). Voici le théorème étendu :

« Les équations différentielles linéaires à coefficients elliptiques admettent un groupe d'intégrales uniformes dans tout le plan lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

» 1° Que les racines des déterminantes relatives aux points critiques pour les intégrales sont des nombres entiers;

» 2° Que l'on puisse déterminer un parallélogramme fondamental dans lequel existent $n-1$ intégrales distinctes et uniformes;

» 3° Que la dernière intégrale qui n'est pas uniforme ne reprenne pas la même valeur lorsque la variable tourne autour de tous les points singuliers de ce parallélogramme. »

La démonstration de ce théorème est fondée sur une proposition relative aux substitutions.

*Garibaldi* (*P.-M.*). — Comparaison des deux dernières périodes entières de taches solaires et de variations déclinométriques diurnes. (346-351).

*Bianchi* (*L.*). — Sur une classe de groupes fuchsiens réductibles à des groupes modulaires. (375-384).

M. Picard, dans un Mémoire sur les formes binaires quadratiques indéfinies à indéterminées conjuguées et à coefficients entiers, traite par une méthode spéciale le cas où le déterminant $\Delta$ est la somme de deux carrés. M. Bianchi montre ici que l'on peut dans ce cas établir un système complet de formes à déterminant $\Delta$, sans recourir à la méthode de réduction continue. Si $\Delta$ n'a pas de facteurs carrés, ces formes se distribuent en deux ou trois classes suivant que $\Delta$ est pair ou impair. Le groupe des substitutions semblables d'une telle forme (c'est-à-dire des substitutions qui la transforment en elle-même) peut être déduit par transformation d'un groupe modulaire. En particulier l'examen du groupe correspondant à la forme principale donne un moyen simple pour résoudre en nombres entiers réels l'équation généralisée de Pell

$$\alpha^2 + \beta^2 - \Delta(\gamma^2 + \delta^2) = 1.$$

*Tacchini* (*P.*). — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'observatoire royal du Collège romain pendant 1889. (384-388).

*Millosevich* (*E.*). — Sur l'orbite de la petite planète (264) *Libussa* en base des trois oppositions passées. (391-392).

*Marcolongo* (*R.*). — Sur les géodésiques tracées sur les quadriques sans centre. (392-399).

Il s'agit des géodésiques tracées sur un paraboloïde, et en particulier sur un paraboloïde elliptique. L'auteur intègre par fonctions exponentielles l'équation différentielle des géodésiques passant par les ombilics, et exprime les coordonnées d'un point d'une de ces lignes par des fonctions exponentielles dépendant d'un seul paramètre. Pour les géodésiques qui partent d'un point quelconque, l'auteur exprime les coordonnées par des fonctions théta.

*Ciani* (*E.*). — Sur les surfaces algébriques symétriques. (399-407).

Le nombre des plans de symétrie passant par une même droite, qu'une surface algébrique peut admettre, peut être l'un quelconque des nombres non supérieurs au degré de la surface.

Une surface algébrique de l'ordre $n$ ne peut admettre plus de $n$ de ces plans de symétrie sans devenir une surface de révolution.

Après avoir obtenu ces résultats, l'auteur traite en particulier le cas des surfaces du troisième ordre, et démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface du troisième ordre soit symétrique par rapport à un plan est que le point à l'infini des normales à ce plan soit un point de Eckardt, c'est-à-dire un point de la surface qui soit en même temps un sommet du pentaèdre de Sylvester. Il y a cinq types de symétrie pour ces surfaces, et l'auteur, après l'avoir démontré, examine en particulier celles du type

$$x^3 - 3xz^2 + \alpha(x^2 + z^2) + \beta y^2 + \gamma = 0.$$

*Bianchi* (*L.*). — Sur une nouvelle classe de surfaces appartenant à des systèmes triples orthogonaux. (435-438).

On tire la normale en chaque point d'une surface S d'un système, et soit $n$ le segment infiniment petit de cette normale compris entre S et la surface consécutive S′. Les lignes de S déterminées par la condition

$$n = \text{const.}$$

sont appelées ***lignes de niveau*** de S. Les systèmes orthogonaux considérés par l'auteur sont ceux dans lesquels les lignes de niveau coupent les lignes de courbure à angle constant $\alpha$. Les surfaces S qui peuvent appartenir à ces systèmes sont caractérisées par la propriété géométrique suivante. Considérons sur S les trajectoires L isogonales d'angle $\alpha$ des lignes de courbure et les lignes L′ symétriques des L par rapport aux lignes de courbure. L'élément linéaire de S rapporté aux lignes L, L′ prend la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\cos 2\alpha\, du\, dv + \frac{dv^2}{\mathrm{E}};$$

si nous considérons $u$, $v$ comme des coordonnées cartésiennes orthogonales du plan, nous avons une représentation plane de S, qui conserve les aires et dans laquelle à un double système orthogonal de droites du plan correspondent les trajectoires isogonales de S. Inversement toute surface S admettant cette représentation peut appartenir à un système triple orthogonal de l'espèce indiquée.

Les surfaces S ayant cette propriété peuvent être déduites des surfaces pseudosphériques par l'application de la transformation de Bäcklund.

*Pannelli* (*M.*). — Sur la transformation birationnelle la plus simple de l'espace ordinaire de rayons en un espace linéaire à quatre dimensions. (479-487).

Les espaces ordinaires à trois dimensions, les plans et les droites correspondent respectivement aux complexes linéaires, aux congruences linéaires et aux hyperboloïdes réglés passant par une même droite fondamentale.

En prenant pour droite fondamentale de l'espace $\Sigma$ de rayons l'arête du tétraèdre de référence ayant pour coordonnées

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0, \qquad p_6 = 1,$$

les formules de la transformation sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\sigma' x'_1 &= p_1, & \sigma p_1 &= x'_1 x'_3,\\
\sigma' x'_2 &= p_2, & \sigma p_2 &= x'_2 x'_3,\\
\sigma' x'_3 &= p_3, & \sigma p_3 &= x'^2_3\\
\sigma' x'_4 &= p_4, & \sigma p_4 &= x'_3 x'_4,\\
\sigma' x'_5 &= p_5, & \sigma p_5 &= x'_3 x'_5,\\
& & \sigma p_6 &= -(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5),
\end{aligned}$$

$x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$, $x'_5$ étant les coordonnées d'un point de l'espace $\Sigma'$ de quatre dimensions.

*Bianchi* (*L.*). — Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques d'un système sont à torsion constante. (552-556).

En partant d'une de ces surfaces, par exemple de l'hélicoïde réglé *minima*, on peut en avoir autant que l'on veut par de simples quadratures.

1890, 2e semestre.

*De Paolis* (*R.*). — Quelques propriétés de la surface de Kummer. (3-11).

L'auteur étudie cette surface en l'envisageant comme la surface limite de la transformation double que l'on obtient en faisant correspondre aux plans d'un espace S (*espace double*) les quadriques d'un espace S' (*simple*) passant par six points fondamentaux. Il trouve ainsi diverses propriétés remarquables de la surface de Kummer, dont nous citerons la suivante :

Il y a quarante-sept systèmes $\infty^4$ de coniques quadritangentes à une surface de Kummer, exception faite pour ceux des coniques situées en un des plans singuliers.

*Tacchini* (*P.*). — Sur l'éclipse totale de décembre 1889. (14).

*Nagy* (*A.*). — Sur la représentation graphique des quantités logiques. (50-55).

*Ciani* (*E.*). — Sur les surfaces cubiques dont la hessienne se décompose. (55-63).

La décomposition de la hessienne ne peut se faire qu'en un cône cubique et en un plan, ou en quatre plans, ou en un cône du second degré et en un plan double.

La condition nécessaire et suffisante pour que la hessienne se décompose en un cône cubique et en un plan est qu'il existe un point dont la quadrique polaire soit un plan double non passant par le point.

La condition nécessaire et suffisante pour que la hessienne se décompose en un cône du second degré et en un plan double est qu'il existe un point dont la quadrique polaire soit un plan double passant par ce point.

*Enriques* (*J.*). — Quelques propriétés des faisceaux d'homographies dans les espaces linéaires de $n$ dimensions. (63-70).

*Padova* (*E.*). — Extension du problème de de Saint-Venant. (95-102).

Le problème consiste à déterminer dans un prisme élastique isotrope les déplacements infiniment petits capables de produire des tensions faisant équilibre à des forces appliquées à l'une des bases, l'autre étant fixe. L'auteur étend

ce problème en considérant des corps constitués par des fibres curvilignes; il obtient les équations différentielles du problème par l'application de certaines formules trouvées par lui dans sa Note : ***La teoria di Maxwell negli spazi curvi*** (***Rendiconti,*** t. V). Pour le cas des fibres circulaires, et sous une certaine condition pour les forces appliquées à la base libre, le problème est ramené à déterminer une fonction Ω qui dans l'aire de la section satisfasse à l'équation

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{x_1^3}\frac{d\Omega}{dx_1}\right) + \frac{d}{dx_2}\left(\frac{1}{x_2^3}\frac{d\Omega}{dx_2}\right) + \frac{c_1}{x_2^3} = 0$$

et au contour soit constante. Enfin l'auteur donne la solution du problème pour les prismes et les cylindres obliques, en la faisant dépendre en dernière analyse d'une intégration de l'équation $\Delta^2 = 0$.

*Reina* (*V.*). — Sur certaines formules relatives à la théorie des surfaces. (103-110).

Des formules données par l'auteur nous citons ici la suivante, qui donne une expression remarquable de la courbure

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{\partial \log Y}{\partial x}\,\frac{\partial \log Z}{\partial x} + \frac{\partial \log Z}{\partial y}\,\frac{\partial \log X}{\partial y} + \frac{\partial \log X}{\partial z}\,\frac{\partial \log Y}{\partial z},$$

X, Y, Z étant les cosinus de la normale.

*Giacomelli* (*F.*). — Première série de mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à l'observatoire royal du Capitole. (161-169).

*Loria* (*G.*). — Sur l'application des fonctions jacobiennes à l'étude des courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce. (179-187).

Une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce dont l'invariant absolu soit $k^2$ admet la représentation paramétrique

$$\rho x_i = \theta_i(\lambda) \qquad [i = 0, 1, 2, 3],$$

$x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ étant les coordonnées projectives d'un point (par un choix convenable des éléments fondamentaux), $\theta_0$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ les quatre fonctions jacobiennes, et

$$\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = \sqrt{k}.$$

C'est au moyen de cette représentation que l'auteur étudie ces courbes. Il trouve par exemple cette proposition fondamentale :

Si $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont les paramètres de quatre points de la courbe situés dans un même plan, on a

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (\text{mod } 4K \text{ et } 4iK').$$

*Cavalli* (*E.*). — Sur la perte de charge dans les conduits d'air comprimé. (187-195).

*Del Re* (*A.*). — Sur la surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du cinquième ordre. (221-228).

La construction d'une telle surface a été donnée par l'auteur dans une Note insérée aux *Rendiconti dell' Accademia di Napoli*; 1886. Nous, qui ne connaissons pas encore cette Note, croyons pouvoir déduire assez clairement cette construction, de la tractation analytique que l'auteur fait dans le § 1 de la Note précédente. Soient (σ), (σ′), (S) deux systèmes plans de points et une gerbe de plans, en correspondance projective, représentés par ces équations

$$(\sigma) \equiv \lambda_1 u_\alpha + \lambda_2 u_\beta + \lambda_3 u_\gamma = 0,$$
$$(\sigma') \equiv \lambda_1 u_{\alpha'} + \lambda_2 u_{\beta'} + \lambda_3 u_{\gamma'} = 0,$$
$$(S) \equiv \lambda_1 p_x + \lambda_2 q_x + \lambda_3 r_x = 0,$$

la droite qui joint deux points correspondants de (σ), (σ′) est rencontrée par le plan de (S) qui correspond à ces points en un point de la surface étudiée. L'auteur commence par établir une représentation plane de cette surface et les coordonnées de ses dix droites. Puis, à l'aide d'un connexe spécialisé (1, 2), dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta & u_\gamma \\ u_{\alpha'} & u_{\beta'} & u_{\gamma'} \\ p_x & q_x & r_x \end{vmatrix} = 0,$$

il obtient l'équation de la surface sous la forme

$$\Sigma_{ik} A_{ik} x_i x_k = 0,$$

$A_{ik}$ étant le mineur correspondant à l'élément $\alpha_{ik} p_x + \beta_{ik} q_x + \gamma_{ik} r_x$ dans le déterminant

$$|\alpha_{ik} p_x + \beta_{ik} q_x + \gamma_{ik} r_x|.$$

Il construit aussi une correspondance (1, 3), par laquelle aux plans de l'espace triple correspondent dans l'espace simple des surfaces du cinquième ordre à courbe double du cinquième ordre.

*Volterra* (*V.*). — Sur les variables complexes dans les hyperespaces. (241-252).

L'auteur étend ici au cas des hyperespaces quelques considérations développées par lui-même dans les *Acta Mathematica* pour les espaces de trois dimensions, et donne une nouvelle et plus générale extension du théorème de Cauchy.

*Di Legge* (*A.*). — Sur les erreurs personnelles dans les observations du diamètre horizontal du Soleil faites à l'observatoire royal du Capitole. (252-258).

*Del Re* (*A.*). — Sur certains groupes complets contenus dans le

groupe Cremona à un nombre quelconque de variables. (271-276).

Prenons dans l'espace linéaire $S_n$, $n$ variétés quadratiques à $n-1$ dimensions

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

et faisons correspondre à un point M le point commun à ses $S_{n-1}$ polaires. On aura une correspondance crémonienne de degré $n$. Les $n$ variétés quadratiques sont supposées avoir une pyramide autopolaire commune de $n+1$ sommets, qui sont alors les points fondamentaux. En les prenant pour points de référence, les formules de la transformation seront

$$y_i = a_i x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Un premier groupe complet est formé par les $2^n$ transformations représentées par

$$y_i = (-1)^{\tau_i} a_i x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{n+1},$$

et les $2^n$ homographies

$$z'_i = (-1)^{\tau_i} z_i,$$

les $\tau_i$ étant les nombres 1, 2 pris un nombre quelconque de fois et dans un ordre quelconque. L'auteur donne ensuite deux autres de ces groupes.

*Giacomelli* (*J.*). — Deuxième série de mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à l'observatoire royal du Capitole. (276-284).

*Tacchini* (*P.*). — Sur les taches, facules et protubérances solaires observées pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1890 à l'observatoire royal du Collège romain. (308-310).

*Di Legge* (*A.*). — Sur la grandeur apparente du diamètre solaire et sur ses variations. (310-316).

*Peano* (*G.*). — Valeurs approchées pour l'aire d'un ellipsoïde. (317-321).

Voici les formules approchées que l'auteur donne pour l'aire E d'un ellipsoïde dont $a$, $b$, $c$ sont les axes,

$$E_2 = 2\pi b(a + c),$$

$$E_3 = 4\pi \frac{ab + ac + bc}{3},$$

et pour le cas d'un ellipsoïde très proche à la sphère

$$E_4 = 4\pi\left[\frac{2}{5}\,\frac{ab + ac + bc}{3} + \frac{3}{5}\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2\right].$$

Il fait connaître aussi les limites des erreurs correspondantes.

*Nagy* (*A.*). — Sur la représentation graphique des quantités logiques. (373-378).

Tome VII; 1891, 1[er] semestre.

*Bianchi* (*L.*). — Sur les surfaces dont les sections, faites par un système de plans parallèles, coupent sous un angle constant les lignes de courbure. (4-13).

La recherche de ces surfaces Φ se réduit, au moyen de la représentation sphérique de Gauss, à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \rho = 0,$$

dont chaque solution donne par de simples quadratures une surface Φ. Ces surfaces peuvent être associées en séries appartenant à des systèmes triples orthogonaux. Lorsqu'une des trois séries est formée de surfaces Φ, celles des deux autres ont un système de lignes de courbure planes, dont les plans sont parallèles à une droite fixe et coupent les surfaces correspondantes sous un même angle. L'auteur donne aussi une autre application de l'équation $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \rho = 0$, dans la recherche des systèmes doubles de courbes dans ce plan, qui se coupent sous un angle constant et divisent le plan en parallélogrammes infiniment petits équivalents. Il y a une relation remarquable entre ces systèmes de courbes et les surfaces Φ. Soient P un point du plan et P′ le centre de courbure (en P) de la courbe $v =$ const. passant par P. Prenons sur PP′ un point intérieur O divisant le segment PP′ dans un rapport constant, et décrivons dans le plan normal en O à PP′ un cercle ayant O pour centre et pour rayon la moyenne proportionnelle entre OP, OP′. Le système $\infty^2$ de cercles ainsi obtenu admet une série de surfaces orthogonales qui sont des surfaces Φ.

*Tacchini* (*P.*). — Sur les taches, facules et protubérances solaires observées pendant le quatrième trimestre de 1890 à l'observatoire royal du Collège romain. (14).

*Millosevich* (*E.*). — Observations de la comète 1890 IV, faites à l'équatorial de 25[cm] d'ouverture de l'observatoire royal du Collège romain. (24).

*Zona* (*T.*). — Sur la latitude de Palerme, observée au moyen des passages au premier vertical. (24-25).

*Pincherle* (*S.*). — Sur un système d'intégrales elliptiques considérées comme des fonctions de l'invariant absolu. (74-80).

Soient $a_x^4$ la forme biquadratique dont la racine carrée entre dans les intégrales

elliptiques, et $g_2 = (ab)^4$, $g_3 = (bc)^2(ca)^2(ab)^2$ ses invariants quadratique et cubique. Alors on peut toujours réduire $a_x^4$ à la forme

$$t^3 - 3tx + 1 = (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3),$$

étant

$$3x = \frac{g_2}{\sqrt[3]{4 g_3^2}} \text{ (invariant absolu).}$$

L'auteur considère les intégrales

$$(1) \qquad \sigma_n(x) = \int_0^{e_1} \frac{t^n\,dt}{\sqrt{t^3 - 3tx + 1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

et montre qu'elles forment un système récurrent que l'on peut rapprocher de celui des fonctions sphériques $Q_n$ de seconde espèce. D'abord il trouve la fonction génératrice du système (1) qui est la suivante :

$$V(u, x) = \int_0^{e_1} \frac{dt}{(u - t)\sqrt{t^3 - 3tx + 1}},$$

et il en déduit l'équation récurrente du troisième ordre

$$(2) \qquad (2n + 1)\sigma_{n+1} - 3x(2n - 1)\sigma_{n-1} + 2(n - 1)\sigma_{n-2} = 0,$$

avec la condition initiale

$$(3) \qquad x\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{2}{3}.$$

Puis il démontre que les $\sigma_n$ sont des fonctions analytiques de $x$ régulières autour de $x = \infty$ et de l'ordre $-(n + 1)$. Cette propriété, jointe aux équations (2), (3), suffit pour déterminer les $\sigma_n$ ; mais on peut aussi les déterminer, en partant de $\sigma_0$, $\sigma_1$ comme données, et en leur appliquant l'algorithme généralisé des fractions continues. De cette manière l'auteur rattache aux $\sigma_n$ certains polynomes rationnels entiers $P_n$, satisfaisant à la relation récurrente

$$2(n + 1)P_{n+1} - 3(2n + 1)xP_n - (2n - 1)P_{n-2} = 0,$$

avec les valeurs initiales $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$, $P_1 = -\frac{3}{2}x$, et qui peuvent aussi être définis comme les coefficients du développement de $\left(\sqrt{t^3 - 3xt + 1}\right)^{-1}$ en série de puissances entières et positives de $t$. Enfin l'auteur donne le développement en série de $\sigma_n$ pour une fonction donnée $f(x)$ régulière autour de $\infty$, et en série de $P_n$ pour une fonction régulière autour de o.

*Giacomelli (F.)*. — Troisième série de mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à l'observatoire royal du Capitole. (80-87).

*Tacchini (P.)*. — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'observatoire royal du Collège romain, pendant 1890. (136-140).

*Betti* (*E.*). — Sur un théorème de Mécanique. (159-160).

Dans un espace S où agissent une force translatoire et une force rotatoire variables, considérons un volume V aussi petit que l'on puisse négliger les deuxièmes puissances de ses dimensions par rapport aux premières, et de forme telle que l'on ait

$$\int \xi_1^2 \, dV = \int \xi_2^2 \, dV = \int \xi_3^2 \, dV = l^2 V,$$
$$\int \xi_{i+1} \xi_{i+2} \, dV = 0,$$

où $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ sont les coordonnées d'un point de V, l'origine étant placée au centre de gravité O. Soient $VX_i$ les composantes en O des forces translatoires qui agissent sur les points de V, et $VR_i$ les composantes en O des forces rotatoires; soit $\tau$ le temps nécessaire pour la communication des mouvements d'un point à un autre de V. Cela posé, l'auteur établit les équations

$$A \frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial L_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \frac{\partial L_{i+2}}{\partial x_{i+1}},$$
$$A \frac{\partial L_i}{\partial t} = \frac{\partial X_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_{i+2}},$$

que Hertz a données pour les forces électriques et magnétiques, étant

$$\frac{1}{A} = \frac{l}{\tau}$$

et

$$R_i = l L_i.$$

*Capelli* (*A.*). — Sur une extension du développement par polaires des formes algébriques à plusieurs séries de variables. (161-167).

L'auteur établit la formule

$$F = K \, \Delta F + \sum_i \Delta_i'' \Delta_i' F,$$

où K est une opération polaire ayant la propriété commutative avec toute autre opération polaire, et les $\Delta_i' F$ contiennent seulement $n-1$ des $n$ séries de variables.

*Volterra* (*V.*). — Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique. (177-188).

L'auteur étudie les équations de Hertz

$$\lambda_{r,r} \frac{\partial X_r}{\partial t} + \lambda_{r,r+1} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial t} + \lambda_{r,r+2} \frac{\partial X_{r+2}}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \nu_{r,r} X_r + \nu_{r,r+1} X_{r+1} + \nu_{r,r+2} X_{r+2},$$
$$\mu_{r,r} \frac{\partial L_r}{\partial t} + \mu_{r,r+1} \frac{\partial L_{r+1}}{\partial t} + \mu_{r,r+2} \frac{\partial L_{r+2}}{\partial t} = \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}},$$

au point de vue des questions de calcul des variations qui peuvent leur donner origine. Dans ces équations les $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont des fonctions finies et continues dans tout l'espace ainsi que leurs dérivées, et indépendantes de $t$. Après avoir examiné quelques cas où certaines conditions sont imposées aux coefficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$, il considère le cas général et trouve que les équations de Hertz peuvent provenir de

$$\delta \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}\, dt = 0,$$

étant

$$\begin{aligned}\mathrm{P} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \Big[ &- \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{A}_s}{\partial t} + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial \mathrm{B}_r}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{B}_s}{\partial t} \\ &- \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{A}_{r,s} \left( \frac{\partial \mathrm{B}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{B}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \Sigma_h \nu_{rh} \mathrm{A}_h \right) \left( \frac{\partial \mathrm{B}_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial \mathrm{B}_{s+1}}{\partial x_{s+2}} - \Sigma_h r_{sh} \mathrm{A}_h \right) \\ &+ \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{M}_{r,s} \left( \frac{\partial \mathrm{A}_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{A}_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left( \frac{\partial \mathrm{A}_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial \mathrm{A}_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \Big] d\mathrm{S},\end{aligned}$$

où les $\mathrm{A}_r$, $\mathrm{B}_r$ sont supposées infiniment petites du second ordre à distance infinie, et leurs variations sont supposées nulles aux limites $t_0$ et $t$.

*Millosevich* (*E.*). — Découverte et observations d'une petite planète entre Mars et Jupiter. (196).

*Padova* (*E.*). — Sur les équations générales de la Dynamique. (197-203).

Soient $q_i$ les coordonnées qui déterminent la position d'un système. M. Padova appelle *accélération spontanée* du système le complexe des accroissements $\chi_i\, dt$ que l'on doit donner dans le temps $dt$ aux vitesses $q'_i$ pour que pendant cet instant la force vive reste constante, quel que soit le système des vitesses, pourvu qu'il soit conciliable avec les liaisons imposées au système donné. Les accroissements effectifs des vitesses étant $q''_i\, dt$, on pourra calculer l'accroissement de la force vive pour les accroissements $(q''_i - \chi_i)\, dt$, et l'on aura une expression différentielle. Le coefficient de $dq_i$ dans cette expression est la *force suivant la coordonnée* $q_i$; et voilà à la fois une nouvelle définition de force, et une nouvelle méthode pour établir les équations du mouvement. L'auteur justifie cette méthode en montrant qu'elle conduit aux équations ordinaires dans tous les cas considérés jusqu'ici : cas de $u$ masses libres; cas où il y a entre les coordonnées des points des relations en termes finis ne contenant pas le temps explicitement; mouvement d'un fil flexible et inextensible, et d'un fil élastique; mouvement d'une surface flexible et inextensible; cas d'un fluide incompressible; cas d'un corps élastique non soumis à des forces extérieures. Après il applique sa méthode à un cas nouveau en supposant un milieu anélastique, mais capable de faire un travail lorsqu'on change l'orientation de ses molécules, et trouve les équations d'équilibre, qui sont

$$\mathrm{X} = \frac{d\mu}{dz} - \frac{d\nu}{dy}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{d\nu}{dx} - \frac{d\lambda}{dz}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{d\lambda}{dy} - \frac{d\mu}{dx},$$

pour les points intérieurs, et

$$X_n = \mu \cos(nz) - \nu \cos(ny),$$
$$Y_n = \nu \cos(nx) - \lambda \cos(nz),$$
$$Z_n = \lambda \cos(ny) - \mu \cos(nx),$$

pour les points de la surface. Si $u$, $v$, $w$ sont les composantes d'un système de déplacements arbitraires, mais continus, donnés aux points de l'espace, et si l'on pose

$$a = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad b = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \qquad c = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$$

la condition pour que le principe de l'énergie soit vérifié est que $\lambda$, $\mu$, $\nu$ soient les dérivées par rapport à $a$, $b$, $c$ d'une même fonction P. (C'est cette fonction que l'auteur appelle *potentiel d'orientation* dans la Note suivante : *Interprétation mécanique des formules de Hertz*).

## *Padova* (*E.*). — Interprétation mécanique des formules de Hertz. (204-209).

L'auteur reprend en examen le cas étudié en dernier lieu dans la Note précédente. C'est-à-dire qu'il se propose de voir quelles seraient les équations du mouvement d'un milieu continu tel que ses parties ne puissent faire une rotation sans faire un travail. La différence entre un tel milieu et un milieu élastique consiste en ce que le milieu en question n'oppose aucune résistance au mouvement tendant à éloigner ou rapprocher ses molécules les unes des autres, mais l'oppose toujours lorsqu'on tâche de changer l'orientation des molécules. Les équations du mouvement ont la même forme que celles de l'électrodynamique et se prêtent ainsi à en donner une interprétation mécanique.

En supposant que l'éther ait la constitution attribuée à ces milieux, les forces électriques seraient représentées par des vecteurs proportionnels aux vitesses, et les forces magnétiques par d'autres vecteurs, qui devraient être les dérivées du *potentiel d'orientation* par rapport aux rotations. Dans un tel milieu les vibrations se transmettraient transversalement comme celles de la lumière.

## *Ciani* (*E.*). — Sur le pentaèdre complet. (209-216).

L'auteur étudie la figure constituée par les cinq faces, les dix sommets, et les dix arêtes d'un pentaèdre complet, ainsi que par ses diagonales et ses plans diagonaux. Il appelle *diagonales de première espèce* les droites qui unissent deux sommets correspondants : ce sont deux sommets dont l'un est sur l'arête opposée à l'autre. Parmi les résultats obtenus par l'auteur nous citerons les suivants :

Les diagonales de première espèce se rencontrent, en dehors des sommets, en 15 points, qui donnent, deux à deux, 30 droites passant trois à trois par les sommets du pentaèdre.

Ces 15 points sont appelés par l'auteur les *points de première espèce*, et comme il démontre ensuite, ces 15 points sont tous sur une même surface du second ordre, et six à six sur dix coniques.

*Ciani* (*E.*). — Sur la surface diagonale de Clebsch. (227-234).

L'auteur applique les résultats de sa Note précédente au pentaèdre d'une surface du troisième ordre. Il examine, en particulier, le cas où la surface passe par les 10 sommets de son pentaèdre (*Surface diagonale*).

*Millosevich* (*E.*). — Découverte et observations de la planète (307) entre Mars et Jupiter. (257).

*Millosevich* (*E.*). — Observations de la nouvelle comète Barnard-Denning faites à l'équatorial de 25cm de l'observatoire royal du Collège romain. (258).

*Favero* (*G.-B.*). — Sur une formule récente pour exprimer les racines de l'équation générale algébrique. (373-378).

L'auteur donne une transformation de la série trouvée par Heymann pour exprimer les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines (Heymann, *Studien über die Transformation und Integration der Differential und Differenzengleichungen*, Leipzig, 1891).

Cette transformation a pour but d'ôter toute ambiguïté qui resterait sans cela dans la formule à cause des exposants fractionnaires, et principalement de rendre possible la recherche des points singuliers de la fonction définie par cette série.

*Pittarelli* (*G.*). — Sur les lignes asymptotiques d'une classe de surfaces gauches de genre zéro. (391-396).

Les surfaces sont supposées à deux directrices multiples distinctes. M. Cremona a démontré que leurs asymptotiques sont algébriques.

L'auteur établit ce théorème sans intégration, au moyen d'un théorème de M. Lie, et retrouve par cette voie l'équation de l'image du faisceau des asymptotiques. Une quelconque de ces images donne une transformation involutive de Jonquières dans le plan de la représentation, et dans l'espace à cette représentation correspond une transformation par dualité de la surface en elle-même.

*Pittarelli* (*G.*). — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches rationnelles de Cayley. (482-456).

Recherche analogue à la précédente pour le cas où les deux directrices multiples soient infiniment rapprochées.

*Pincherle* (*S.*). — Un théorème sur les fractions continues. (604-607).

L'auteur trouve la formule

$$\frac{a_{\mu-2}}{b_{\mu-2} - \dfrac{a_{\mu-1}c_{\mu-2}}{b_{\mu-1} + \dfrac{a_\mu c_{\mu-1}}{b_\mu + \dots}}} = \frac{\displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{-\mu}\, dz}{\displaystyle\int_{(l_1)} \varphi_1(z)\, z^{1-\mu}\, dz}$$

2^e^ semestre.

*Bianchi (L.).* — Sur les groupes de substitutions linéaires et sur les formes quadratiques de Dirichlet et de Hermite. (3-11).

Dans la substitution linéaire à coefficients complexes

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

supposons que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ puissent prendre tous les valeurs entières complexes du champ quadratique

$$(1, i\sqrt{D}),$$

ou de l'autre

$$\left(1, \frac{-1+i\sqrt{D}}{2}\right),$$

D étant réel et positif, et, dans le second champ, de la forme $4n+3$. L'auteur donne les polyèdres fondamentaux pour $D = 2, 5, 6, 7, 11, 15$, et indique quelques conséquences relatives aux formes quadratiques de Dirichlet (à coefficients complexes) et de Hermite (à variables conjuguées).

*Del Re (A.).* — Sur cinq surfaces du cinquième ordre ayant des droites simples et doubles et une droite triple. (11-18).

Ces surfaces sont engendrées comme surfaces fondamentales dans un connexe (1, 2) de l'espace. L'auteur en donne les équations et en étudie les propriétés et les dégénérations.

*Morera (G.).* — Sur les équations fondamentales de la Thermodynamique. (54-58).

Les équations générales de la Thermodynamique sont établies par l'auteur en prenant un système de variables indépendantes tout à fait quelconque.

*Del Re (A.).* — Sur les couples de formes bilinéaires ternaires. (88-94).

Deux couples de formes bilinéaires symétriques à variables cogrédientes

$$\varphi = \Sigma\varphi_{ik}x_i y_k, \qquad \psi = \Sigma\psi_{ik}x_i y_k,$$
$$\varphi' = \Sigma\varphi'_{ik}x_i y_k, \qquad \psi' = \Sigma\psi'_{ik}x_i y_k$$

sont équivalentes par rapport aux transformations du groupe linéaire réel, si cela a lieu pour les deux formes bilinéaires à variables contregrédientes

$$\theta = (\varphi, \psi), \qquad \theta' = (\varphi', \psi');$$

il y a exception pour le cas où le déterminant caractéristique de $\theta = 0$ a ses racines réelles, car il faut alors ajouter la condition que les deux couples de

formes quadratiques

$$\varphi = \Sigma\varphi_{ik}x_i x_k, \qquad \psi = \Sigma\psi_{ik}x_i x_k,$$
$$\varphi' = \Sigma\varphi'_{ik}x_i x_k, \qquad \psi' = \Sigma\psi'_{ik}x_i x_k$$

aient nombre égal de solutions réelles communes.

*Del Re* (*A.*). — Sur une surface du cinquième ordre douée d'une droite triple, de droites doubles et droites simples. (111-119).

L'auteur étudie ici, en particulier, une des cinq surfaces trouvées dans la Note précédente, principalement au point de vue de sa représentation plane.

*Morera* (*G.*). — Sur les chaleurs spécifiques des vapeurs. (119-125).

*Cavalli* (*E.*). — Contribution à la théorie des turbines hélicoïdales. (145-151).

*Tessari* (*D.*). — Sur les engrenages hyperboloïdiques à flancs plans. (192-196).

*Castelnuovo* (*G.*). — Quelques observations sur les séries irrationnelles de groupes de points sur une courbe algébrique. (294-299).

En appliquant une formule de M. Segre, l'auteur donne une extension du théorème de Riemann-Roch aux séries irrationnelles (simplement infinies). Puis il établit une relation passant par les points doubles d'une série irrationnelle.

S. R.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXV, 1892 [1].

*Boussinesq.* — Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire : vérifications expérimentales. (5-11).

*Defforges.* — De la nature de la rotation du couteau d'un pendule sur son plan de suspension. (28-32).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. $XVIII_2$, p. 71.

*Schlesinger.* — Sur les formes primaires des équations différentielles linéaires du second ordre. (32-34).

*Boussinesq.* — Sur une légère correction additive qu'il peut y avoir lieu de faire subir aux hauteurs d'eau indiquées par les marégraphes quand l'agitation houleuse ou clapoteuse de la mer atteint une grande intensité; cas d'une mer houleuse. (77-82).

On admet généralement que le meilleur moyen de connaître le niveau de la mer tel qu'il serait sans l'agitation des vagues consiste à prendre ce niveau dans un petit bassin latéral communiquant avec la mer. Toutefois une étude un peu attentive montre que l'eau tranquille du bassin se maintient au-dessus du centre de l'orifice de communication à la hauteur précise pour laquelle sa pression hydrostatique sur ce centre égale la *moyenne* des pressions successives qu'y exerce le liquide agité.

Or M. de Caligny a constaté que la moyenne en question était inférieure à la pression constante qu'exercerait le même fluide au repos. Il y a donc lieu de voir dans quel cas la correction correspondante $\Delta$ deviendrait sensible et devrait être ajoutée à la hauteur indiquée par le marégraphe dans le bassin latéral, pour donner le vrai niveau de la mer censée rendue au calme.

Soient $z$ la profondeur du centre de l'orifice de communication au-dessous de la surface horizontale d'équilibre actuel; H la profondeur moyenne totale de la mer non loin du bassin; $2L$ la longueur des vagues; $2\eta$ leur hauteur.

La correction $\Delta$ est donnée, suivant M. Boussinesq, par la formule

$$\Delta = \frac{\pi\eta_1^2}{2L} e^{-\frac{2\pi z}{L}} \frac{\left(1 - e^{-2\pi\frac{H-z}{2L}}\right)^2}{1 - e^{-4\pi\frac{H}{L}}}.$$

Elle est maximum, dans le cas d'une mer de profondeur infinie, et alors elle prend la forme simple

$$\Delta = \frac{\pi\eta_1^2}{2L} e^{-\frac{2\pi z}{L}}.$$

*Boussinesq.* — Sur une légère correction additive qu'il peut y avoir lieu de faire subir aux hauteurs d'eau indiquées par les marégraphes quand l'agitation houleuse ou clapoteuse de la mer atteint une grande intensité; cas d'une mer clapoteuse. (149-152).

S'il s'agit d'un clapotis produit par la superposition d'un système d'ondes directes propagées vers la côte et du système des ondes réfléchies correspondantes en s'éloignant; il ne suffit plus, comme dans le cas de la houle, d'évaluer, pour toute la partie du plan $z =$ const. que recouvre une vague, la valeur moyenne de ce qu'est aux divers points la dépression moyenne $\Delta$ prise pendant la durée d'une période, car cette dépression n'est plus la même sur tout le

plan $z$ = const. Il faut déterminer $\Delta$ pour une abscisse particulière, savoir au ventre des oscillations verticales constitué par la côte.

M. Boussinesq trouve pour la dépression produite dans le marégraphe au-dessous du niveau moyen de la surface clapoteuse

$$\Delta = \frac{\pi h_1^2}{4L} e^{-\frac{2\pi z}{L}} \frac{1 + 4e^{-2\pi\frac{H-z}{L}} - e^{-4\pi\frac{H}{L}}}{1 - e^{-4\pi\frac{H}{L}}}.$$

La dépression maxima correspondant à $H = \infty$, savoir

$$\Delta = \frac{\pi h_1^2}{4L} e^{-\frac{2\pi z}{L}},$$

est la moitié de ce qu'elle serait pour une houle de même hauteur et de même longueur d'onde que le clapotis considéré.

## *Demoulin.* — Sur les courbes tétraédrales symétriques. (280-282).

M. Jamet a énoncé la proposition suivante :

Un point M étant pris arbitrairement sur une courbe tétraédrale (T), considérons la cubique gauche (C) tangente en M à la courbe tétraédrale et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.

1° La courbe tétraédrale et la cubique gauche ont au point M même plan osculateur;

2° Lorsque le point M se meut sur la courbe tétraédrale, le rapport des courbures en M de la cubique gauche et de la courbe tétraédrale demeure constant.

M. Demoulin complète ce théorème en démontrant que :

3° Au point M, la courbe tétraédrale et la cubique gauche ont des torsions égales.

## *Liouville (R.).* — Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique. (403-406).

L'auteur s'est occupé antérieurement des cas où les équations différentielles d'un système de points en mouvement jouissent des propriétés suivantes : 1° il existe une intégrale des forces vives; 2° à chaque système il en correspond au moins un autre ayant en commun avec le premier les équations des trajectoires.

Les résultats obtenus par l'auteur correspondaient aux cas où les forces sont nulles et conséquemment à tous ceux où, les forces étant dérivées d'un potentiel, la constante des forces vives est regardée comme donnée.

Quand le nombre des variables est supérieur à deux, on ne connaît, suivant M. Liouville, hormis un cas très spécial étudié par lui-même, aucune solution du problème dont il s'agit. Il en indique actuellement plusieurs qui conviennent pour un nombre quelconque de variables et qui sont intéressantes en raison de leur étendue.

*Serret* (*P.*). — Sur une série récurrente de pentagones inscriptibles à une même courbe générale du troisième ordre, et que l'on peut construire par le simple emploi de la règle. (406-408).

Si l'on imagine dans le plan une suite indéfinie de pentagones dérivés linéairement les uns des autres de telle façon que chacun d'eux soit doublement inscrit à celui qui le précède et au pentagone *étoilé* de mêmes sommets que celui-là, tous ces pentagones se trouveront inscrits à une seule et même cubique.

De plus, ces pentagones, pris de trois en trois, se trouveront deux à deux en perspective suivant autant de centres d'homologie distincts situés encore sur la courbe et déterminant sur celle-ci une série tangentielle, de sorte que chaque nouveau centre d'homologie représente le *tangentiel* du précédent.

Enfin, les pentagones successifs forment, à leur tour, une série tangentielle, les sommets de l'un quelconque d'entre eux ayant pour tangentiels les sommets homologues du pentagone suivant. Ils peuvent, d'ailleurs, quoique séparés les uns des autres par des intervalles finis, être conçus comme appartenant à une série continue dépendant d'un seul paramètre $\lambda$. Dès lors, les abscisses de leurs sommets pouvant être considérées comme racines d'une résolvante du cinquième degré, dont les coefficients sont fonctions de $\lambda$, il résulte de la construction *linéaire* des pentagones considérés, qu'il existe une infinité de valeurs du paramètre, pour lesquelles toutes les racines de la résolvante sont commensurables.

*Serret* (*P.*). — Sur une série récurrente de pentagones inscrits à une courbe générale du troisième ordre. (436-438).

*Painlevé*. — Sur les transformations des équations de Lagrange. (495-498).

Suite de la discussion engagée entre l'auteur et M. R. Liouville, à propos de la démonstration du théorème de Mécanique établi par M. Painlevé.

*Pellet*. — Sur une classe de courbes et de surfaces. (498-499).

Le théorème de M. Jamet sur les courbes triangulaires symétriques peut s'étendre aux courbes plus générales

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0,$$

où X, Y, Z sont des fonctions quelconques des coordonnées courantes.

Pour une valeur donnée de $m$, il y a une seule de ces courbes $C_m$ tangente à une droite D en un point M (non situé sur l'une des courbes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$).

Si l'on connaît, pour deux valeurs de $m$, le rayon de courbure de $C_m$ au point M, on pourra, par des équations du premier degré, en déduire le rayon de courbure en M, point de contact commun de la courbe $C_m$, pour toute valeur de $m$.

Les surfaces

$$AX^m + A_1X_1^m + A_2X_2^m + A_3X_3^m = 0$$

jouissent de propriétés analogues. Pour une valeur de $m$, il y a une seule surface $S_m$ tangente en un point M à un plan P, pourvu que le point M ne soit pas situé sur une des surfaces $X = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

Si l'on connaît les éléments du second ordre pour deux surfaces $S_m$, on en déduira, par des équations du premier degré, les éléments du second ordre en M de la surface $S_m$ pour toute valeur de l'exposant $m$.

Lorsque les fonctions $X_k$ sont entières et du premier degré, les indicatrices des surfaces $S_m$ sont homothétiques au point de contact M.

Lorsque les surfaces $X_k = 0$ sont des sphères, toutes les surfaces $S_m$ ont mêmes sections principales au point M.

## *Floquet.* — Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. (499-502).

L'auteur donne aux équations du mouvement d'un fil une forme qui en facilite l'étude dans plusieurs cas importants.

Soit $s$ l'abscisse curviligne d'un point M du fil flexible et inextensible, comptée sur le fil à partir d'un point déterminé. Soient, au temps $t$, $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les projections, sur la tangente, la normale principale et la binormale en M, de la rotation instantanée du trièdre formé par ces trois droites et de la vitesse du point M; $p_1$, $q_1$, $r_1$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, les projections analogues de la rotation du trièdre et de la vitesse de M, lorsque $s$, variant seul, est assimilé au temps.

La Cinématique fournit, entre les rotations et les translations, les six relations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial s} - \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = q r_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial s} = \eta r_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial s} = r p_1 - p r_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial s} = r - \xi r_1 - \zeta p_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial s} - \dfrac{\partial r_1}{\partial t} = - q p_1, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial s} = \eta p_1 - q. \end{cases}$$

La Dynamique fournit les trois autres équations

$$(2)\quad \begin{cases} m\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + q\zeta - r\eta\right) = \dfrac{\partial T}{\partial s} + m\Phi, \\ m\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t} - r\xi - q\zeta\right) = T r_1 + m\Psi, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + p\eta - q\xi = X, \end{cases}$$

où $m$ est le produit de l'épaisseur du fil en M par sa densité, et $\Phi$, $\Psi$, X les projections sur la tangente, la normale principale et la binormale de la force extérieure rapportée à l'unité de masse, et T la torsion.

Les équations (1) et (2), dans le cas du mouvement plan, se réduisent à celles que M. Resal a données dans son *Traité de Mécanique générale* (t. I, p. 321 et suiv.).

## *Picard.* — Sur l'application aux équations différentielles ordinaires de certaines méthodes d'approximations successives. (543-549).

L'auteur commence par rappeler la méthode d'approximation qui lui a servi (*Journal de Mathématiques*, 1890) à démontrer l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.

Soit le système de quatre équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots), \qquad \frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots), \qquad \ldots.$$

Pour avoir les intégrales $u$, $v$, ... prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs $u_0$, $v_0$, ..., on considère d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots), \qquad \frac{dv_1}{dx} = f_2(x, u_0, v_0, \ldots), \qquad \ldots.$$

On en tire, par quadrature, les fonctions $u_1$, $v_1$, ... en les déterminant de manière qu'elles prennent pour $x_0$ les valeurs données. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots), \qquad \frac{dv_2}{dx} = f_2(x, u_1, v_1, \ldots), \qquad \ldots,$$

et l'on détermine $u_2$, $v_2$, ... par les mêmes conditions initiales. On continue ainsi indéfiniment et l'on montre que $u_m$, $v_m$, ... ont des limites qui donnent le système cherché d'intégrales si $x$ est suffisamment voisin de $x_0$.

M. Picard indique quelques applications intéressantes à des classes particulières d'équations.

Il suppose d'abord que, $x$ restant positif, les fonctions $f$ sont positives et croissent avec $u$, $v$, ...; que, de plus, les dérivées partielles du premier ordre de $f$ par rapport à $u$, $v$, ... vont en décroissant quand $u$, $v$, ... augmentent. Dans ces conditions, on a un système d'intégrales $u$, $v$, ... s'annulant pour $x = 0$ et restant finies pour toute valeur positive de $x$. Peut-on, à l'aide des approximations successives, obtenir un développement en série de ces intégrales valable pour toute valeur positive de $x$? Il en est bien ainsi; mais la démonstration est délicate, parce que, de ce que $u_m$, $v_m$ ont des limites, il ne s'ensuit pas que ces limites doivent nécessairement représenter les intégrales.

Mais tout autres sont les circonstances quand les fonctions $f$, toujours positives, vont en décroissant lorsque $u$, $v$, ... augmentent à partir de zéro. Si l'on fait les approximations successives, les termes à indices pairs ont une limite, les termes à indices impairs en ont, en général, une autre.

M. Picard passe ensuite à une seconde méthode d'approximation qui correspond à des problèmes tout différents. Soit le système

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f_1\left(x, u, v, \ldots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots\right), \quad \frac{d^2v}{dx^2} = f_2\left(x, u, v, \ldots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots\right), \quad \ldots,$$

les fonctions $f$ étant supposées continues lorsque leurs arguments restent compris entre certaines limites, et notamment $x$ entre $a$ et $b$; il s'agit d'obtenir les intégrales qui pour $x = a$ prennent les valeurs données $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ et pour $x = b$ les valeurs $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$.

La méthode d'approximation consiste à partir d'un système arbitraire de fonctions satisfaisant aux conditions initiales et finales. On mettra ces fonctions dans les seconds membres des équations données et l'on déterminera, par des quadratures, les fonctions $u_1$, $v_1$, ... satisfaisant aux équations ainsi obtenues

et aux équations aux limites; on substituera alors les fonctions $u_1$, $v_1$, ... dans les seconds membres, et ainsi de suite. Les expressions $u_m$, $v_m$, ... convergeront certainement vers le système d'intégrales cherchées dans l'intervalle $(a, b)$, si $b$ satisfait à certaines inégalités que M. Picard enseigne à former.

Ces inégalités restreignent souvent plus qu'il n'est nécessaire le champ de convergence. Il est facile de l'agrandir dans des cas très étendus, notamment dans le cas où les fonctions sont périodiques par rapport à $x$. M. Picard donne des criterium d'une application facile pour reconnaître si, dans certains de ces cas, les solutions sont périodiques elles-mêmes.

La méthode d'approximation imaginée par M. Picard intéresse les solutions des problèmes de Mécanique et spécialement les solutions périodiques dans le voisinage d'une position d'équilibre.

## *Autonne.* — Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (587-589).

M. Autonne présente une théorie des intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre, ou, ce qui revient au même, des *intégrantes* algébriques G tracées sur la surface F qui représente l'équation.

L'auteur appelle *nœud* tout point nodal dont l'exposant est égal au quotient de deux entiers positifs; tout nodal qui n'est point un nœud sera un *col*. La surface F la plus générale de son degré N a $N(N^2 - 2N + 2)$ cols tous distincts.

Dès lors on peut énoncer le théorème suivant qui ramène la recherche de toutes les intégrantes algébriques tracées sur F à des calculs élémentaires :

Le degré de ces intégrantes G ne peut dépasser le plus grand entier [N] contenu dans la fraction

$$\frac{N(N^2+6N-11)}{3(N-2)};$$

G n'a d'autres points multiples que les points doubles à tangentes distinctes; ces points sont tous des cols de F; les deux tangentes sont les asymptotes de l'indicatrice.

Malheureusement, ce théorème ne résout pas dans tous les cas possibles le problème de la recherche des intégrales algébriques : 1° parce que la surface F la plus générale de son degré ne représente pas l'équation la plus générale du premier ordre; 2° parce que l'existence sur F d'intégrantes algébriques n'entraîne pas toujours celle de nœuds.

Toutefois la méthode réussit pleinement dans le cas de la surface cubatique F $[N = 3, (N) = 7]$. Il n'existe alors sur F que *treize* intégrantes algébriques, que M. Autonne énumère. Ce résultat fournit toutes les intégrales algébriques d'une équation du premier ordre, du premier degré, de dimension quatre, *réglementaire* et pourvue des six *points dicritiques*.

## *Caronnet.* — Sur les centres de courbure géodésique. (589-592).

1° Pour que les droites qui joignent les centres de courbure géodésique d'un système orthogonal quelconque engendrent une congruence de normales, il faut et il suffit que les courbures géodésiques correspondantes soient fonctions l'une de l'autre;

2° Pour qu'une droite qui joint un centre de première courbure principale au centre de seconde courbure géodésique engendre une congruence de nor-

males, il faut et il suffit que les courbures considérées soient fonctions l'une de l'autre.

L'auteur fait une application de ces deux théorèmes aux surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système.

## *Stodolkievitz.* — Sur le problème de Pfaff. (592-595).

L'auteur fait connaître une méthode pour arriver aux conditions d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n = 0,$$

lorsqu'elle n'a que deux intégrales, et ensuite, ces conditions étant supposées remplies, pour former ces deux intégrales.

## *Poincaré.* — Sur l'*Analysis situs.* (633-636).

Désireux de généraliser ses belles recherches sur la connexion des surfaces de l'espace ordinaire, Riemann s'était appliqué à l'étude des hyperespaces au point de vue de l'*Analysis situs.* Les fragments qu'il a laissés sur ce sujet sont très incomplets. Betti a retrouvé et complété les résultats de Riemann. Considérant une surface à $n$ dimensions dans l'espace à $n+1$ dimensions, il a défini $n-1$ nombres qu'il appelle les $n-1$ ordres de connexion de la surface.

Mais les nombres de Betti suffisent-ils pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'*Analysis situs*? Étant données deux surfaces fermées qui possèdent les mêmes nombres de Betti, peut-on toujours passer de l'un à l'autre par déformation continue? Cela est vrai dans l'espace à trois dimensions, mais cela ne l'est plus dans un espace quelconque.

Pour le faire voir, M. Poincaré envisage $p$ fonctions quelconques

$$F_1, F_2, \ldots, F_p$$

des $n+1$ coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un point de la surface. Quand le point décrit sur la surface un contour fermé *fini,* il pourra se faire que ces $p$ fonctions ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais subissent une substitution. Toutes les substitutions correspondant aux divers contours fermés sur la surface forment un groupe discontinu. Ce groupe G dépend du choix des fonctions F. Un groupe G correspondant à un autre choix de ces fonctions sera isomorphe à G.

Si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre par déformation continue, leurs groupes sont isomorphes, et *réciproquement.* Donc ce qui définit une surface fermée au point de vue de l'*Analysis situs,* c'est son groupe.

On est donc ramené au problème suivant : Deux surfaces fermées qui ont mêmes nombres de Betti ont-elles toujours des groupes isomorphes? M. Poincaré répond à cette question par la négative.

## *Liouville* (*R.*). — Sur les équations de la Dynamique. (646-648).

Suite de la discussion engagée entre l'auteur et M. Painlevé.

*Vallier.* — Sur la solution du problème balistique. (648-651).

L'auteur indique une méthode plausible pour l'évaluation du paramètre auxiliaire $m$ qu'on introduit dans le problème balistique afin de rendre possible l'intégration des équations du mouvement.

On remplace l'expression $f(v)$ qui représente la résistance de l'air par une autre fonction $F(x, m)$, où $x$ est l'abscisse horizontale du projectile, et la question est de déterminer $m$ dans chaque cas particulier de manière à rendre aussi faible que possible l'erreur commise sur l'ordonnée par cette substitution de $F(x, m)$ à $f(v)$.

En s'aidant de la théorie des fractions continues algébriques et d'un théorème de M. Markoff sur le calcul approché des intégrales, M. Vallier parvient à la règle suivante :

1° Calculer par les formules approchées usuelles les éléments du sommet et ceux du point dont l'abscisse est $0,225x_s$ ($x_s$ abscisse du sommet);

2° Avec les éléments ainsi déterminés former et résoudre l'équation en $m$

$$8\,\frac{f(v_1) - F(x_1, m)}{v_1^4 \cos^3\theta_1} + 18\,\frac{f(v_s) - F(x_s, m)}{v_s^4} = 0;$$

$\theta_1$ est l'inclinaison sur l'horizontale de la tangente au point dont l'abscisse est $x_1 = 0,225x_s$.

*Painlevé.* — Sur la transformation des équations de la Dynamique. (714-715).

L'auteur précise les points sur lesquels la discussion s'est engagée entre M. R. Liouville et lui.

Le problème que s'est proposé M. Painlevé est le suivant : Étant donné un système (S) d'équations de Lagrange à $k$ variables $q_i$, où T est homogène par rapport aux vitesses et ne renferme pas le temps et où les forces ne dépendent ni des vitesses ni du temps, existe-t-il un autre système (S′) analogue, tel que les relations entre les $q_i$ définies par (S) et par (S′) coïncident?

M. Painlevé a démontré à ce sujet un théorème dont une conséquence générale est que les géodésiques relatives à T admettent une intégrale du second degré, s'il existe un système (S′) correspondant à (S).

M. Liouville a ensuite démontré une proposition qui complète ce théorème dans le cas *particulier* où les forces sont nulles dans les deux systèmes : « Quand les géodésiques relatives à T et à T′ coïncident, leurs équations admettent non seulement une intégrale, mais en général un système complet d'intégrales du second degré. »

Mais il ne semble pas à M. Painlevé que M. Liouville ait réussi par la méthode qu'il emploie à donner une démonstration correcte de son théorème général même dans le cas où les deux systèmes (S) et (S′) sont sollicités par des forces admettant un potentiel.

D'ailleurs, M. Painlevé fait remarquer que, quand un système S à potentiel admet un correspondant S′, S′ n'est pas en général une système à potentiel.

*Goursat.* — Sur l'inversion des intégrales abéliennes. (787-790).

Soit $f(x, y) = 0$ une équation algébrique de genre $p$. Soient

$$u^{(1)}(x, y), \quad u^{(2)}(x, y), \quad \ldots, \quad u^{(p)}(x, y)$$

les $p$ intégrales normales de première espèce, et

$$w^{(1)}(x, y), \quad w^{(2)}(x, y), \quad \ldots, \quad w^{(q)}(x, y)$$

$q$ intégrales abéliennes *quelconques* relatives à la courbe $f$.

On suppose que les $p+q$ intégrales $u^{(i)}$, $w^{(j)}$ sont distinctes et l'on forme le système d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} u^{(i)}(x_1, y_1) + \ldots + u^{(i)}(x_n, y_n) = u_i & (i = 1, 2, \ldots, p) \\ w^{(j)}(x_1, y_1) + \ldots + w^{(j)}(x_n, y_n) = w_j & (j = 1, 2, \ldots, q) \end{array}\right\} \quad n = p + q,$$

qui définissent les $n$ points analytiques $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ en fonction de $n$ variables indépendantes $u_i$, $w_j$.

Le problème de l'inversion, ainsi généralisé, se ramène, comme le montre M. Goursat, au problème ordinaire de l'inversion des intégrales de première espèce et à la résolution d'un certain nombre d'équations, en général transcendantes, d'une forme simple.

Il faut observer qu'en général, à cause de la transcendance des équations dont il s'agit, l'inversion ne peut se faire d'une manière uniforme. Si l'on cherche les conditions pour qu'il en soit ainsi, on retombe sur le cas traité par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1885).

## *D'Ocagne.* — Sur la sommation d'une certaine classe de séries. (790-792).

Soit S une série

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots,$$

définie par la valeur du premier terme $U_0$ et l'échelle de récurrence variable

$$U_n = U_{n-1} f(0) + U_{n-2} f(1) + \ldots + U_0 f(n-1),$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré $p$ en $x$.

Si l'on pose

$$A_i = f(i-1) + C_{p+1}^1 f(i-2) + \ldots + (-1)^{i-1} C_{p-1}^{i+1} f(0) + (-1)^i (-C_{p+1}^i)$$

et que l'on forme le polynôme

$$F(x) = x^{p+1} + A_1 x^p + \ldots + A_p x + A_{p+1},$$

1° La condition nécessaire et suffisante pour que la série S soit convergente est que toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$ aient un module inférieur à 1;

2° Cette condition étant remplie, la somme de la série S est nécessairement zéro.

La démonstration de ces deux théorèmes repose sur un cas particulier d'une proposition très générale relative aux séries que M. d'Ocagne expose en terminant sa Communication.

*Liouville* (*R.*). — Sur les équations de la Dynamique. (792-793).

Réponse à la Note précédente de M. Painlevé.

*André* (*D.*). — Sur le partage en quatre groupes des permutations des $n$ premiers nombres. (872-874).

On sait que les permutations des $n$ premiers nombres sont de la première ou de la seconde *classe* selon qu'elles présentent un nombre pair ou impair de *dérangements;* de la première ou de la seconde *espèce,* selon qu'elles présentent un nombre pair ou impair de *séquences.* De là résulte que les permutations des $n$ premiers nombres se partagent en quatre groupes, savoir : 1° les permutations de la première espèce et de la première classe; 2° celles de la première espèce et de la seconde classe, etc.

L'étude de ces quatre groupes a conduit l'auteur, touchant la structure de ces permutations, à divers résultats qu'il expose sous forme de théorèmes.

*Painlevé.* — Rectification d'une faute d'impression dans une Communication sur les équations de la Dynamique. (874-875).

*Poincaré.* — Note accompagnant la présentation d'un Ouvrage relatif aux méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. (906-907).

M. Newcomb est parvenu à faire disparaître dans le développement des coordonnées des astres les termes *séculaires.* Voici quelle est la forme que prennent les développements de M. Newcomb (semi-convergents à la façon de la série de Stirling) après les modifications qu'y a introduites M. Poincaré.

Les coordonnées des trois corps sont développées suivant les puissances des masses et de quatre constantes d'intégration $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ qui jouent le rôle des excentricités et des inclinaisons. Chacun de ces développements est une fonction périodique de six arguments $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$. Les dérivées $\frac{d\omega_i}{dt}$ (moyens mouvements) et $\frac{d\omega'_i}{dt}$ sont des constantes elles-mêmes développables suivant les puissances des masses et des $\alpha_i$.

En outre, les coordonnées des trois corps dépendent des $\alpha_i$ et des $\omega'_i$ d'une manière particulière : elles sont développables suivant les puissances des $\alpha_i \cos\omega'_i$ et des $\alpha_i \sin\omega'_i$. Si l'on annule tous les $\alpha_i$, on retombe sur des séries convergentes qui représentent une solution particulière remarquable (*solution périodique de la première sorte*).

Mais, avant d'effectuer tous ces développements en parlant des équations du mouvement, il faut démontrer qu'ils sont légitimes. C'est ce qu'on peut faire en effet par l'emploi de la méthode de Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*).

Toutefois ce mode d'exposition n'est pas sans inconvénient. On peut le remplacer par l'emploi d'une méthode un peu différente, qui a l'avantage d'abréger le calcul et qui fait l'objet de la dernière partie de la Communication de M. Poincaré.

*Rabut.* — Sur les invariants universels. (926-929).

L'auteur appelle *invariant universel* toute combinaison des éléments d'une figure qui se reproduisent par une transformation. Un tel invariant est une fonction des coordonnées et coefficients différentiels d'une multiplicité d'éléments infinitésimaux de lignes ou de surfaces, distribuées arbitrairement dans l'espace. La transformation se réduit aussi à des relations entre les coordonnées et coefficients différentiels d'une multiplicité d'éléments analogues appartenant les uns à la figure primitive, les autres à la figure transformée. Dans l'espace à deux dimensions, si un élément unique de la première figure est lié à un élément de la seconde, ces relations sont de la forme

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^n, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Y}', \mathrm{Y}'', \ldots, \mathrm{Y}^{\mathrm{N}}) = 0;$$

l'invariant est fonction des $x_i$, $y_i$, $y'_i$, $y''_i$, ... d'une multiplicité d'éléments courbes. Tout groupe fini admet des invariants universels distincts des invariants différentiels ordinaires; en outre, des groupes infinis dépourvus d'invariants ordinaires ont des invariants universels.

L'auteur fait suivre ces généralités d'une étude détaillée des invariants ponctuels et des invariants de contact.

*Cosserat.* — Sur les congruences de droites. (929-931).

L'auteur envisage la congruence la plus générale comme engendrée de la manière suivante : le sommet M d'un trièdre trirectangle M$xyz$ décrit une surface (M) normale à M$z$; $x$ et $y$ étant deux fonctions des paramètres $u$, $v$, on fait correspondre à chaque position du trièdre une droite D parallèle à M$z$, les coordonnées du pied de cette droite sur le plan des $xy$ étant les valeurs des fonctions $x$, $y$; l'ensemble des droites D constitue la congruence la plus générale.

En traduisant analytiquement cette conception géométrique et en faisant usage des symboles de M. Christoffel, construits avec l'élément linéaire de la représentation sphérique des développables de la congruence, M. Cosserat obtient des équations d'une forme simple, qui permettent d'aborder les problèmes relatifs aux congruences de droites.

Parmi les résultats auxquels il parvient, signalons ceux-ci :

1° Le problème de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables d'une congruence (D) équivaut à celui de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables que (D);

2° L'équation de M. Guichard

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} + f\right)\varphi = 0$$

est caractérisée par cette propriété de son adjointe

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + f\varphi = 0$$

d'admettre trois solutions distinctes ayant la somme de leurs carrés égale à 1;

3° Si l'on considère les congruences admettant une représentation sphérique donnée de leurs développables, à toute solution de cette équation adjointe correspondent, pour chacune de ces congruences, une infinité de surfaces découpées par les développables de cette congruence suivant un réseau conjugué; deux quelconques de ces surfaces, appartenant soit à une congruence, soit à deux congruences différentes, ont aux points correspondants leurs plans tangents parallèles;

4° Si les congruences constituées par les axes optiques d'une surface (M) sont formées de normales à ces surfaces, cette surface (M) est à courbure totale constante.

*Tresse*. — Sur les groupes infinis de transformations. (1003-1006).

On sait que, dans ses travaux sur la théorie des groupes, M. Lie considère des groupes de transformations qui jouissent de cette propriété : si les équations

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

définissent la transformation la plus générale du groupe, les $x'$, fonctions des $x$, sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles

$$W_k\left(x_i, x'_j, \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu}, \frac{\partial^2 x'_\lambda}{\partial x_\nu\, dx_\rho}, \ldots\right) = 0. \tag{1}$$

M. Tresse montre que l'on peut donner à ces équations la forme

$$V_k\left(x'_j, \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu}\right) = \alpha_k(x_i).$$

La connaissance des invariants V permet, quelle que soit la nature de la multiplicité sur laquelle on effectue les transformations du groupe, d'obtenir, par de simples différentiations et éliminations, les invariants de la multiplicité ainsi transformée.

L'étude d'un pareil système d'invariants différentiels se rattache à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles. Étant donné un tel système d'équations auxquelles satisfait une multiplicité dépendant de constantes ou fonctions arbitraires, il existe un ordre limite tel que toutes les équations d'ordre supérieur auxquelles satisfait la multiplicité se déduisent des équations de cet ordre limite ou d'ordre inférieur par de simples différentiations.

De là résulte qu'il existe, pour un système d'invariants différentiels considéré ci-dessus, un ordre limite, tous les invariants d'ordre supérieur se déduisant de ceux de cet ordre limite ou d'ordre inférieur, en formant le quotient de deux déterminants fonctionnels.

Les invariants de l'ordre limite et d'ordre inférieur fournissent les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux multiplicités données puissent se ramener l'une à l'autre par une transformation du groupe.

*Le Vavasseur*. — Sur un problème d'analyse indéterminée qui se rattache à l'étude des fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques à deux variables. (1006-1009).

Trouver tous les systèmes de quatre nombres $a, b, c, d$, tels que les dix nombres

$$a+b-1,\quad a+c-1,\quad a+d-1,\quad b+c-1,\quad b+d-1,\quad c+d-1,$$
$$2-b-c-d,\quad 2-c-d-a,\quad 2-d-a-b,\quad 2-a-b-c$$

soient les inverses de nombres entiers.

M. Le Vavasseur résout complètement ce problème qu'il ramène à la résolution en nombres entiers d'un système de six équations simultanées.

## *Picard.* — Sur certaines solutions asymptotiques des équations différentielles. (1030-1031).

Soit un système d'équations du premier ordre

$$(S)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et convergentes quand ces modules des $x$ restent, quel que soit $t$ dans l'invariable de o à $+\infty$, inférieurs à un certain nombre; ces séries ne renferment pas de termes indépendants des $x$, et chacun de leurs coefficients est une fonction de $t$ dont la valeur absolue ne dépasse jamais une limite fixe.

M. Picard se place dans le cas où le système d'équations linéaires obtenu en ne conservant dans les équations (S) que les termes du premier degré en $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ admet une intégrale générale de la forme

$$x_i = C_1 e^{-\alpha_1 t} f_{i_1}(t) + \ldots + C_n e^{-\alpha_n t} f_{i_n}(t),$$

les $\alpha$ étant des constantes positives et les $f$ des fonctions dont la valeur absolue est inférieure à un nombre fixe.

Dans ces conditions, les intégrales du système (S) qui, pour $t = 0$, prendront des valeurs suffisamment petites, tendront vers zéro lorsque $t$ augmentera indéfiniment. Ces intégrales sont donc asymptotiques à zéro.

## *Fouret.* — Sur le lieu du centre des moyennes distances d'un point d'une épicycloïde ordinaire et des centres de courbure successifs qui lui correspondent. (1055-1056).

Lorsqu'un point décrit une épicycloïde ordinaire, le centre des moyennes distances de ce point et des centres de courbure successifs, en nombre quelconque, qui lui correspondent, engendre une épicycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, du même genre que la première.

## *Cels.* — Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (1057-1059).

Étant donnée une équation différentielle ordinaire

$$f(z) = z + a_1 z' + a_2 z'' + \ldots + a_n z^{(n)} = 0,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des fonctions quelconques de $x$, l'*adjointe de la première*

*ligne* est l'équation

$$\varphi(y) = y - a_1 y' + \frac{d}{dx}(a_2 y') + \ldots + (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(a_n y') = 0.$$

M. Cels définit cette adjointe d'une manière nouvelle, savoir par la propriété des fonctions $f$ et $\varphi$ de satisfaire à l'équation

$$\int [y' f(z) + z' \varphi(y)]\, dx = \psi(z, y),$$

$\psi(z, y)$ étant une fonction où figurent $z$, $y$ et leurs $n-1$ premières dérivées

$$\psi(z, y) = zy + z'\left[a_2 y' - \frac{d}{dx}(a_3 y') + \ldots\right]$$
$$+ z''\left[a_3 y' - \frac{d}{dx}(a_4 y') + \ldots\right] + \ldots + z^{(n-1)} a_n y'.$$

Les équations qui sont équivalentes à leur adjointe sont nécessairement de degré pair et l'on a

$$\int z' f(z)\, dx = \frac{1}{2}\psi(z, z).$$

Réciproquement, si le premier membre d'une équation différentielle $f(z) = 0$ devient une dérivée exacte quand on le multiplie par la dérivée de la fonction inconnue, l'équation est nécessairement de degré pair et équivalente à son adjointe.

Lorsqu'une équation d'ordre $2n$ est équivalente à son adjointe de la première ligne, il existe une relation quadratique entre $2n$ intégrales formant un système fondamental ou les dérivées de ces intégrales.

## *Petot.* — Sur les systèmes conjugués et les couples de surfaces applicables. (1250-1252).

Quand les points M et $M_1$ de deux surfaces S et $S_1$ se correspondent d'après une loi quelconque, il existe sur S un réseau conjugué $(u, v)$ auquel correspond un réseau conjugué sur $S_1$.

Il existe aussi sur S un seul réseau de courbes (A, B) dont les tangentes sont perpendiculaires aux conjuguées des tangentes aux courbes correspondantes $(A_1, B_1)$; et de même il existe sur $S_1$ un réseau $(C_1, D_1)$, jouant le même rôle par rapport à son correspondant (C, D). Les réseaux (A, B), $(A_1, B_1)$, (C, D), $(C_1, D_1)$ sont les images principales sur S et $S_1$ des congruences H et $H_1$ engendrées par les perpendiculaires abaissées de M et $M_1$ sur les plans tangents en $M_1$ et M.

M. Petot fait voir que, quand la congruence H a ses images principales conjuguées sur S et $S_1$, il en est de même pour la congruence $H_1$; les deux congruences ont alors pour image commune sur chaque surface le réseau $(u, v)$; de plus, la tangente à la ligne $(v)$ sur chaque surface est perpendiculaire à la tangente à la ligne $(u)$ de l'autre.

Réciproquement, si, sur chaque surface, la tangente à la ligne $(v)$ est perpendiculaire à la tangente à la ligne $(u)$ de l'autre, les congruences H et $H_1$ admettent comme image commune, sur chaque surface, le réseau conjugué $(u, v)$.

L'auteur s'occupe ensuite des équations linéaires F et $F_1$ que vérifient les éléments des plans tangents aux surfaces S et $S_1$ rapportées au réseau $(u, v)$.

Il étudie en particulier les cas où, moyennant certaines hypothèses faites sur les réseaux $(u, v)$, ou $(A, B)$, on peut déduire, par des différentiations ou des quadratures, de chaque solution de l'une des équations F et $F_1$ une solution à l'adjointe de l'autre. De cette étude il tire une méthode pour former des équations de Laplace qui admettent des transformations infinitésimales; et parmi les résultats que lui fournit cette méthode, il indique ceux qui sont utiles dans la détermination des couples de surfaces applicables.

*Cosserat*. — Sur la déformation infinitésimale et sur les surfaces associées de M. Bianchi. (1251-1255).

L'auteur développe une méthode qui lui permet de retrouver très simplement diverses propriétés dues à M. Bianchi et à M. Ribaucour.

Parmi les résultats nouveaux auxquels il parvient, signalons celui-ci :

Soit (A) la surface du milieu A du segment qui joint les points correspondants de deux surfaces applicables. Pour que deux surfaces (A) et $(A_1)$ se correspondant point par point avec parallélisme des plans tangents soient *associées*, il faut et il suffit que, si l'on considère la congruence des droites A, $A_1$, les développables déterminent sur (A) et $(A_1)$ des réseaux conjugués à invariants égaux, ou encore que les points focaux de $AA_1$ soient conjugués harmoniques par rapport à A et $A_1$.

En particulier, les surfaces isothermiques qui se correspondent dans le problème de M. Christoffel sont associées.

M. Cosserat fait remarquer que le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) revient à la détermination des réseaux conjugués tracés sur cette surface et qui ont soit leurs invariants égaux, soit une représentation sphérique identique à celles des asymptotiques d'une surface étudiée par M. Dini : dès que l'un de ces réseaux conjugués est donné, la déformation infinitésimale de (A) se détermine à l'aide de quadratures.

*Le Vavasseur*. — Sur les fonctions contiguës relatives à la série hypergéométrique de deux variables. (1255-1258).

Entre la fonction hypergéométrique $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ et trois quelconques des huit fonctions contiguës $F_1(\alpha \pm 1)$, $F_1(\beta \pm 1)$, $F_1(\beta' \pm 1)$, $F_1(\gamma \pm 1)$ existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des polynomes entiers en $x$ et en $y$.

L'énoncé de ce théorème peut être modifié comme il suit :

Les huit fonctions contiguës sont des fonctions linéaires et homogènes de F, de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de $x$ et de $y$.

La méthode indiquée par M. Le Vavasseur pour obtenir ces relations s'applique sans difficulté aux fonctions contiguës suivantes, et l'on peut dire que toute fonction contiguë $F_1(\alpha \pm m, \beta \pm n, \beta' \pm n', \gamma \pm p; x, y)$ est une fonction linéaire et homogène de $F_1$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de $x$ et de $y$.

L'auteur montre encore comment les dérivées partielles d'ordre supérieur de la fonction $F_1$ s'expriment en fonction linéaire et homogène de $F_1$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de $x$ et de $y$.

On pourra ainsi former les trois équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction $F_1$.

On sait que ce système de trois équations admet dix intégrales de la forme $\int_g^h U\,du$, où $g$ et $h$ désignent deux des cinq quantités $0, 1, x, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$.

En cherchant les relations linéaires entre trois ou quatre de ces intégrales supposées non distinctes, l'auteur a reconnu que ces relations ne subsistent pas pour toutes les positions de $x$ et $y$ dans le plan. Il y a quatorze tableaux distincts de relations entre les dix intégrales.

## *De Saint-Germain.* — Caractère de convergence des séries. (1258-1259).

Soit $\varphi(n)$ une fonction positive pour de grandes valeurs de $n$ et assujettie à la seule condition que, pour $n$ infini, $\varphi(n)\log n$ tende vers zéro : une série $u_0 + u_1 + \ldots$ à termes positifs sera convergente ou divergente suivant que $\lim u_n^{\varphi(n)}$ sera $< 1$ ou $> 1$.

En second lieu, si l'on a, $E_n$ étant nul pour $n$ infini,

$$u_n^{\varphi(n)} = 1 - E_n,$$

la série sera convergente ou divergente suivant que $\lim \frac{E}{\varphi(x)\log n}$ sera $> 1$ ou $< 1$.

La seconde proposition entraîne d'ailleurs la première.

## *Fontés.* — Criterium de divisibilité par un nombre quelconque. (1259-1261).

Pour reconnaître si un entier N est divisible par un autre M, M. Perrin a donné une méthode (*Association française,* 9 août 1889) qui paraîtrait, dit M. Fontés, être le dernier mot des recherches de ce genre, si elle fournissait directement le résidu minimum de N(mod M) qui exige un calcul à part indiqué d'ailleurs par M. Perrin. Mais, parmi les nombres qui peuvent être aisément déduits de N, qui ont même résidu minimum suivant le module M et qui, par suite, peuvent fournir des caractères de divisibilité par M, il en existe de remarquables, dont le calcul est d'une grande simplicité. C'est l'emploi de ces nombres qui fait l'objet de la Note de M. Fontés.

## *Elliot.* — Sur le mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse. (1262-1264).

Un point de masse égale à l'unité étant sollicité par des forces dérivant d'un potentiel U, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + k\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si l'on fait la substitution $t_1 = e^{-kt}$, ces équations prennent la forme

ordinaire

$$\frac{d^2 x_i}{dt_1^2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \qquad U_1 = \frac{U}{k^2 t^2}.$$

De là résulte pour la forme canonique des équations du mouvement, dans le cas considéré d'une résistance proportionnelle à la vitesse,

$$\frac{dq_h}{dt} = e^{kt}\frac{\partial(T-U)}{\partial p_h}, \qquad \frac{dp_h}{dt} = -e^{kt}\frac{\partial(T-U)}{\partial q_h}.$$

Par conséquent, si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + e^{kt}(T-U) = 0,$$

où les $q'_h$ ont été remplacés en fonction des $p_h$ et où les $p_h$ eux-mêmes sont remplacés par $\frac{\partial V}{\partial q_h}$, la connaissance d'une intégrale complète de l'équation (1) permet de trouver les équations finies du mouvement par la méthode de Jacobi.

M. Elliot étudie cette équation dans diverses hypothèses faites sur le potentiel U. Quand, par exemple, le mouvement a lieu sur une courbe, l'arc étant pris comme variable, l'équation (1) se ramène aux quadratures si la force est en raison directe ou inverse de la distance, à une équation de Riccati si la force est en raison inverse du carré ou de la racine carrée de la distance.

## ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

T. V, année 1891 (1).

### *De Tannenberg* (*W.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes, qui admettent un groupe continu de transformations. (B, 1-148).

#### Première Partie.

*Chapitre I.* — On appelle *élément* d'une ligne (C) l'ensemble formé par un point de cette ligne et la tangente en ce point. L'ensemble ($m$, $d$) d'un point $m$ et d'une droite $d$ passant par ce point s'appellera un *élément linéaire*. Plusieurs éléments de ligne sont *unis* suivant une courbe si chacun d'eux est un élément de la courbe.

Si l'on effectue une transformation ponctuelle, les courbes qui admettent un élément commun ($m$, $d$) se transforment en courbes ayant un élément commun ($m'$, $d'$) qui est le *correspondant* de l'élément ($m$, $d$).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. $\text{XVIII}_2$, p. 5.

A des éléments linéaires unis suivant une courbe (C) correspondent les éléments linéaires unis suivant la courbe transformée (C').

D'un groupe de transformations ponctuelles à $r$ paramètres, on peut déduire un groupe *prolongé* indiquant la loi suivant laquelle le groupe donné échange entre eux les éléments linéaires de l'espace.

On appelle *élément* d'une surface S l'ensemble $(m, \mathrm{P})$ formé par un point $m$ de cette surface et le plan P tangent en un point : l'élément $(m, \mathrm{P})$ est l'ensemble des éléments linéaires de S issus de $m$.

L'ensemble formé par un point et un plan passant par ce point s'appellera un *élément de surface*. Plusieurs éléments de surface sont dits *unis* suivant la surface S, si chacun d'eux est un élément de cette surface.

Si l'on effectue une transformation ponctuelle, si plusieurs surfaces ont un élément commun $(m, \mathrm{P})$, leurs transformées ont un élément commun $(m', \mathrm{P}')$, celui qui *correspond* à l'élément $(m, \mathrm{P})$. Des éléments de surface unis suivant une surface S se transforment en éléments de surface unis suivant la surface S' transformée de S.

D'un groupe de transformations ponctuelles à $r$ paramètres, on peut déduire un groupe *prolongé* qui indique la loi suivant laquelle les transformations du groupe donné échangent entre eux les éléments de surface de l'espace.

Une infinité simple et continue des éléments de ligne unis en un point quelconque $s$ de l'espace constitue un *cône élémentaire* C. Le cône élémentaire C' transformé de C par une transformation ponctuelle quelconque est l'enveloppe des éléments de surface correspondant aux éléments de surface du cône C. Les génératrices de contact de deux éléments de surface correspondants appartiennent à deux éléments linéaires correspondants.

L'équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

où $\Phi$ est homogène en $dx, dy, dz$, fait correspondre à chaque point de l'espace un cône élémentaire C, et s'appellera l'*équation du système des cônes élémentaires* C, ou encore l'équation aux différentielles totales *associée* à une certaine équation aux dérivées partielles $\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$, telle que $\Phi = 0$ se déduise de $\mathrm{F} = 0$, en éliminant $p$ et $q$ entre les équations $\mathrm{F} = 0$,

$$\frac{dx}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}}.$$

*Chapitre II.* — Pour qu'une famille de courbes à trois paramètres représentée par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, a, b, c) = 0, \\ g(x, y, z, a, b, c) = 0 \end{cases}$$

soit l'ensemble des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles, il faut et il suffit qu'en éliminant $x, y, z$ entre les équations (1) et les suivantes

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{\partial f}{\partial c}dc = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a}da + \frac{\partial g}{\partial b}db + \frac{\partial g}{\partial c}dc = 0,$$

on obtienne une équation non intégrable, linéaire en $da, db, dc$.

On peut alors, dans les équations (1) choisir les paramètres $a, b, c$ de façon que l'équation $db - c\,da = 0$ soit une conséquence des équations (1) et (2),

puis mettre les équations (1) sous la forme *normale*

$$(3)\qquad V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad V' = \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Il y a une infinité de formes normales. On peut les déduire toutes de l'une d'entre elles, la forme (3) par exemple, par la règle suivante : on effectue sur les quantités $a$, $b$, $c$ la transformation de contact la plus générale définie par l'identité

$$db' - c'\,da' = \rho(db - c\,da).$$

Le système (1) devient

$$\varphi(x, y, z, a', b', c') = 0,$$
$$\psi(x, y, z, a', b', c') = 0.$$

On résout l'une de ces deux équations par rapport à $c'$, on porte la valeur trouvée dans l'autre, et l'on a la forme normale la plus générale

$$U(x, y, z; a', b') = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial a'} + c'\frac{\partial U}{\partial b'} = 0.$$

Supposons les caractéristiques de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

définies par les équations

$$(3)\qquad V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

si l'on donne à $x$, $y$, $z$ des valeurs déterminées, et si l'on considère $(a, b, c)$ comme les coordonnées d'un élément linéaire du plan, ces équations définissent un système d'éléments linéaires unis suivant une courbe C à trois paramètres ($x$, $y$ et $z$). L'équation différentielle du troisième ordre

$$(4)\qquad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0,$$

dont les courbes intégrales constituent la famille des courbes C, *correspond* à la forme normale (3).

On obtient les diverses équations différentielles du troisième ordre correspondant aux diverses formes normales en appliquant à l'une d'elles toutes les transformations de contact du plan.

Inversement l'ensemble des éléments linéaires des courbes intégrales de (4) est défini par les équations (3), lesquelles, en considérant $a$, $b$, $c$ comme des paramètres, et $x$, $y$, $z$ comme les coordonnées d'un point de l'espace, définissent la famille de caractéristiques d'une certaine équation aux dérivées partielles,

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui *correspond* à $V = 0$. A chaque équation telle que $V = 0$ représentant les courbes intégrales de (4) correspond une équation aux dérivées partielles déterminées. L'ensemble (E) de ces équations aux dérivées partielles s'obtient en appliquant à l'une d'elles toutes les transformations ponctuelles de l'espace.

Si l'on considère l'équation aux dérivées partielles qui correspond à l'intégrale générale $V(x, y, z, a, b) = 0$ de l'équation $H = 0$, elle a pour associée l'équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

qui exprime que la courbe $V = 0$ est tangente à la courbe infiniment voisine

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0.$$

L'auteur termine le Chapitre par la remarque suivante : lorsque l'on applique à tous les points de l'espace une transformation ponctuelle quelconque,

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = X(x, y, z),$$

ces caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

deviennent les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$F'(x', y', z', p', q') = 0.$$

*Chapitre III.* — On dit que l'équation

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

*admet* la transformation ponctuelle

(2) $$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$

si l'équation (1) admet la transformation prolongée de (2).

Si l'équation (1) admet une transformation ponctuelle, l'ensemble des caractéristiques admet aussi cette transformation, et réciproquement.

Pour reconnaître si l'équation (1) admet un groupe de transformations, on forme l'équation associée

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

et l'on cherche les transformations ponctuelles qui laissent invariante la multiplicité des points $(x, y, z, dx, dy, dz)$ définie par l'équation $\Phi = 0$.

Une équation linéaire $Pp + Qq = R$ admet un groupe infini, savoir le groupe engendré par les transformations infinitésimales

$$\rho(x, y, z)\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

où $\rho$ désigne une fonction arbitraire.

Imaginons une équation aux dérivées partielles, non linéaire, telle que (1) admettant une transformation ponctuelle, telle que (2). Soient

(3) $$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad V' = \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

les équations des caractéristiques.

La multiplicité de points $(x, y, z, a, b, c)$ définie par les équations (3) admet

une transformation ponctuelle de la forme

$$(2) \qquad x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$

$$(4) \qquad a' = A(a, b, c), \qquad b' = B(a, b, c), \qquad c' = C(a, b, c).$$

La transformation (4) est dite *conjuguée* de la transformation (2).

*C'est une transformation de contact.*

De là résulte le théorème qui suit :

« Si l'équation (1) admet un groupe à $r$ paramètres essentiels, chacune des équations différentielles

$$(5) \qquad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0$$

qui lui correspondent admet un groupe de transformations de contact à $r$ paramètres; réciproquement, si une équation de la forme (5) admet un groupe de transformations de contact à $r$ paramètres, chacune des équations (1) qui lui correspondent admet un groupe de transformations ponctuelles à $r$ paramètres. »

Nous sommes donc ramené à la recherche des équations différentielles (5) qui admettent un groupe fini de transformations de contact. L'auteur se borne à déterminer les équations qui admettent un groupe à plus de trois paramètres.

*Chapitre IV.* — Le groupe des transformations de contact qu'admet une équation différentielle du troisième ordre est nécessairement *fini*. D'autre part, les groupes de transformations de contact du plan, en nombre infini, dérivent tous, par une transformation de contact, d'un petit nombre de *groupes canoniques* en sorte que l'on est ramené à déterminer les équations invariantes du troisième ordre qui correspondent à ces groupes canoniques.

Les groupes canoniques se partagent en groupes *irréductibles* et groupes ponctuels *prolongés*.

Il y a trois groupes irréductibles, à 10, 7 et 6 paramètres.

Les groupes ponctuels du plan se partagent en deux classes : la première comprend tous les groupes qui ne laissent invariante aucune famille de courbes à un paramètre. La seconde classe, qui comprend tous les autres groupes, se partage en quatre catégories, suivant le nombre de paramètres du groupe *conjugué* du groupe donné.

Les groupes ponctuels de la première classe sont des groupes homographiques, à 5, 6 et 8 paramètres.

L'auteur énumère ensuite, d'après M. Sophus Lie, les formes canoniques des groupes de la seconde classe.

Les groupes de la première classe ne laissent invariante aucune équation différentielle du troisième ordre. Dans la seconde classe, il n'y a que quatre groupes contenant plus de 5 paramètres, qui laissent une équation du troisième ordre invariante, savoir, pour les trois premiers groupes $y''' = 0$, et pour le dernier $2y'y''' - 3y''^2 = 0$. Il existe d'ailleurs une transformation de contact qui permet de déduire cette seconde équation de la première.

Les équations invariantes qui correspondent aux groupes canoniques à 5 pa-

ramètres sont, outre les deux précédentes, les deux équations

$$xy''' - (n-2)y'' = 0 \qquad \text{(intégrale générale } y = a + bx + cx^n\text{)},$$
$$y''' - y'' = 0 \qquad \text{(intégrale générale } y = a + bx + ce^x\text{)}.$$

Les équations suivantes

$$y'''\varphi''(x) - y''\varphi'''(x) = 0 \qquad \text{(intégrale générale } y = a + bx + c\varphi(x)\text{)},$$
$$y''' = ky''^p,$$
$$y'''e^{y''} = 1,$$
$$y'y''' = my''^2 \qquad (k \neq 0),$$
$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}$$

admettent un groupe ponctuel à 4 paramètres.

La quatrième équation admet un groupe à 5 paramètres.

La deuxième équation admet un groupe à plus de 4 paramètres si $p = 0, 1, 2, 3$.

## Deuxième Partie.

*Chapitre I.* — A l'équation $y''' = 0$ correspond $1 + p^2 + q^2 = 0$, dont l'équation associée est $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$. Le groupe de cette équation est le groupe des transformations conformes. Cette même équation $1 + p^2 + q^2 = 0$ correspond aussi à $2y'y''' - 3y''^2 = 0$, en sorte que toute équation aux dérivées partielles qui admet un groupe de transformations à plus de 5 paramètres dérive, par une transformation ponctuelle, de l'équation $1 + p^2 + q^2 = 0$, et admet par conséquent un groupe de transformations de 10 paramètres. De même toute équation différentielle qui admet un groupe de transformations de contact à plus de 5 paramètres admet également un groupe de transformations à 10 paramètres, et dérive de l'équation $y'' = 0$ par une transformation de contact. M. de Tannenberg termine le Chapitre en cherchant les transformations de contact par lesquelles les coniques ayant deux points communs se changent en coniques tangentes à une droite donnée en un point donné.

*Chapitre II.* — A l'équation $xy''' - (n-2)y'' = 0$ correspondent les équations aux dérivées partielles semblables à celle dont la forme associée est $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n$, qui admet, pour $n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ le groupe à 5 paramètres défini par les transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + nz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ses transformations finies sont

$$x' = ax + c_1,$$
$$y' = aby + c_2,$$
$$z' = ab^n z + c_3.$$

En les appliquant à la droite $x = y = z$, on obtient toutes les caracté-





ristiques de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n.$$

Pour $n = 0, 1$, cette dernière équation devient linéaire, et par suite admet un groupe infini; pour $n = -1, \frac{1}{2}, 2$, elle peut se transformer en l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

et admet par suite un groupe à 10 paramètres.

A l'équation $y''' - y'' = 0$ correspondent les équations aux dérivées partielles semblables à celle qui a pour associée l'équation

$$\frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$$

qui admet le seul groupe défini par les 5 transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ses transformations finies sont

$$x' = ax + c_1,$$
$$y' = abx + ay + c_2,$$
$$z' = ae^b z + c_3.$$

En les appliquant à la droite $y = 0$, $z = x$, on obtient toutes les caractéristiques de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

*Chapitre III.* — Avec l'équation $y'y''' = my''^2$ on n'obtient pas d'équation canonique nouvelle; on retombe sur celles du Chapitre précédent. On pourra passer de l'équation $y'y''' = y''^2$ à l'équation $y_1''' - y_1'' = 0$ par la transformation de contact

$$x_1 = -Ly', \qquad y_1' - y_1 = -x, \qquad y_1' = -\frac{y}{y'}.$$

Pour passer de l'équation $y'y''' = 2y''^2$ à $y_1''' - y_1'' = 0$, il faudra effectuer la transformation de contact

$$x_1 = Ly', \qquad y_1 - y_1' = y, \qquad y_1' = -xy'.$$

Enfin la transformation de contact

$$x_1 = \frac{\mu}{y'}, \qquad y_1 = \mu\frac{y - xy'}{y'}, \qquad y_1' = y, \qquad \left(\mu = \frac{m-2}{m-1}\right)$$

ramène l'équation $y'y''' = my''^2$ à la forme canonique

$$x_1 y_1''' - (m-3)y_1'' = 0.$$

*Chapitre IV.* — Il y a quatre classes de transformations homographiques

Les courbes qui admettent une transformation infinitésimale de l'une de ces classes sont des dérivées homographiques des courbes $y = x^m$, $y = e^x$. Elles se décomposent en trois classes.

Les courbes V de la première classe ($y = e^x$, $y = x^m$, $m \neq 0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2$) n'admettent qu'une transformation homographique infinitésimale. Les coniques (qui forment la deuxième classe) en admettent trois.

Les droites (troisième classe) en admettent six.

Toute équation aux dérivées partielles admettant un groupe de transformations à 5 paramètres est une transformée ponctuelle d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales forment un complexe déterminé par les droites qui rencontrent une courbe V de la première classe. Si le groupe a 10 paramètres, les droites du complexe devront rencontrer une conique non décomposable.

*Chapitre V.* — Les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique $y'''\varphi''(x) - y''\varphi'''(x) = 0$ sont semblables à celle qui a pour associée

$$\frac{dz}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$\Phi$ désignant une fonction arbitraire. Le seul groupe que cette dernière équation admette est le groupe à 4 paramètres défini par les transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les équations aux dérivées partielles considérées dérivent, par une transformation ponctuelle d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales rencontrent une certaine courbe plane.

*Chapitre VI.* — Admettent encore un groupe à 4 paramètres :

1° Les équations semblables à celle qui a pour associée

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n \qquad n \neq -1, 0, 1, 2,$$

$$\left[\text{groupe } \frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \right.$$
$$\left. n\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right];$$

2° Les équations semblables à celle qui a pour associée

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

$$\left[\text{groupe } \frac{\partial f}{\partial x} - z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}\right].$$

Les premières correspondent à l'équation canonique $y''' = ky''^p$ et les secondes à l'équation canonique $y'''e^{y''} = 1$.

*Chapitre VII.* — Nous arrivons à l'équation canonique

$$yy''' - 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}.$$

Son intégrale générale sera

$$y = \frac{bx + c}{\sqrt{c - ab}} \left( \frac{x + a}{bx + c} \right)^n,$$

avec

$$(2n - 1)\sqrt{k^2 - 1} = k \qquad \text{si} \qquad k^2 \neq 1$$

ou

$$y = \frac{bx + c}{\sqrt{c - ab}} e^{\frac{x + a}{bx + c}} \qquad \text{si} \qquad k^2 = 1.$$

Les deux groupes conjugués seront l'un déterminé par les quatre transformations infinitésimales

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial c}, \qquad A_2 f = a \frac{\partial f}{\partial a} + c \frac{\partial f}{\partial c},$$

$$A_3 f = a^2 \frac{\partial f}{\partial a} + (ab - c) \frac{\partial f}{\partial b} + ac \frac{\partial f}{\partial c}, \qquad A_4 f = b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c},$$

le second par les quatre transformations $A_1 f$, $A_2 f$, $A_3 f$ et

$$A_5 f = (ab - c) \frac{\partial f}{\partial a} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b} + bc \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Les équations aux dérivées partielles correspondantes se partagent en deux classes. Celles de la première sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0 \qquad (h \neq 0, 1),$$

celles de la seconde sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)(y\,dz - z\,dy) = 0.$$

La première admet le groupe défini par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (xy + z) \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_4 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

La seconde admet le groupe défini par $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ et

$$X_5 f = (xy + z) \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + yz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Elles n'admettent pas de groupe d'ordre plus élevé.

*Chapitre VIII.* — Considérons dans le plan des $(x, y)$ les transformations homologiques ayant pour centre d'homologie le point O et pour axe d'homologie une droite passant par le point O. Ces transformations forment un groupe à deux paramètres, défini par les équations

$$x' = \frac{x}{ax + by + 1}, \qquad y' = \frac{y}{ax + by + 1}.$$

ou

$$X_1 f = x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad X_2 f = y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On appelle ce groupe groupe *homologique spécial* G relatif au point O.

Soit (C) une courbe quelconque du plan, D une droite ne passant pas par l'origine, S une substitution quelconque du groupe G, faisons correspondre la courbe C' et la droite D' transformée de C et de D par S. On a ainsi une correspondance univoque entre une famille de courbes à deux paramètres et les droites du plan ne passant pas par l'origine.

Considérons maintenant un complexe linéaire tel que le pôle du plan des $(x, y)$ soit le point O, et remplaçons les droites D par leurs conjuguées $d$ par rapport au complexe : la droite $d$ et la courbe C correspondante seront dites *lignes associées*. Les droites rencontrant à la fois deux lignes associées forment un complexe K.

Si la courbe C est une courbe V (*voir* Chap. IV) relative au triangle formé par la droite D et deux droites $Ox$, $Oy$, on dira que le complexe K est de *première espèce*. Si dans l'équation canonique

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

on effectue la transformation homographique la plus générale, les tangentes aux courbes intégrales formeront un complexe K de première espèce. Supposons dans le triangle précédent les côtés $Ox$ et $Oy$ confondus, on aura un complexe K *de seconde espèce :* ils dérivent tous par une transformation homographique du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Imaginons une surface quelconque du second degré, et supposons qu'on ait établi entre les génératrices d'un même système une *correspondance homographique* quelconque. Les droites qui rencontrent à la fois deux génératrices homologues forment un complexe H. Suivant que les génératrices doubles de l'homographie seront distinctes, ou confondues, le complexe H sera dit de première ou de seconde espèce.

Les complexes H de première espèce qui correspondent au même rapport anharmonique caractérisant l'homographie dérivent tous par une transformation homographique de l'un quelconque d'entre eux, par exemple du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0.$$

Les complexes H de seconde espèce dérivent par une transformation homographique du complexe défini par l'équation

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)\,dx = 0.$$

*Chapitre IX.* — Une transformation homographique, dans l'espace à trois dimensions, est définie par le symbole

$$Xf = \sum_1^4 \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

avec

$$\xi_k = \sum_{1}^{4} a_{ki} x_i.$$

Soit

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Écartons le cas où l'une des racines de l'équation $\Phi(\lambda) = 0$ annulerait tous les premiers mineurs du déterminant $\Phi(\lambda)$ : dans ce cas, chacune des courbes qui admettent la transformation infinitésimale $Xf$ est une courbe plane. Alors on a cinq types de transformations homographiques correspondant aux cinq transformations infinitésimales qui suivent (écrites en coordonnées non homogènes),

(1) $X_1 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + my\dfrac{\partial f}{\partial y} + pz\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\quad m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0,$

(2) $X_2 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + my\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\quad m \neq 0, 1,$

(3) $X_3 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$,

(4) $X_4 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}$,

(5) $X_5 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} + y\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Les courbes admettant l'une de ces transformations ont pour équations :

Dans le 1er cas....... $y = x^m$, $\quad z = x^p$, $\quad m \neq p \neq 1$, $\quad mp \neq 0$
» 2e » ....... $y = x^m$, $\quad z = Lx$, $\quad m \neq 0, 1$
» 3e » ....... $y = zx$, $\quad x = e^z$,
» 4e » ...... $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $\quad z = e^x$,
» 5e » ....... $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $\quad z = \dfrac{1}{6}x^3$.

Il y a quatre catégories de courbes de la première classe ($y = x^m$, $z = x^p$) pouvant être placées sur une surface du second degré :

La première comprend les cubiques gauches.

La deuxième les biquadratiques à point de rebroussement.

La troisième (type $y = x^2$, $z = x^p$) les courbes tracées sur une seule surface conique du second ordre.

La quatrième (type $y = x^m$, $z = x^{m+1}$) les courbes tracées sur une seule quadrique non dégénérée.

Les courbes de la première et de la quatrième catégorie constituent la famille des transformées homographiques des loxodromies de l'espace.

Revenons aux courbes de la première classe; elles n'admettent qu'une transformation homographique, (1), $X_1 f$, sauf les cubiques, qui en admettent

trois, savoir

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} + 3z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3 f = 3x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - 4y\frac{\partial f}{\partial x} - 3z\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les courbes de la deuxième classe n'admettent qu'une transformation homographique (2); parmi elles se trouvent les transformées homographiques des hélices de l'espace (tracées sur un cylindre de révolution).

Les autres courbes n'admettent aussi qu'une transformation homographique.

Les caractéristiques de l'équation

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n$$

sont, si $n \neq \frac{1}{2}, -1, 0, 1, 2$, des courbes de la première classe, et du type

$$y = x^{\frac{n}{n-1}}, \qquad z = x^{\frac{n}{n-1}+1};$$

on aura des cubiques gauches pour $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; si $n = \frac{1}{2}$, on aura des courbes de la deuxième classe.

Les caractéristiques de l'équation

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$$

sont des transformées homographiques d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Les caractéristiques de l'équation canonique

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dy = 0 \qquad h \neq 0, 1$$

sont des cubiques gauches pour $h = \frac{3}{4}, -3$, ou, dans les autres cas, des courbes de la première classe, quatrième catégorie.

Enfin les caractéristiques de l'équation canonique

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)\,dx = 0,$$

sont des courbes de la troisième classe.

Dans une Note qui termine ce travail, l'auteur montre que l'équation aux dérivées partielles de Monge

$$(z - px - qy)^2 = (1 + p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 1),$$

dérive par une transformation ponctuelle de l'équation canonique

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

De même, toute équation aux dérivées partielles, pour laquelle les tangentes

aux courbes intégrales déterminent un complexe tétraédral est une transformée ponctuelle de cette même équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

On y ramène encore l'équation aux dérivées partielles dont l'associée est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 = 0.$$

Incidemment l'auteur donne une transformation qui fait correspondre aux tangentes d'une surface du second ordre S les droites rencontrant une section plane C de cette surface.

*Stouff* (X.). — Sur des fonctions voisines des fonctions modulaires. (C, 1-16).

I. Les substitutions dont l'expression générale est

$$\mathrm{S}, \left( z, \frac{[\alpha_1(j+j^4) + \alpha_2(j^2+j^3)]z + \Delta[\gamma_1(j+j^4) + \gamma_2(j^2+j^3)]}{\varepsilon\{[\gamma_1(j^2+j^3) + \gamma_2(j+j^4)]z - \alpha_1(j^2+j^3) - \alpha_2(j+j^4)\}} \right),$$

où l'on a $j^5 = 1$, $\varepsilon^2 = 1$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_2 + \Delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2) = \varepsilon$, et où $\Delta$ désigne un entier positif fixe, forment dans leur ensemble un groupe fuchsien $G_5^\Delta$.

Si $\Delta$ peut être représenté par la forme $x^2 - 3xy + y^2$, le groupe $G_5^\Delta$ est un transformé du groupe appelé $G_5$ dans le précédent Mémoire. On étudiera ici les groupes dont le $\Delta$ ne satisfait pas à cette condition.

M. Stouff examine à quelles conditions la substitution S sera de période 2, puis de période 3. Pour que le groupe présente des substitutions paraboliques, il faut et il suffit que $\Delta$ soit de la forme $x^2 + y^2 - 3xy$.

II. M. Stouff montre la manière de former les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe $G_5^1$.

Les substitutions génératrices du groupe sont

$$A = [0, 0, 1, 1], \qquad B = (0, 0, 1, 0), \qquad C = (-2, -2, -1, 1).$$

Le groupe engendré par BA et CA correspond à un certain système de fonctions elliptiques dont on calcule le module.

Soit $a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $k^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = a\,\mathrm{cn}^2 u$. La surface de Riemann de genre 1 corrrespondant au polygone générateur sera définie par la relation $y = \sqrt{x^3 - (1+a)x^2 + ax}$.

Les invariants $g_2$ et $g_3$ sont

$$g_2 = -\frac{a}{3}, \qquad g_3 = -\frac{(1+a)(2a^2 - 5a + 2)}{2^4 3^3}.$$

Prenons pour variable $x = a\,\mathrm{cn}^2 u$; l'équation fuchsienne relative au polygone Q'QQ'', [Q étant le quadrilatère curviligne dont les côtés sont conjugués par BA et CA, Q' et Q'' se déduisant de Q par les substitutions BA et AB] est de la

forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{A_0 x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{x^2(x-1)^2(x-a)^2\left(x - \frac{1}{a}\right)^2} v,$$

$$A_0 = -\frac{3}{16}, \qquad A_1 = \frac{38 - 3a}{80}, \qquad A_2 = \frac{153 + 3a}{80}, \qquad A_3 = \frac{37 - 12a}{80}.$$

M. Stouff démontre ensuite qu'aucune substitution impaire du groupe $G_5$ ne se transforme en une substitution de ce groupe.

III. Le groupe $G_5^{\varepsilon}$ ne contient pas de substitutions paraboliques. Convenons de représenter la substitution S par $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2)$ ou $[\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2]$, suivant que $\varepsilon = +1$, ou $\varepsilon = -1$.

Les substitutions génératrices de $G_5^{\varepsilon}$ sont

$$A = (-1, -1, 1, 0), \qquad B = [1, 0, -1, -1],$$
$$C = [0, 1, -1, -1], \qquad D = (1, 1, 1, 0).$$

Les substitutions A et D sont de période 2, B et C de période 3. On a

$$ABCD = 1.$$

La substitution $\Theta = \left(z, -\frac{2}{z}\right)$ transforme respectivement l'une dans l'autre A et D, B et C; $G_5^{\varepsilon}$ est donc un sous-groupe d'indice 2, d'un groupe $\Gamma$, admettant comme substitutions génératrices D, C et $\Theta$. Les congruences

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0, \qquad (\operatorname{mod} 3),$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0, \qquad (\operatorname{mod} 3)$$

séparent dans le groupe $G_5^{\varepsilon}$ un groupe $\Gamma'$ d'indice 4, qui admet pour substitutions génératrices

$$A, \quad C, \quad B^{-1}AB, \quad BCB, \quad BACB^{-1}, \quad BC^{-1}B^{-1}CB^{-1}.$$

Les cycles de A et de $BCAB^{-1}$, de $B^{-1}AB$ et de $BDB^{-1}$ s'échangent respectivement.

Soit $x$ la variable qui représente conformément sur un plan le polygone générateur du groupe $G_5^{\varepsilon}$, en lui imposant de prendre les valeurs, 0, $\infty$ respectivement aux points doubles de B et de C, et par $y$ celle qui représente sur le plan le polygone générateur du groupe $\Gamma'$. On a

$$x = \frac{y^4 - y^3}{y + 2}.$$

Soit $y_1 = \sqrt{3} - 1$, $y_2 = -\sqrt{3} - 1$; l'équation fuchsienne de $G_5^{\varepsilon}$ a pour points singuliers 0, $\infty$, $-\frac{y_1^6}{4}$, $-\frac{y_2^6}{4}$.

IV. En général, toute substitution qui, prise comme substitution transformante, engendre un groupe fuchsien correspondant à une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, doit avoir un carré parfait pour norme de son déterminant. Pour que le groupe ainsi formé ne soit pas réductible à des coefficients entiers, il faut et il suffit que la racine carrée de cette norme ne puisse être considérée comme la norme d'un nombre abélien.

Tout nombre qui peut être représenté par une norme abélienne en prenant pour éléments les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité est reste de puissance $\frac{p-1}{2}$ de $p$, lorsque $p$ est de la forme $(4n+3)$.

## *Kobb* (*Gustaf*). — Sur le principe de la moindre action. (D, 1, 3).

L'auteur démontre que l'intégrale $J = \int \sqrt{2(u+h)}\, ds$ est un *minimum* et non pas un *maximum* dans le cas du mouvement naturel.

De même, considérons l'intégrale $\int f(x, y, z)\, ds$. Si $f$ change de signe entre les limites de l'intégration, il n'y a jamais ni maximum ni minimum; si $f$ reste constamment positive, il n'y a jamais un maximum; si $f$ reste constamment négative, jamais minimum.

## *Goursat* (*E.*). — Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables. (E, 1, 34).

I. 1. Considérons une surface $\Sigma$ dont le carré de l'élément linéaire ait la forme

$$ds^2 = du^2 + dv\, dw.$$

Soit $w = 2\psi(u, v)$, posons $p = \frac{\partial\psi}{\partial u}$, $q = \frac{\partial\psi}{\partial v}$.

$\xi, \eta, \zeta$ étant les coordonnées rectangulaires d'un point de $\Sigma$, posons $x = \frac{\partial\xi}{\partial v}$, $y = \frac{\partial\eta}{\partial v}$, $z = \frac{\partial\zeta}{\partial v}$, et regardons $x$, $y$ et $z$ comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface S, que nous faisons ainsi correspondre à $\Sigma$, $p$ est la distance de l'origine au plan tangent à S en $(x, y, z)$ et $q = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

2. La construction précédente appliquée à toutes les surfaces $\Sigma$ dont le carré de l'élément linéaire possède la forme

$$ds^2 = du^2 + 2p\, du\, dv + 2q\, dv^2$$

donne une famille de surfaces S. *Toutes ces surfaces* S *vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre.*

Si, en effet, $\rho'$ et $\rho''$ désignent les deux rayons de courbure principaux au point $(x, y, z)$, on a

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\rho'\rho'' + \frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v}(\rho' + \rho'') + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0,$$

et comme $u$ et $v$ s'expriment en fonction de $p$ et de $q$, on a une relation entre $p$, $q$, $\rho'$ et $\rho''$. D'ailleurs elle ne dépend que de $\psi(u, v)$.

Posons $\varphi(p, q) = pu + qv - \psi$, et prenons $p$ et $q$ comme variables indépendantes, l'équation devient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\, \partial q} + \rho'\rho''\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

qui ne diffère qu'en apparence de l'équation (2) de M. Weingarten (*Comptes rendus,* t. CXII, p. 607).

L'élément linéaire de la surface $\Sigma$ devient

$$(\beta)\qquad ds^2 = \left(d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 + 2p\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2.$$

3. Réciproquement, de toute surface satisfaisant à l'équation ($\alpha$), on déduira par des quadratures une surface dont l'élément linéaire peut être ramené à la forme ($\beta$). Les coordonnées d'un point de cette surface seront données par les formules

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \xi = \displaystyle\int x\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q}, \\ \eta = \displaystyle\int y\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c'\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \\ \zeta = \displaystyle\int z\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c''\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \end{cases}$$

$c, c', c''$ étant les cosinus directeurs de la normale en $(x, y, z)$ à la surface S.

4. Étant données une courbe C et une surface développable D contenant cette courbe, on peut se proposer de déterminer une surface intégrale de l'équation ($\alpha$) passant par la courbe C et tangente à la développable D tout le long de C.

A la courbe C les formules ($\gamma$) font correspondre une courbe $C_1$. Soit $\Sigma_0$ une surface *connue* admettant l'élément linéaire ($\beta$). La relation qui lie les variables $p$ et $q$ le long de C ou de $C_1$ détermine sur $\Sigma_0$ une courbe $C_0$, de sorte que le problème proposé revient à déterminer une surface $\Sigma$, applicable sur $\Sigma_0$, de façon que $C_0$ vienne s'appliquer sur $C_1$. Inversement, si l'on se donne $C_0$ et $C_1$, la courbe C et la développable D sont déterminées pourvu que l'on se donne le point de $C_1$ qui correspond à un point choisi sur $C_0$.

Or, si la courbe C et la développable D forment une *caractéristique* de l'équation ($\alpha$), la surface intégrale S tangente à D le long de C n'est plus déterminée. De même, si l'on se propose de déformer une surface $\Sigma_0$ de façon qu'une courbe $C_0$ de cette surface vienne coïncider avec une courbe donnée $C_1$, le problème n'est impossible ou indéterminé que si $C_1$ devient une asymptotique de $\Sigma_0$ après la déformation. Donc, *étant données une surface intégrale* (S) *de l'équation* ($\alpha$) *et la surface* $\Sigma$ *correspondante, les caractéristiques de* S *correspondent aux asymptotiques de* $\Sigma$.

M. Goursat vérifie cette conclusion dans le cas particulier où $\psi(u, v) = uv + V$, V étant une fonction de $v$. Dans ce cas les caractéristiques correspondent aux lignes de longueur nulle de la sphère.

5. Une forme quadratique de différentielles

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où E, F, G sont des fonctions quelconques de $u$ et de $v$, peut toujours se ramener à la forme $du'^2 + dv'\,dw'$, quand on connaît déjà une surface admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

La recherche des surfaces applicables sur une surface donnée quelconque se ramène à l'intégration d'une équation de la forme ($\alpha$).

Si l'on sait l'intégrer, on pourra en déduire l'intégrale générale d'une infinité d'équations de même forme, puisqu'il y a une infinité de manières de mettre l'élément linéaire d'une surface sous la forme $du^2 + dv\,dw$.

II. 6. Les coordonnées $c$, $c'$, $c''$ d'un point de la sphère de rayon 1 étant exprimées en fonction de deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ par les formules

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\,\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},$$

l'équation du plan tangent à une surface étant écrite sous la forme

$$(1-\alpha\beta)x + i(1-\alpha\beta)y + (\alpha+\beta)z + \xi = 0,$$

introduisons la distance $p$ de l'origine au plan tangent, en posant $\xi = (\alpha-\beta)p$.

Puis, considérons une famille de surfaces définies par une relation entre la somme des rayons de courbure principaux et la distance de l'origine au plan tangent

$$\rho' + \rho'' = 2p + \psi'(p),$$

on trouve alors que $p$ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$(u) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\psi'(p)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Soit $p$ une intégrale de cette équation. Les coordonnées d'un point de la surface $\Sigma$ seront données par les formules

$$(v)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\int\left\{(1-\alpha^2)\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha + (\beta^2-1)\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2 d\beta + \frac{2\,\psi(p)}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\beta^2-1)\,d\alpha + (1-\alpha^2)\,d\beta\right]\right\}\\
&\quad + \frac{\alpha\beta-1}{2}(\beta-\alpha)\frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial p}{\partial\beta} - \frac{\alpha\beta-1}{\beta-\alpha}\psi(p).\\
\eta &= \frac{i}{2}\int\left\{(1+\alpha^2)\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha - (1+\beta^2)\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2 d\beta - \frac{2\,\psi(p)}{(\alpha-\beta)^2}\left[(1+\alpha^2)\,d\beta - (1+\beta^2)\,d\alpha\right]\right\}\\
&\quad + \frac{i(1+\alpha\beta)}{2}(\alpha-\beta)\frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial p}{\partial\beta} + i\,\frac{1+\alpha\beta}{\beta-\alpha}\psi(p),\\
\zeta &= \int\left[\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha - \beta\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2 d\beta + \frac{2\,\psi(p)}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha)\right]\\
&\quad + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial p}{\partial\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\psi(p).
\end{aligned}\right.$$

7. Soit $q = \dfrac{p^2 + (\alpha-\beta)^2\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}\dfrac{\partial p}{\partial\beta}}{2}$; posons $q = \dfrac{p^2}{2} + \psi(p) + u$, $p = v$, le carré de l'élément linéaire de $\Sigma$ aura pour expression

$$(w) \qquad d\sigma^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)]\,dv^2.$$

On en conclut que *toutes les surfaces dont le carré de l'élément linéaire peut être ramené à la forme* ($w$) *sont représentées par les formules* ($v$), *où $p$ est une intégrale de l'équation* ($u$).

En posant $s = \alpha$, $s = -\frac{1}{\beta}$, les formules ($u$) donnent $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ sous forme

réelle. Il suffira alors de prendre pour $p$ une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s\,\partial s_0} = \frac{\psi'(p)}{(1+ss_0)^2},$$

qui soit réelle lorsque $s$ et $s_0$ sont imaginaires conjuguées, pour obtenir des surfaces réelles.

8. Soit $p$ une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s\,\partial s_0} = \frac{\psi'(p)}{(1+ss_0)^2}.$$

Déterminons une intégrale commune $\omega$ des deux équations compatibles

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = (1+ss_0)\left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)^2, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial s_0^2} = (1+ss_0)\left(\dfrac{\partial p}{\partial s_0}\right)^2; \end{cases}$$

le plan qui a pour équation

$$X(s-s_0) + iY(s_0-s) + Z(ss_0-1) - \omega = 0$$

enveloppe une surface $\Sigma_1$, dont un des systèmes de lignes de courbure est donné par l'équation $p =$ const.

La développée de $\Sigma_1$, formée par les développées des lignes de courbure de ce système, est une surface $\Sigma$, dont le carré de l'élément linéaire peut être ramené à la forme

$$du^2 + 2[u + \psi(v)]\,dv^2.$$

Les lignes geodésiques de paramètre $v$ sont les développées des lignes de courbe de $\Sigma_1$. On obtient ainsi toutes surfaces $\Sigma$, dont l'élément linéaire a la forme précédente.

9. Si une surface est telle que la somme des rayons de courbure principaux conserve une valeur constante le long d'une ligne de courbure de l'un des systèmes, en variant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne de courbure à une autre du même système, le carré de l'élément linéaire de l'une des nappes de la développée (celle qui correspond à ce système de lignes de courbure) aura la forme

$$du^2 + 2[u + \psi(v)]\,dv^2.$$

Toutes les surfaces $\Sigma_1$ jouissant de la propriété précédente, satisfont à une même équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

En généralisant, on a la proposition suivante : « Si une surface est telle que, le long d'une ligne de courbure de l'un des systèmes, les rayons de courbure principaux sont liés par une relation d'involution, dont les coefficients varient suivant une loi quelconque quand on passe d'une ligne de courbure à une autre du même système, la nappe de la développée qui correspond à ce système de lignes de courbure est applicable sur une surface réglée, de telle façon que les développées des lignes de courbure précédentes correspondent aux génératrices de la surface réglée ».

Les surfaces dont les lignes de courbure satisfont à la condition précédente vérifient une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

10. On connait seulement quelques cas où l'intégration de l'équation du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s\, \partial s_0} = \frac{\psi'(p)}{(1+ss_0)^2}$$

est possible : si $\psi(p) = 0$, $p = f(s) + f_0(s_0)$, les surfaces $\Sigma_1$ sont des surfaces minima ; les deux nappes de la développée sont applicables l'une sur l'autre.

Si $\psi(p) = p$, on a

$$p = \mathrm{L}(1+ss_0) + f(s) + f_0(s_0);$$

les surfaces $\Sigma$ correspondantes sont applicables sur le paraboloïde de révolution.

Si $\psi(p) = ap + be^{\frac{2p}{a}}$, l'élément linéaire des surfaces $\Sigma$ peut se ramener à la forme de Liouville

$$d\sigma^2 = du^2 + 2\left(u + av + be^{\frac{2v}{a}}\right)dv^2$$
$$= (\alpha - \beta)\left(\frac{\alpha - 2}{\alpha^2}\,d\alpha^2 - \frac{\beta - 2}{\beta^2}\,d\beta^2\right).$$

Si $\psi(p) = -(k+1)p^2$ et qu'on pose $2k + 2 = m(m-1)$, on tombe sur l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{m(1-m)p}{(\alpha-\beta)^2}\ (^1).$$

Dans ce cas, *on peut obtenir, par des quadratures, toutes les surfaces pour lesquelles le carré de l'élément linéaire possède la forme*

$$d\sigma^2 = du^2 + \left[\frac{u}{t} - m(m-1)\right]dt^2,$$

*toutes les fois que m est entier*. Les surfaces $\Sigma$ correspondantes (pour $m \geqq 3$) ne paraissent pas avoir été traitées jusqu'à présent.

11. Si l'on cherche les lignes géodésiques des surfaces précédentes (qui sont des surfaces spirales), on arrive au résultat suivant.

Les lignes géodésiques de l'élément linéaire

$$du^2 + 2[u - (k+1)v^2]\,dv^2$$

sont représentées par les formules

$$v = \frac{1}{4(k+1)}\varphi'(z), \qquad u = \frac{1}{16(k+1)}\varphi'^2(z) + \frac{\varphi^2(z)}{8z(1-z)},$$

$z$ désignant une variable auxiliaire, et $\varphi(z)$ l'intégrale générale de l'équation

$$z(1-z)\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2(k+1)\varphi = 0.$$

C'est un cas particulier de l'équation de la série hypergéométrique; on sait trouver l'intégrale générale.

---

(1) *Voir* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 54.

12. Toute surface spirale ayant $Oz$ pour axe est caractérisée par cette propriété : Si l'on fait tourner cette surface d'un angle quelconque autour de $Oz$, la nouvelle surface est homothétique à sa position primitive par rapport à un point de l'axe $Oz$. Si l'on choisit ce point pour origine, on obtient toutes les surfaces spirales, considérées comme enveloppes du plan mobile

$$(1-\alpha\beta)x + i(1+\alpha\beta)y + (\alpha+\beta)z + (\alpha-\beta)p = 0,$$

en prenant pour $p$ une fonction homogène quelconque de $\alpha$ et de $\beta$. Si le degré d'homogénéité est zéro, on a une surface de révolution.

Appliquons ceci aux surfaces S définies par les valeurs de $p$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{(2k+2)p}{(\alpha-\beta)^2} = 0.$$

Posons $\frac{\beta}{\alpha} = t$, $p = \alpha^r \varphi(t)$, on est conduit, pour déterminer $\varphi(t)$ à l'équation

$$t(1-t)^2\varphi''(t) - (r-1)(1-t)^2\varphi'(t) - (2k+2)\varphi(t) = 0,$$

qui n'est encore qu'un cas particulier de l'équation de Gauss.

Supposons qu'on ait obtenu pour $p$ une solution homogène et de degré $r$ en $\alpha$ et $\beta$, les équations $(a)$ (n° 8) déterminent une fonction $\omega$, homogène et de degré $2r$, en $\alpha$ et $\beta$, de la forme

$$\omega = s^{2r}\,\mathrm{F}(ss_0),$$

et cette solution $\omega$ peut être obtenue *sans aucune quadrature*. Le plan

$$\mathrm{X}(s+s_0) + i\mathrm{Y}(s_0-s) + \mathrm{Z}(ss_0+1) - \omega = 0$$

enveloppe une surface spirale $\Sigma_1$, dont la développée $\Sigma$ sera également une surface spirale. Les surfaces obtenues dépendent de *deux* constantes arbitraires.

Si nous faisons $\varphi(t) = (t-1)^m z$ et $2k+2 = m(m-1)$, l'équation différentielle précédente devient

$$t(1-t)z'' + [1-r-(2m-r+1)t]z' - m(m-r)z = 0;$$

une des intégrales sera $z = (1-t)^{-m}\,\mathrm{F}\left(m, 1-m, 1-r, \frac{t}{t-1}\right)$ et se réduit à une fraction rationnelle, quand $m$ est entier quel que soit $r$.

On peut donc obtenir, *sous forme finie,* les équations d'une infinité simple de surfaces spirales admettant l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = du^2 + \left[\frac{u}{t} - m(m-1)\right]dt^2,$$

toutes les fois que $m$ est entier.

13. Faisons dans les équations $(a)$ (n° 8) le changement de variables $s = \alpha$, $s_0 = -\frac{1}{\beta}$, $\omega = \frac{\pi}{\beta}$, puis posons (en supposant $p$ homogène en $\alpha$ et $\beta$)

$$\mathrm{H} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\beta}\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2, \qquad \mathrm{H}_1 = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\beta}\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2;$$

on trouve alors

$$z = -\frac{\alpha^2 H - \beta^2 H_1}{2r(2r+1)} + \frac{2\alpha\beta\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial\beta} + \beta\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\right)}{2r(2r-1)(2r+1)},$$

## Tome VI; année 1892.

### *Stouff* (X.). — Sur une classe de surfaces minima. (A, 1-12).

I. Soit $z = c$, l'équation du plan d'un cercle de rayon R, $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ étant deux fonctions satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} + \frac{\psi'(c-\zeta)}{\psi(c-\zeta)} = \frac{1}{R}\left\{\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta) + [\varphi(\zeta)\psi(c-\zeta)]^{-1}\right\},$$

les formules

$$x + iy = -\int \varphi^2(\zeta)\,d\zeta + \int \frac{d\eta}{\psi^2(\eta)},$$

$$x - iy = \int \frac{d\zeta}{\varphi^2(\zeta)} - \int \psi^2(\eta)\,d\eta,$$

$$z = \zeta + \eta$$

définissent les coordonnées d'un point d'une surface minima passant par le cercle considéré.

En posant

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\,\zeta, \qquad \psi(\eta) = \sqrt{ik}\,\mathrm{sn}\,\eta,$$

on a ainsi une surface cerclée minima, due à Riemann (*Œuvres complètes*, p. 311).

II. M. Stouff cherche à satisfaire à l'équation (1) par des fonctions plus simples que celles de Riemann.

Soit

$$\varphi(\zeta) = \lambda\frac{\zeta - a}{\zeta - b}e^{k\zeta}, \qquad \psi(\eta) = \lambda'\frac{\eta - a'}{\eta - b'}e^{k\eta},$$

$k$ aura une valeur réelle, extérieure à l'intervalle $\left(-\frac{1}{R}, +\frac{1}{R}\right)$. $\lambda\lambda'$ est déterminée par l'équation

$$2kR = \lambda\lambda' e^{kc} + \frac{1}{\lambda\lambda'}e^{-kc}.$$

Elle est réelle. $\delta$ étant une quantité réelle arbitraire, on aura

$$a = \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} - 1} + i\delta,$$

$$a' = \frac{c}{2} - \frac{2\lambda\lambda' e^{kc} R}{\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} - 1} - i\delta,$$

$$b = \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} R}{\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} - 1} + i\delta.$$

$$b' = \frac{c}{2} - \frac{2\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} R}{\lambda^2\lambda'^2 e^{2kc} - 1} - i\delta.$$

La surface minima peut se représenter par les équations

$$x + iy = -\frac{\lambda^2}{2k}\,\frac{\zeta - 2a + b}{\zeta - b}\,e^{2k\zeta} - \frac{1}{2k\lambda'^2}\,\frac{\eta_1 - 2b' + a'}{\eta_1 - a'}\,e^{-2k\eta_1},$$

$$x - iy = -\frac{1}{2k\lambda^2}\,\frac{\zeta - 2b + a}{\zeta - a}\,e^{-2k\zeta} - \frac{\lambda'^2}{2k}\,\frac{\eta_1 - 2a' + b'}{\eta_1 - b'}\,e^{2k\eta_1},$$

$$z = \zeta + \eta_1.$$

Le plan $z = a + b' = a' + b$ coupe la surface sous un angle constant.

En second lieu, posons

$$R = -\frac{\sigma(a-b)\,\sigma(c-a-b)}{\sqrt{\sigma(c-b-b')\,\sigma(c-a-a')}},$$

$$\varphi(\zeta) = \lambda\,\frac{\sigma(\zeta - a)}{\sigma(\zeta - b)}\,e^{\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \psi(\zeta) = \lambda'\,\frac{\sigma(\zeta - a')}{\sigma(\zeta - b')}\,e^{\zeta\frac{\sigma'(a'-b')}{\sigma(a'-b')}},$$

$$a - b = a' - b',$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\,e^{i\mu - \frac{c}{2}\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}, \qquad \lambda' = \sqrt[4]{\frac{\sigma(c-b-b')}{\sigma(c-a-a')}}\,e^{-i\mu - \frac{c}{2}\frac{\sigma'(a'-b')}{\sigma(a'-b')}}.$$

où $\mu$ désigne une constante arbitraire.

La surface minima est alors définie par les formules

$$x + iy = -\lambda^2\,\frac{\sigma^2(a-b)\,\sigma(\zeta - 2a + b)}{\sigma(2a-2b)\,\sigma(\zeta - b)}\,e^{2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}$$
$$- \frac{1}{\lambda'^2}\,\frac{\sigma^2(a'-b')\,\sigma(\eta_1 - 2b' + a')}{\sigma(2a'-2b')\,\sigma(\eta_1 - a')}\,e^{-2\eta_1\frac{\sigma'(a'-b')}{\sigma(a'-b')}},$$

$$x - iy = -\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\sigma^2(a-b)\,\sigma(\zeta - 2b + a)}{\sigma(2a-2b)\,\sigma(\zeta - a)}\,e^{-2\zeta\frac{\sigma'(a-b)}{\sigma(a-b)}}$$
$$- \lambda'^2\,\frac{\sigma^2(a'-b')\,\sigma(\eta_1 - 2a' + b')}{\sigma(2a'-2b')\,\sigma(\eta_1 - b')}\,e^{2\eta_1\frac{\sigma'(a'-b')}{\sigma(a'-b')}}.$$

$$z = \zeta + \eta_1.$$

Le plan $z = c$ coupe la surface suivant un cercle; il n'en est pas de même, en général, des autres plans parallèles au plan des $xy$, mais *il existe entre leur courbure proprement dite et leur courbure géodésique une relation linéaire.*

Le plan $z = a + b' = a' + b$ coupe la surface sous un angle constant, et il existe des plans qui donnent des sections dont le rayon de courbure géodésique est constant.

## *Legoux (A.).* — Sur les courbes synchrones. (B, 1-16).

Soient

$$x = f_1(u, a),$$
$$y = f_2(u, a)$$

les équations d'une famille de courbes, $u$ désignant le paramètre variable, $a$ une constante arbitraire. Soit $\varphi$ la fonction des forces, on a

$$v^2 = 2\varphi(x, y) = 2\varphi(u, a).$$

2me Part.



On supposera $\varphi = 0$ pour $x = y = 0$. On en conclut

$$t\sqrt{2} = \int_0^u \frac{\sqrt{\left(\frac{df_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{du}\right)^2}}{\sqrt{\varphi}}\, du.$$

Pour obtenir la courbe synchrone, il faudra éliminer $a$ et $u$ entre les équations

$$x = f_1(u, a),$$

$$y = f_2(u, a),$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial a} da = 0.$$

*Exemple I.* — La force est la pesanteur, l'axe $Ax$ est dirigé suivant la verticale; les lignes AM sont des droites passant par l'origine (EULER, *Mécanique*, t. II, p. 47)

$$x = u^2, \quad y = au, \quad \varphi = \sqrt{2gx}.$$

La courbe synchrone est $x^2 + y^2 = \frac{gt^2}{2} x$.

*Exemple II.* — La force est la pesanteur, les courbes AM sont des cercles dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0 \quad \text{(Euler)}.$$

Posons $F(u) = -\int_0^u \frac{du}{\sqrt{\cos u}}$; les équations de la courbe synchrone sont

$$x = \frac{2gt^2 \cos u}{F^2(u)}, \quad y = \frac{2gt^2(1 - \cos u)}{F^2(u)}.$$

*Exemple III.* — La force est encore la pesanteur et les courbes (AM) sont des cycloïdes

$$x = a(1 - \cos u),$$

$$y = a(u - \sin u).$$

Les équations de la courbe synchrone sont

$$x = gt \frac{1 - \cos u}{u}, \quad y = gt \frac{u - \sin u}{u^2}.$$

On a, en faisant varier $t$, un système de courbes orthogonales aux cycloïdes.

Dans le cas des forces centrales, supposons que les courbes soient des cercles représentés par les équations

$$x = a \cos u,$$

$$y = a(1 + \sin u).$$

Soit R la force centrale et posons $R = k r$.

La courbe synchrone est alors une droite passant par l'origine

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \quad (u = \text{const.}).$$

Soit $R = k^2 r^m$, alors

$$a^{\frac{m-1}{2}} = \frac{A}{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{2}}};$$

pour $m = -1$, les équations des courbes synchrones sont

$$x = \frac{t}{A\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\cos u, \qquad y = \frac{t}{A\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}(1-\sin u).$$

D'une façon générale supposons les équations des courbes (AM) écrites sous la forme

$$x = a f_1(u),$$
$$y = a f_2(u).$$

Supposons le théorème des fonctions exprimé par l'équation

$$U = 2a^m f_1^m \varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

Soit enfin

$$\psi(u) = \int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{f_1^{\frac{m}{2}}\left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

La courbe synchrone sera définie par les équations

$$x = \left[\frac{\psi(u)}{t\sqrt{2}}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_1(u),$$

$$y = \left[\frac{\psi(u)}{t\sqrt{2}}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_2(u).$$

Cherchons maintenant les courbes synchrones sur les surfaces. Supposons chaque point de la surface défini par l'intersection de deux courbes appartenant à des systèmes orthogonaux de paramètres $r$ et $\psi$.

Soit $F(r, \psi, a) = 0$ une équation définissant une famille de courbes tracées sur la surface et partant d'un point de la surface; supposons que ces courbes soient les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces telles qu'il existe une fonction potentielle $\varphi$.

L'équation des courbes synchrones s'obtiendra par l'élimination de $a$ entre $F(r, \psi, a) = 0$ et $\frac{\partial t}{\partial r}dr + \frac{\partial t}{\partial a}da = 0$.

Comme application, cherchons les courbes synchrones correspondant à une famille de courbes géodésiques tracées sur une surface de révolution à partir d'un point donné, parcourues par un point matériel soumis à l'action d'une force donnée.

Ici, le carré de l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = du^2 + r^2 d\psi^2.$$

$r$ est le rayon du parallèle, $\psi$ l'angle d'un méridien quelconque avec un méridien pris pour origine, $u$ la longueur d'arc du méridien, $u$ étant lié à $r$ par l'équation $u = f(r)$ qui définit la méridienne.

L'équation des courbes géodésiques peut s'écrire

$$(2) \qquad d\psi = \frac{a\, f'(r)\, dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \; ([1]).$$

Soit

$$t = \int \frac{r\, du}{\sqrt{\varphi}\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Les courbes synchrones sont définies par une équation résultant de l'élimination de $a$ entre (2) et

$$\frac{\partial t}{\partial r}\, dr + \frac{\partial t}{\partial a}\, da = 0.$$

*Exemple.* — Soit

$$r^2 - u^2 = h^2, \qquad \varphi = \frac{A\, r^m}{r^2 - h^2} \qquad (h \text{ et } A \text{ constant}).$$

La surface est l'alysséide de Bour.

Soit

$$r = \frac{a}{2}(e^\theta + e^{-\theta}), \qquad \chi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} (e^\theta + e^{-\theta})^{2-m}\, d\theta, \qquad a = \left(\frac{\chi(\theta)}{A\, 2^{2-m}\, t}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

En éliminant $a$, on aura l'équation des courbes synchrones.

Le cas $m = 1$ n'est pas compris dans les formules générales; $t$ est alors indépendant de $a$, $\theta$ une constante.

Les formules précédentes s'appliquent à des trajectoires tracées sur toutes les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

## *Appell* (*Paul*). — Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système. (C, 1, 6).

Considérons un système de $n$ points matériels $M_1, (x_1, y_1, z_1), \ldots, M_n, (x_n, y_n, z_n)$, assujettis à des liaisons indépendantes du temps et sollicités, $M_1$ par la force $P_1$, $(X_1, Y_1, Z_1) \ldots$, $M_n$ par la force $P_n$, $(X_n, Y_n, Z_n)$. Supposons qu'il existe pour ce système une position d'équilibre, dans laquelle les points $M_1, \ldots, M_n$, occupent les positions $m_1 (a_1, b_1, c_1), \ldots, m_n, (a_n, b_n, c_n)$, les forces correspondantes étant $p_1, (A_1, B_1, C_1), \ldots, p_n, (A_n, B_n, C_n)$.

I. Marquons $n$ points fixes, $O_1$ sur $p_1, \ldots, O_n$ sur $p_n$, *la fonction*

$$S = p_1 (M_1 O_1) + \ldots + p_n (M_n O_n),$$

*est maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée.* La réciproque n'est pas exacte ([2]).

---

([1]) *Voir* Darboux, *Théorie des surfaces.*

([2]) *Voir* Lagrange, *Mécanique analytique, Statique,* Section I, n° 18, Section III, § V].

II. Imaginons les points $O_1, \ldots, O_n$ éloignés indéfiniment sur $p_1, \ldots, p_n$, la fonction

$$S = \sum_1^n i(A_i x_i + B_i y_i + C_i z_i)$$

sera, en général, maximum ou minimum dans la position d'équilibre considérée (¹).

III. Prenons sur $p_1$, $(m_1 O_1) = \frac{p_1}{k}$, ..., sur $p_n$, $(m_n O_n) = \frac{p_n}{k}$, $k$ étant une constante différente de zéro.

Ici, la position d'équilibre rendra maximum ou minimum la fonction

$$T = -k[(M_1 O_1)^2 + \ldots + (M_n O_n)^2] \ (^2).$$

IV. Si

$$(m_1 O_1) = \left(\frac{p_1}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad \ldots, \quad (m_n O_n) = \left(\frac{p_n}{k}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

$\nu$ étant une constante, la fonction qui passe par un maximum ou un minimum est

$$R = -\frac{k}{\nu+1}[(M_1 O_1)^{\nu+1} + \ldots + (M_n O_n)^{\nu+1}].$$

Si $\nu = -1$, il faut remplacer R par

$$R = -k \log(M_1 O_1)\ldots(M_n O_n).$$

V. Toutes les propositions précédentes sont des cas particuliers de la suivante : formons une fonction U de $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, telle que

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = A_i, \quad \frac{\partial U}{\partial b_i} = B_i, \quad \frac{\partial U}{\partial c_i} = C_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Le même système sollicité par des forces $P'_1, \ldots, P'_n$ dérivant de la fonction des forces U sera encore en équilibre dans la position $m_1, \ldots, m_n$, puisqu'alors $P'_1$ et $p_1, \ldots, P'_n$ et $p_n$ coïncident. Donc la variation de U s'annule pour la position d'équilibre.

Des remarques analogues peuvent être faites au sujet du principe de la moindre action, et du principe d'Hamilton, pour un mouvement déterminé du système, correspondant à des conditions initiales déterminées. On obtient alors des intégrales définies devenant maxima ou minima pour ce mouvement déterminé.

## *Kœnigs* (*G.*). — La Géométrie réglée et ses applications. Étude bibliographique (*suite*) (³).

*Chapitre III.* — Soit $u$ un paramètre fixant la position d'un point M sur

(¹) MOBIUS, *Traité de Statique*.

(²) Voir *Mécanique analytique de Lagrange*, 3ᵉ édition, par M. J. BERTRAND, t. II, Note IX.

(³) *Voir* le *Bulletin*, 2ᵉ série, t. XVII, septembre 1893, p. 150.

la droite $x$ d'une façon telle qu'à chaque point M réponde une seule valeur de $u$, et inversement. Soit de même $t$ un paramètre fixant la position d'un plan $\pi$ mené par $x$. Une relation entre $u$ et $t$

$$f(u, t) = 0$$

fait se correspondre suivant une certaine loi les points et les plans de $x$. Si $f$ est de degré $m$ en $u$, $\mu$ en $t$, on dira que cette correspondance est de la classe $\mu$, et du degré $m$; pour $m = \mu = 1$, on retrouve les corrélations dont il a parlé déjà ([1]).

Appelons *couple d'une correspondance* le système d'un point M et du plan $\pi$ correspondant : deux correspondances de degrés $m$ et $m'$, et de classes $\mu$ et $\mu'$ ont, en général, $\mu m' + m\mu'$ couples communs.

Étant donnés, sur une droite deux couples $(M, \pi)$, $(M', \pi')$ les couples $(M, \pi')$, $(M', \pi)$ s'appelleront *couples inverses* des premiers.

Considérons sur une droite $x$ deux corrélations homographiques, H et H', ayant pour couples communs $(F, \Phi)$, $(F', \Phi')$.

Si un plan $\pi$ tourne autour de $x$, les homologues O et O' de $\pi$ dans ces deux corrélations se correspondent homographiquement et F et F' sont les points doubles de cette homographie.

Le rapport anharmonique $(O, O', F, F') = k$ est constant.

De même, si un point O se meut sur $x$, ses plans correspondants $\pi$ et $\pi'$ décrivent deux faisceaux homographiques dont $\Phi$ et $\Phi'$ sont les plans doubles. Le rapport anharmonique $(\pi, \pi', \Phi, \Phi') = k_1$ est constant. De plus, on a $k_1 = k$. $k$ s'appellera le *rapport anharmonique* des deux corrélations. Si l'on pose $V = \frac{1}{2\sqrt{-1}} Lk$, V s'appellera l'angle des deux corrélations.

Comme application immédiate, deux surfaces réglées telles que les plans tangents communs passant par une génératrice commune soient les plans isotropes issus de cette droite *se couperont sous un angle constant en tous les points de cette génératrice commune.*

Si l'on a $k = -1$, on dira que les deux corrélations sont *en involution.* Soient $(M, \pi)$ et $(M', \pi')$ deux couples de H. Si H' et H sont en involution, les couples inverses $(M, \pi')$, $(M', \pi)$ appartiennent à H'. Inversement, si H' admet les deux couples inverses de deux couples de H, H et H' sont en involution.

Soit

$$aut + bu + ct + e = 0$$

l'équation de H;

$$a'ut + b'u + c't + e' = 0$$

celle de H'.

Posons $\theta(a, b, c, e) = bc - ae$, la condition d'involution est

$$a'\frac{\partial\theta}{\partial a} + b'\frac{\partial\theta}{\partial b} + c'\frac{\partial\theta}{\partial c} + e'\frac{\partial\theta}{\partial e} = 0.$$

Les corrélations pour lesquelles on a $bc - ae = 0$ seront dites *singulières.* Leur équation s'écrit $(at + b)(au + c) = 0$.

Il existe dans une corrélation singulière un couple particulier, le couple $(O, \pi)$, dit *couple singulier* jouissant de la propriété suivante : les couples de

([1]) Voir *loc. cit.*, p. 152.

la corrélation s'obtiennent en associant au point O un plan quelconque de la droite, ou en associant au plan $\pi$ un point quelconque de la même droite.

Une corrélation homographique H est en involution avec un autre H′, H′ étant singulière, lorsque le couple singulier de H′ appartient à H.

Deux corrélations singulières seront dites *en involution* si leurs couples singuliers ont en commun soit le point, soit le plan.

Si deux corrélations H et $H_1$ ont en commun deux couples, toute corrélation H′, en involution avec H et $H_1$, contient les couples inverses des deux premiers, et réciproquement, toute corrélation qui contient ces couples inverses est en involution avec H et $H_1$.

Le fait suivant domine la théorie des systèmes de complexes linéaires : Deux complexes linéaires ont généralement en commun un couple de droites conjuguées.

Soient

$$A = \Sigma a_i x_i = 0,$$

$$B = \Sigma b_i x_i = 0$$

les équations des deux complexes. Posons $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$, $C = \Sigma c_i x_i = 0$, enfin

$$\alpha^2 \Omega(a) + 2\alpha\beta\, \Omega(a, b) + \beta^2 \Omega(b) = 0.$$

On a ainsi deux complexes spéciaux C dont les axes forment le couple des droites conjuguées commun à A et à B.

Considérons tous les complexes linéaires compris dans l'équation

$$\lambda A + \mu B = 0.$$

Nous dirons qu'ils forment un *système à deux termes*. Tous les complexes d'un système à deux termes (A, B) ont en commun un couple de droites conjuguées, qui sont les axes des deux complexes spéciaux du système.

On appelle *congruence linéaire* l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires. Elle est composée des droites qui rencontrent les droites du couple conjugué commun aux deux complexes. Ces droites s'appellent les *directrices* de la congruence. Une congruence linéaire est du premier ordre et de la première classe. Deux complexes linéaires ont en outre en commun une infinité de faisceaux plans que l'on engendre en associant à un plan Π, mené par une directrice de la congruence, le point P où ce plan coupe l'autre directrice.

Lorsque l'équation

$$\alpha^2 \Omega(a) + 2\alpha\beta\, \Omega(a, b) + \beta^2 \Omega(b) = 0$$

a une racine double, et n'est pas une identité, le système (A, B) à deux termes contient un complexe spécial unique et la directrice de ce complexe spécial est une droite commune à tous les complexes du système.

Tous les complexes du système (A, B) déterminent sur cette droite qui leur est commune *la même corrélation normale*. La congruence linéaire des droites communes aux deux complexes A et B est définie comme il suit : pour qu'une droite Δ fasse partie de la congruence, il faut et il suffit : 1° qu'elle coupe la directrice $z$; 2° que le plan $(z, \Delta)$ et le point $(z, \Delta)$ soient deux éléments correspondants d'une corrélation homographique connue, *a priori*, sur la droite $z$.

C'est la congruence que l'on obtient en prenant les tangentes à une quadrique aux différents points d'une génératrice de cette quadrique.

Lorsque tous les complexes d'un système à deux termes sont spéciaux, leurs directrices forment un faisceau plan. La congruence commune à ces complexes se décompose en deux hyperfaisceaux : l'un est l'ensemble des droites du plan des directrices, l'autre est la gerbe des droites issues du point de rencontre des directrices. Cette congruence dégénérée a une infinité de directrices formant un faisceau $(A, \alpha)$. La corrélation définie sur chaque droite de ce faisceau sera singulière, $(A, \alpha)$ en sera le couple singulier.

L'expression $\Phi(a|b) = \Omega(a)\,\Omega(b) - [\Omega(a|b)]^2$ est un *invariant* et un *combinant;* un invariant, parce que, si l'on effectue une transformation linéaire des variables $x_i$, il se reproduit multiplié par une certaine puissance (la $4^e$) du déterminant de la substitution; un combinant parce que, si l'on remplace les deux équations $A = 0$, $B = 0$ par $\lambda A + \mu B = 0$, $\lambda' A + \mu' B = 0$, il se reproduit multiplié par $(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2$.

Soient quatre complexes du système $A + kB = 0$, obtenus en prenant $k = \alpha, \beta, \gamma, \delta$, et $\Delta$ une droite quelconque de la congruence commune, les pôles dans les quatre complexes d'un plan passant par $\Delta$ ont un rapport anharmonique égal à $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, constant, par conséquent, quand le plan tourne autour de $\Delta$, et quand $\Delta$ se déplace dans la congruence; de même les plans polaires d'un point quelconque pris sur $\Delta$ dans les quatre complexes forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Ces deux théorèmes subsistent si les deux directrices de la congruence viennent à coïncider, ou si tous les complexes du système deviennent spéciaux, le rapport anharmonique étant alors égal à celui des quatre directrices des quatre complexes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Revenons à l'hypothèse où les deux directrices de la congruence sont distinctes. Deux complexes $A + \rho B = 0$, $A + \rho' B = 0$ étant donnés, adjoignons-leur les complexes spéciaux du système, $A + kB = 0$, $A + k'B = 0$.

Soit $\Delta$ une droite de la congruence; elle coupe en deux points F et F' les directrices $z$ et $z'$, et détermine avec $z$ et $z'$ deux plans $\Phi$ et $\Phi'$. Un plan $\Pi$ passant par $\Delta$ a pour pôles $P_\rho$, $P_{\rho'}$, F et F' dans les quatre complexes et l'on a

$$(P_\rho, P_{\rho'}, F, F') = (\rho, \rho', k, k').$$

Un point P sur $\Delta$ a pour plans polaires $\Pi_\rho$, $\Pi_{\rho'}$, $\Phi$ et $\Phi'$, et

$$(\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}, \Phi, \Phi') = (\rho, \rho', k, k') = \varepsilon;$$

de plus

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\rho\rho'\,\Omega(b) + (\rho + \rho')\,\Omega(a, b) + \Omega(a)}{(\rho - \rho')\sqrt{-\Phi(a, b)}}.$$

Si nous faisons $\rho = 0$, $\rho' = \infty$,

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\Omega(a, b)}{\sqrt{-\Phi(a, b)}}.$$

$\varepsilon$ est le rapport anharmonique des deux corrélations normales des complexes A et B suivant une quelconque de leurs droites communes. M. Klein appelle *angle des deux complexes* l'angle de ces deux corrélations normales.

Soit $V = \frac{1}{2i} L\varepsilon$, $\cos V = \frac{\Omega(a, b)}{\sqrt{\Omega(a)\,\Omega(b)}}$.

Si $V = \frac{\pi}{2}$, les corrélations normales sont en involution, et les deux complexes sont dits *en involution*, ou *orthogonaux*; alors $\Omega(a, b) = 0$.

L'équation $\Omega(a, b) = 0$ sera la condition pour que deux complexes A et B soient en involution, même si l'un est spécial ou tous les deux. Un complexe spécial est en involution avec tous les complexes qui contiennent sa directrice, et réciproquement. Pour que deux complexes spéciaux soient en involution, il faut et il suffit que leurs directrices se rencontrent.

Lorsque deux complexes linéaires sont en involution, chacun d'eux est son propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

$\lambda A + \mu B = 0$ étant l'équation d'un système à *deux termes*, on conçoit de même l'existence de systèmes à 3, 4 et 5 termes définis par les équations

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$
$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D = 0,$$
$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E = 0.$$

Si les six complexes linéaires A, B, C, D, E, F ne font pas partie d'un système à 1, 2, 3, 4 ou 5 termes, l'équation de tout complexe linéaire peut recevoir la forme

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = 0.$$

Les complexes linéaires qui sont en involution avec tous ceux d'un système à $p$ termes forment eux-mêmes un système à $6 - p$ termes; ces deux systèmes seront dits *complémentaires*. En particulier, les complexes d'un système à 5 termes sont orthogonaux à un complexe linéaire fixe.

Soient $\Sigma$ et $\Sigma_0$ deux systèmes complémentaires à $p$ et à $6 - p$ termes $(1 < p < 6)$ : les directrices des complexes spéciaux de l'un des deux systèmes sont les droites communes aux complexes du système complémentaire; et les droites communes aux complexes de l'un des systèmes coupent toutes les droites communes aux complexes de l'autre système.

Soient A, B, C trois complexes ne faisant pas partie d'un système à 2 termes. Posons

$$\Psi(a, b, c) = \begin{vmatrix} \Omega(a) & \Omega(a, b) & \Omega(a, c) \\ \Omega(b, a) & \Omega(b) & \Omega(b, c) \\ \Omega(c, a) & \Omega(c, b) & \Omega(c) \end{vmatrix}.$$

$\Psi$ est un *invariant* et un *combinant* (comme $\Phi$).

Si $\Psi$ n'est pas nul, les droites communes à tous les complexes du système à 3 termes $\Sigma$,

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

forment l'un des systèmes $Q_0$ de génératrices d'une quadrique dont l'autre système Q est formé, des directrices des complexes spéciaux de ce système à 3 termes.

On peut dire que $Q_0$ et Q forment deux *demi-quadriques complémentaires*.

Le système à 3 termes $\Sigma_0$ complémentaire de $\Sigma$ admet la demi-quadrique $Q_0$ comme lieu des directrices de ses complexes spéciaux, tandis que les droites communes à tous ses complexes forment la demi-quadrique Q.

Si le déterminant $\Psi$ est nul, sans que tous ses premiers mineurs soient nuls, les complexes A, B et C peuvent être considérés comme spéciaux tous les trois;

la directrice $\Delta_C$ de C coupe les deux directrices $\Delta_A$, $\Delta_B$, celles-ci ne se coupent pas.

Soient

$$F \text{ et } F' \text{ les points } (\Delta_C, \Delta_A),\ (\Delta_C, \Delta_B),$$
$$\Phi \text{ et } \Phi' \text{ les plans } (\Delta_C, \Delta_A),\ (\Delta_C, \Delta_B).$$

Les droites communes à tous les complexes du système à trois termes (A, B, C) sont celles des deux faisceaux plans $(F, \Phi')$, $(F', \Phi)$. On a ainsi un nouveau mode de dégénérescence d'une quadrique digne de remarque.

Si tous les premiers mineurs de $\Psi$ sont nuls, on peut regarder les complexes A et B comme spéciaux, C n'étant pas spécial, mais contenant les directrices de A et de B, qui se rencontrent en F et déterminent un plan $\Phi$. Les droites communes aux trois complexes A, B, C sont celles du faisceau $(F, \Phi)$, les droites du faisceau $(F, \Phi)$ sont aussi les directrices des complexes spéciaux du système (A, B, C), ou du système complémentaire, ou les droites communes aux complexes du système complémentaire.

Si $\Psi$ est identiquement nul, tous les complexes du système $\Sigma$, (A, B, C) sont spéciaux, leurs directrices forment un hyperfaisceau. Les droites de cet hyperfaisceau sont les seules qui soient communes à tous les complexes du système, $\Sigma$ coïncide avec son complémentaire. On voit que les complexes d'un système à 3 termes peuvent avoir en commun une congruence de droites, sans que pourtant il existe entre trois quelconques de ces complexes une relation linéaire.

Soit maintenant $\Sigma$ un système à 4 termes (A, B, C, D); le système complémentaire $\Sigma_0$ est à deux termes.

Le discriminant D de la forme $\Omega(a\lambda + b\mu + c\rho + d\nu)$ est un invariant et un combinant. S'il est différent de zéro, tous les complexes de $\Sigma$ ont deux droites communes, savoir les directrices de la congruence formée par les axes des complexes spéciaux de $\Sigma$. Si D est nul sans que tous ses premiers mineurs le soient, la congruence des directrices des complexes spéciaux est singulière.

Si tous les premiers mineurs de D sont nuls, les complexes de $\Sigma$ ont en commun un faisceau de droites. La forme $\Omega$ ne peut ni se réduire à un carré parfait, ni s'évanouir identiquement.

En général cinq complexes n'ont pas de droites communes, à moins que le complexe complémentaire ne soit spécial, auquel cas sa directrice est commune aux cinq complexes.

Il y a encore pour les systèmes à 5 termes un invariant combinant, qui s'annule lorsque le complexe complémentaire est spécial.

Tout complexe qui contient les droites de $p$ complexes $A_1, \ldots, A_p$ d'un système à $p$ termes fait partie du système à $p$ termes

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_p A_p = 0.$$

*Chapitre IV.* — Supposons qu'une droite $x$ dépende d'un paramètre $t$ et engendre une surface gauche. L'ensemble des tangentes à la surface en tous les points de la génératrice $x$ constitue une congruence linéaire singulière : tous les complexes linéaires qui la contiennent définissent sur $x$ la même corrélation normale, la corrélation de Chasles. Ils forment un système à deux termes représenté par l'équation

$$\omega(\lambda x + \mu x', y) = 0,$$

où $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y$ étant la droite courante. Ce système à deux termes ne contient qu'un complexe spécial, correspondant à $\mu = 0$.

La congruence linéaire attachée à la génératrice $x$, et celle attachée à la génératrice infiniment voisine, ont en commun une demi-quadrique Q, définie par les équations

$$\sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} y_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} y_i = 0.$$

Une droite quelconque $y$ de cette demi-quadrique coupe 3 droites consécutives de la surface gauche; cette demi-quadrique est donc constituée par un système de génératrices de *l'hyperboloïde osculateur de la surface.*

On dit qu'un complexe linéaire a un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre avec une surface réglée donnée s'il contient $(p+1)$ génératrices consécutives de la surface. Les complexes tangents constituent un système à 4 termes complémentaires du système à 2 termes représenté par l'équation

$$\omega(\lambda x + \mu x', y) = 0.$$

Les complexes qui ont avec la surface un contact du second ordre constituent un système à 3 termes et ont en commun la demi-quadrique $Q_0$ complémentaire de la demi-quadrique Q, c'est-à-dire les génératrices de l'hyperboloïde osculateur de même système que $x$.

Les complexes qui ont avec la surface un contact du troisième ordre constituent un système à 2 termes. Les directrices $\Delta$ et $\Delta'$ des complexes spéciaux de ce système coupent 4 génératrices consécutives de la surface, elles ont un contact du troisième ordre avec la surface, chacune en un point de $x$ : ce sont deux génératrices communes aux deux hyperboloïdes osculateurs suivant les génératrices $x$ et $x + dx$.

Si les génératrices de la surface gauche ne font pas partie d'une congruence linéaire, il existe un complexe *osculateur* (contenant 5 génératrices consécutives).

Deux complexes osculateurs consécutifs ont pour directrices de leur congruence commune les droites $\Delta$ et $\Delta'$; trois complexes osculateurs consécutifs ont en commun la demi-quadrique $Q_0$; quatre complexes osculateurs consécutifs ont en commun deux droites *infiniment voisines* de $x$, d'où il suit qu'un complexe linéaire dépendant d'un paramètre n'est pas toujours osculateur à une surface réglée.

Dans l'hypothèse $\omega(x') = 0$, les complexes $\omega(\lambda x + \mu x', y) = 0$ sont tous spéciaux; les droites $x$ et $x'$ se coupent en un point o et ont en commun un plan $\pi$. La congruence des droites qui rencontrent les droites $x$, $x + x'\,dt$ se décompose dans l'ensemble des droites du plan $\pi$ et l'ensemble des droites issues de o.

La rencontre des droites $x$, $x + x'\,dt$ a lieu au quatrième ordre près.

La série sera en général formée des tangentes d'une courbe gauche, o étant le point de contact de la courbe avec $x$, $\pi$ le plan osculateur.

Pour que la série réglée se compose des génératrices d'un cône ou des tangentes à une courbe plane, il faut et il suffit qu'on ait $\omega(x'') = 0$.

Comme application de ce qui précède, on démontre aisément que, si les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur $\pi$, en un point o de la courbe, est le plan polaire de ce plan, dans le complexe.

Soient (o, $\pi$) un faisceau quelconque, et $a$, $b$ deux droites de ce faisceau, dépendant d'un paramètre $t$. En général la tangente D au lieu du point o n'est pas dans le plan $\pi$, et la caractéristique $\Delta$ du plan $\pi$ ne passe pas par o. Pour

qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait $\omega(a, b') = o$. Appelons *bandeau* le système de faisceaux plans ainsi définis. Les droites D et Δ sont données par l'expression $\lambda a + \mu b$, où $\frac{\lambda}{\mu}$ est fourni par l'équation

$$\omega(a')\lambda^2 + 2\omega(a', b')\lambda\mu + \omega(b')\mu^2 = o.$$

Si les droites D et Δ coïncident, le faisceau (o, π) est le faisceau osculateur de la courbe lieu du point o.

Comme cas plus particuliers, il y a celui où la droite $a$ est fixe, le point o et le plan π étant deux éléments correspondants d'une corrélation sur $a$; enfin celui où le point o est fixe, ou bien le plan π.

Dans le cas où les faisceaux plans dépendent de plusieurs paramètres, s'il n'existe qu'une relation entre les coordonnées du point o, le système des faisceaux (o, π) est constitué par les points d'une surface et le plan tangent en chacun de ces points. S'il y a deux relations entre les coordonnées du point o, nous aurons l'ensemble des faisceaux obtenus en associant à chaque point d'une courbe un plan tangent quelconque à la courbe en ce point.

Avec trois relations, le point o est fixe et le plan π mobile arbitrairement autour de ce point.

Une surface développable donne des faisceaux dans lesquels le plan ne dépend que d'un paramètre. Le plan fournit des faisceaux dans lesquels le plan est fixe, et le point o quelconque dans le plan.

Enfin citons les faisceaux appartenant à une droite.

Dans tous ces cas, on aura

$$\omega(b, da) = o.$$

Soit le complexe de droites

$$f(x_1, \ldots, x_6) = f(x) = o;$$

$x$ étant une droite du complexe, on donne le nom de *complexes linéaires tangents* aux complexes du système à deux termes

$$\sum\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) y_i = o.$$

Il n'y a qu'un complexe spécial tangent, celui qui a $x$ pour directrice.

Tous les complexes linéaires tangents définissent sur $x$ la même corrélation normale, que l'on appelle *corrélation normale du complexe* $f(x) = o$ *sur sa droite* $x$.

Si les tangentes $x$ d'une courbe font partie d'un complexe $f(x) = o$, le faisceau osculateur de la courbe appartient à la corrélation normale du complexe $f = o$ sur la droite $x$. Ainsi, si l'on fait passer un plan π par une droite $x$ d'un complexe, la courbe enveloppe du complexe relative au plan π est touchée par la droite $x$ en un point o; le point o et le plan π se correspondent dans la corrélation normale du complexe. Pareillement, si l'on prend un point o sur une droite $x$ d'un complexe, le cône du complexe qui a le point o pour sommet est tangent le long de $x$ à un plan π homologue de o dans la corrélation normale.

Plus généralement, si l'on considère la corrélation de Chasles d'une surface réglée d'un complexe relative à une de ses droites $x$, cette corrélation est en involution avec la corrélation normale du complexe relative à $x$.

M. Kœnigs appelle *faisceaux plans* d'un complexe $f(x) = 0$ tous les faisceaux plans (o, $\pi$) dont le point et le plan sont des éléments correspondants de la corrélation normale du complexe sur une droite $x$ du complexe : les plans $\pi$ des faisceaux du complexe dont le point o est donné enveloppent le cône du complexe qui a pour sommet ce point, et le lieu des points o des faisceaux d'un complexe dont le plan est donné est la courbe enveloppe des droites du complexe relative à ce plan.

L'expression $\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ est un invariant différentiel du complexe $f(x) = 0$. On appelle *droite singulière* du complexe toute droite pour laquelle l'invariant $\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ est nul. Les complexes tangents suivant une droite singulière sont tous spéciaux ; leurs directrices forment un faisceau plan (o, $\pi$) : la corrélation normale de la droite singulière sera singulière; toute surface réglée non développable contenue dans le complexe et passant par la droite singulière $x$ devra toucher en o le plan $\pi$. Toute surface développable du complexe passant par la droite $x$ devra ou bien admettre o sur son arête de rebroussement, ou bien toucher le plan $\pi$.

On doit à M. Pasch le théorème suivant : « Les faisceaux plans (o, $\pi$) afférents à toutes les droites singulières du complexe ont une enveloppe que l'on appelle *surface de singularités*. Toute surface réglée du complexe touche généralement la surface de singularités en un certain nombre de points. »

Si, pour un complexe de droites, on a

$$\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

identiquement, ou en vertu de $f = 0$, $\omega = 0$, les droites du complexe ont une enveloppe, c'est-à-dire touchent une surface fixe, non développable ou développable, ou bien coupent une courbe fixe.

Rappelons les principales propriétés des congruences de droites. Les droites d'une congruence sont généralement tangentes à deux surfaces. Dans certains cas, ces surfaces peuvent se réduire à des courbes, ou coïncider.

Soit une congruence commune à deux complexes A et B. Les corrélations normales $H_A$, $H_B$ des complexes A et B sur la droite $x$, ont en commun deux couples (F, $\Phi'$), (F', $\Phi$); les couples inverses (F, $\Phi$), (F', $\Phi'$) s'appellent *couples focaux*, F et F' sont les foyers, $\Phi$ et $\Phi'$ les plans focaux de la droite $x$. Les points F et F' décrivent respectivement deux surfaces S et S', que l'on appelle les *surfaces focales*. Ces surfaces peuvent se réduire à des courbes. Toute surface réglée de la congruence qui passe par $x$ touche en F le plan $\Phi$, et en F' le plan $\Phi'$. Par chaque droite $x$ de la congruence, il passe deux développables de la congruence, et les faisceaux osculateurs de ces développables sont respectivement (F, $\Phi'$) et (F', $\Phi$). Les arêtes des développables forment sur S et sur S' deux familles de courbes C et C' dont les tangentes engendrent la congruenee. Toute droite $x$ de la congruence est tangente en ses foyers aux surfaces focales de la congruence.

Les couples focaux (F, $\Phi$), (F', $\Phi'$) sont tangents aux surfaces focales.

La développable dont une courbe C' est l'arête est circonscrite à S suivant une courbe D. Les courbes C et D forment sur S un réseau conjugué. Pareillement, les développables qui ont pour arêtes les courbes C sont circonscrites à S' suivant des courbes D' qui forment avec les courbes C' un système conjugué.

Dans le cas où F décrit une courbe V, les développables de l'une des familles se réduiront aux cônes dont le sommet F est pris sur V et qui sont circonscrits à S'.

Si F' décrit aussi une courbe V', les deux familles de développables se réduisent à des cônes.

Soient $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ les équations des complexes A et B, $x$ une droite de la congruence; l'équation

$$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) y = 0$$

représente un système à trois termes de complexes linéaires qui ont en commun une demi-quadrique dégénérée; en effet

$$\Omega\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \Omega\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Les complexes spéciaux forment donc deux systèmes à deux termes; les directrices des complexes spéciaux de chacun de ces deux systèmes forment un faisceau plan. Ces faisceaux plans sont (F, Φ) et (F', Φ').

Le fait que, pour toutes les droites de la congruence, les couples focaux coïncident est caractérisé par l'équation

$$\left[\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}\right)\right]^2 - \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Omega\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un invariant et un combinant de la congruence, qui se compose alors des tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille de la surface focale unique S. Si la surface focale se réduit à une courbe, la congruence est le lieu des droites qui touchent une développable donnée en des points d'une courbe tracée sur cette développable. Exceptionnellement, c'est le lieu des faisceaux plans dont le point et le plan constituent un couple d'une correspondance déterminée entre les points et les plans d'une droite fixe.

Pour toute congruence, on peut déterminer un complexe linéaire tel que, au *deuxième* ordre près, les droites voisines d'une droite $x$ de la congruence appartiennent au complexe.

Pour certaines congruences, on pourra déterminer le complexe linéaire, de telle sorte que les droites de la congruence voisines de la droite $x$ appartiennent au complexe au *troisième* ordre près. On dira alors que la congruence possède en chacune de ses droites un *complexe linéaire osculateur*. Il faut et il suffit pour cela que les coordonnées d'une droite de la congruence, considérées comme des fonctions de deux paramètres variables, $u$ et $v$, satisfassent à une même équation de la forme de Laplace

$$A\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + D\frac{\partial \theta}{\partial u} + E\frac{\partial \theta}{\partial v} + G\theta = 0.$$

Les congruences à couples focaux confondus sont *toujours* dans ce cas. Ce n'est pas le seul.

Soit G une congruence contenue dans un complexe linéaire : les deux surfaces focales sont polaires réciproques par rapport à ce complexe. Lorsque le faisceau plan (F, Φ) décrira un *bandeau* circonscrit à S, le faisceau plan

$(F', \Phi')$ décrira le bandeau réciproque circonscrit à S'. Les deux bandeaux seront asymptotiques simultanément.

## *Cosserat* (*E.*). — Sur la cyclide de Dupin. (F, 1-7).

Les coordonnées d'un point de la surface, rapportée à ses lignes de courbure, sont

$$x = \frac{b^2 - k a^2 u + k(a^2 - b^2) v}{a\sqrt{a^2 - b^2}\,(u - v)},$$

$$y = \frac{b\sqrt{u^2 - \dfrac{(1 - k u)^2}{a^2 - b^2}}}{u - v},$$

$$z = -\frac{b\sqrt{-v^2 + \dfrac{(1 - k v)^2}{a^2}}}{u - v};$$

le carré de l'élément linéaire $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$,

$$E = \frac{1}{[U(u - v)]^2}, \qquad G = \frac{1}{[V(u - v)]^2},$$

$$U = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)u^2 - (1 - k u)^2}}{b},$$

$$V = \frac{\sqrt{a^2 v^2 - (1 - k v)^2}}{b}.$$

Les fonctions qui entrent dans les formules de M. Codazzi (¹) sont

$$D = -\frac{v}{UV(u - v)^2}, \qquad D' = 0, \qquad D'' = \frac{u}{UV(u - v)^2},$$

$$\xi = \sqrt{E}, \quad \eta = 0, \quad p = 0, \quad q = -\frac{v}{U(u - v)}, \quad r = -\frac{V}{U(u - v)},$$

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{G}, \quad p_1 = \frac{u}{V(u - v)}, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = -\frac{U}{V(u - v)}.$$

L'équation des asymptotiques sera

$$\frac{du^2}{u U^2} = \frac{dv^2}{v V^2}.$$

Les rayons de courbure principaux auront pour valeurs

$$R = \frac{1}{v}, \qquad R' = \frac{1}{u}.$$

M. Cosserat applique les formules précédentes à la démonstration d'un théorème d'O. Bonnet : si une surface est telle que sur chaque ligne de courbure le rayon principal correspondant à cette ligne soit constant, la surface est une cyclide de Dupin.

(¹) Voir *Leçons de M. Darboux*, t. II, p. 376 et suivantes.

La surface moyenne (M) d'une cyclide de Dupin (D), c'est-à-dire la surface formée par le lieu du milieu M du segment limité par les centres de courbure principaux de (D), est une surface du quatrième ordre ayant une conique double, et quatre points doubles à l'infini. Il existe sur (M) un système conjugué formé de coniques dont les plans sont respectivement parallèles à deux plans fixes rectangulaires. La surface (M) correspond par orthogonalité des éléments à la surface adjointe d'une surface minima à lignes de courbure planes d'O. Bonnet.

Appelons *développée moyenne de* (D) la surface enveloppe du plan mené perpendiculairement à chaque normale de (D) au point qui est à égale distance des centres de courbure principaux relatifs à la normale considérée. Le théorème suivant est dû à M. Ribaucour :

« La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. »

D'où il résulte que la développée moyenne de la cyclide de Dupin est une surface dont toutes les lignes de courbure sont planes.

*Stouff* (X.). — Sur la composition des formes quadratiques quaternaires, et ses applications aux groupes fuchsiens. (G 1, 19).

I. Soit la forme quadratique quaternaire

$$\Phi(x, y, z, u) = A(x^2 - u^2) + A'y^2 + A''z^2 + (By + Cz)(x - u) + Dxu + Eyz,$$

avec les relations

$$\frac{A}{A'} = \frac{A''}{A} = -\frac{C}{B}, \qquad A(D - E) = BC.$$

M. Stouff considère les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = X[-(A + D)x - Cz - Au] + Y[Bx + A'y + (E - A)z - Bu] \\ \qquad + Z(Ay + A''z) + U(-Ax - Cz - Au), \\ y_1 = X[-(A + D)y + A''z] + Y[-Ax - Cz - (A + D)u] \\ \qquad + Z(-A''x + Cy + A''u) + U(-Ay - A''z), \\ z_1 = X(-A'y - Az) - Y(A'x - Bz - A'u) \\ \qquad + Z[-(A + D)x - By - Au] + U[A'y - (A + D)z], \\ u_1 = X(Ax + By - Au) + Y(A'y + Az) \\ \qquad + Z[Cx + (E - A)y + A''z - Cu] + U[-Ax - By - (A + D)u]; \end{cases}$$

on dira que le système $x_1$, $y_1$, $z_1$, $u_1$ résulte de la *composition* du système X, Y, Z, U avec le système $x, y, z, u$, et on écrira

$$(x_1, y_1, z_1, u_1) = (X, Y, Z, U)(x, y, z, u).$$

Si l'on écrit les formules précédentes sous la forme

$$x_i = \lambda_{i1}X + \lambda_{i2}Y - \lambda_{i3}Z - \lambda_{i4}U \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

---

(1) Voir *Leçons de M. Darboux*, t. II, p. 376 et suivantes.

et qu'on désigne par $\Lambda_{ij}$ ce que devient $\lambda_{ij}$ lorsqu'on y remplace $x, y, z, u$ respectivement par X, Y, Z et U, on a

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Lambda_{[illegible]}x - \Lambda_{[illegible]}y + \Lambda_{[illegible]}z - \Lambda_{[illegible]}u,\\
y_1 &= \Lambda_{[illegible]}x + \Lambda_{11}y - \Lambda_{[illegible]}z + \Lambda_{[illegible]}u,\\
z_1 &= \Lambda_{[illegible]}x - \Lambda_{[illegible]}y + \Lambda_{[illegible]}z - \Lambda_{[illegible]}u,\\
u_1 &= \Lambda_{[illegible]}x - \Lambda_{12}y + \Lambda_{[illegible]}z - \Lambda_{[illegible]}u,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
X &= \frac{-\lambda_{22}x_1 - \lambda_{12}y_1 + \lambda_{[illegible]}z_1 + \lambda_{[illegible]}u_1}{(-D-2\Lambda)\Phi(x, y, z, u)},\\
Y &= \frac{\lambda_{[illegible]}x_1 - \lambda_{11}y_1 - \lambda_{[illegible]}z_1 - \lambda_{[illegible]}u_1}{(-D-2\Lambda)\Phi(x, y, z, u)},\\
Z &= \frac{\lambda_{[illegible]}x_1 - \lambda_{[illegible]}y_1 - \lambda_{[illegible]}z_1 - \lambda_{[illegible]}u_1}{(-D-2\Lambda)\Phi(x, y, z, u)},\\
U &= \frac{\lambda_{[illegible]}x_1 - \lambda_{[illegible]}y_1 - \lambda_{[illegible]}z_1 - \lambda_{[illegible]}u_1}{(-D-2\Lambda)\Phi(x, y, z, u)}.
\end{aligned}$$

On a

$$(-u, y, z, -x)(x, y, z, u) = [\Phi(x, y, z, u), 0, 0, \Phi(x, y, z, u)].$$

M. Stouff appelle les deux systèmes $(-u, y, z, -x)$, $(x, y, z, u)$ *inverses l'un de l'autre.*

Remarquons la formule

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, u_1) = (D + 2\Lambda)\Phi(X, Y, Z, U)\Phi(x, y, z, u),$$

qui montre que les formules (1) permettent de *composer avec elle-même* la forme quaternaire $\Phi$.

Le système

$$(X', Y', Z', U') = (-u, y, z, -x)(X, Y, Z, U)(x, y, z, u)$$

sera dit transformé du système X, Y, Z, U par le système $x, y, z, u$; X', Y', Z', U' sont des fonctions linéaires de X, Y, Z, U et l'on a

$$X' + U' = -(D + 2\Lambda)(X + U)\Phi(x, y, z, u).$$

II. On appelle *système unité* un système $x, y, z, u$ tel que les valeurs de $x_1, y_1, z_1, u_1$ tirées des équations (1) soient proportionnelles à X, Y, Z, U; un système est nommé *périodique* quand une de ses puissances sera le système unité.

Le premier membre de l'équation déterminante est un carré parfait, le carré de

$$\theta^2 - (x + u)(D + 2\Lambda)\theta - \Phi(x, y, z, u)(D + 2\Lambda).$$

Les rapports de ces racines devant être des racines de l'unité, le système ne peut présenter que les périodes 2, 3, 4, 6 en supposant les coefficients de $\Phi$ rationnels.

III. Comme application, l'auteur considère le groupe $G_{13}$ défini dans un travail antérieur [*Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binomes* (*Annales de Toulouse;* 1890)]. Une substitution quelconque





de ce groupe est de la forme

$$S_j \left( z, \frac{z\sum_{h=1}^{h=6} \alpha_h (j^h - j^{-h}) + \sum_{h=1}^{h=6} \beta_h (j^h + j^{-h})}{z\sum_{h=1}^{h=6} \gamma_h (j^h + j^{-h}) + \sum_{h=1}^{h=6} \delta_h (j^h + j^{-h})} \right), \qquad \beta_h = 3\beta'_h.$$

De plus $S_j$ est telle, que la substitution obtenue en changeant, dans $S_j$, $j$ en $j^2$, et la transformée de $S_j$ par $\sum = \left(z, \frac{6z+3}{-7z-3}\right)$ soient identiques.

D'abord le groupe $G_{13}$ ne contient pas de substitutions impaires. Pour les substitutions paires, on a à résoudre en nombres entiers une équation dont le premier membre est de la forme

$$\Phi(x, y, z, u) \quad \text{avec} \quad D + 2A = 1.$$

Si S et $\overline{S}$ sont deux substitutions quelconques de $G_{13}$, les nombres $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$, $\Delta_1$ relatifs au produit $S\overline{S}$ sont donnés en fonction des nombres $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\beta}_1$, $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\delta}_1$ relatifs à S et à $\overline{S}$ par des formules de la forme (1).

L'auteur montre ensuite comment on peut former les substitutions les plus simples du groupe $G_{13}$.

Ce groupe $G_{13}$ est contenu dans six autres groupes dont on peut former les substitutions par un procédé analogue à celui qui a servi à former les substitutions de $G_{13}$.

On a encore un exemple où entre la forme $\Phi(x, y, z, u)$; il s'obtient en adoptant pour $j$ une racine quinzième primitive de l'unité, en considérant le groupe $G_{15}$ des substitutions S

$$S, \quad \left(z, \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}\right),$$

où les coefficients sont des nombres complexes de la forme

$$a_j = \Sigma \alpha_h j^h, \qquad (h = 1, 2, 4, 8)$$

et où le changement de $j$ en $j^2$ dans S réalise la transformation de S par la substitution de période 4,

$$\left(z, \frac{-2}{z+2}\right).$$

IV. L'auteur cherche si, à chaque système $x$, $y$, $z$, $u$, on peut faire correspondre une substitution d'un groupe fuchsien, $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ par les formules

$$\begin{aligned}
\alpha &= \eta_{11} x + \eta_{12} y + \eta_{13} z + \eta_{14} u,\\
\beta &= \eta_{21} x + \eta_{22} y + \eta_{23} z + \eta_{24} u,\\
\gamma &= \eta_{31} x + \eta_{32} y + \eta_{33} z + \eta_{34} u,\\
\delta &= \eta_{41} x + \eta_{42} y + \eta_{43} z + \eta_{44} u,
\end{aligned}$$

où les $\eta$ sont des nombres fixes, de telle sorte qu'au système $x_1$, $y_1$, $z_1$, $u_1$,

composé de $x, y, z, u$ et de X, Y, Z, U corresponde la substitution

$$\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} = \frac{A\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + B}{\Gamma\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \Delta}.$$

V. Plus généralement, soit un système de quatre nombres $x_1, x_2, x_3, x_4$, que nous représenterons par $(x)$. On dira que le système (X) résulte de la composition du système $(x)$ avec le système (X′), si l'on a

$$X_i = \sum_{j=1}^{j=4} x_j \sum_{h=1}^{h=4} a_{ijh} X'_h \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et l'on écrira

$$(X) = (x)(X').$$

Si l'on cherche les conditions que doivent remplir les coefficients $a_{ijk}$ pour que l'on ait

$$(x)[(x')(X'')] = [(x)(x')](X''),$$

on trouve

$$\sum_{h=1}^{h=4} a_{ijh}\,a_{hkl} = \sum_{m=1}^{m=4} a_{mjk}\,a_{iml},$$

ce qui donne 256 équations, non toutes distinctes.

L'auteur cherche la condition pour qu'il existe un système unité $(\xi)$, c'est-à-dire pour que les nombres du système $(x)(\xi)$ soient proportionnels à ceux du système $(x)$, quel que soit $(x)$, puis les conditions pour qu'à chaque système correspondent les substitutions d'un groupe de substitutions linéaires, de telle sorte qu'au système formé en composant $(x)$ avec (X′) corresponde la substitution obtenue en multipliant la substitution correspondant au premier système par la substitution correspondant au second.

Dans une Note, M. Stouff indique comment on peut trouver des substitutions complexes $\sum_j$ formées avec une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, telles que

$$\sum_j \sum_j{}^{\rho} \cdots \sum_j{}^{\rho^{\frac{p-1}{2}}} = 1 \ ([1]).$$

*Paraf* (*A.*). — Sur le problème de Dirichlet, et son extension

---

([1]) A consulter : Bianchi, *Sopra una classe di gruppi fuchsiani reducibili a gruppi modulari;* et : *Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei,* 1890, 1891).

Picard, *Annales de l'École Normale,* 3e série, t. I.

Fricke, *Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Grüppen reeller linearer Substitutionen* (*Mathematische Annalen*).

Kronecker, *Ueber Composition von Systemen* (dernières années des *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*).

au cas de l'équation linéaire générale du second ordre. (II. 1, 75).

*Chapitre I.* — L'auteur rappelle en quoi consiste le problème de Dirichlet pour une aire plane S, à connexion simple ou multiple.

Remarquant que, si deux aires S et S' sont représentées l'une sur l'autre d'une manière conforme par la transformation $x+iy=f(x'+iy')$, toute fonction $V(x, y)$ harmonique dans S se transforme en une fonction $V'(x', y')$ harmonique dans S', on ramène le cas où le problème est posé pour la partie du plan extérieure à S à celui où l'on considère l'aire S elle-même. Il suffit de faire une transformation par rayons vecteurs réciproques en choisissant le pôle à l'intérieur de S. Il est à remarquer que dans le problème pour l'aire extérieure, la fonction $V(x, y)$ qui le résout garde une valeur *finie* et bien déterminée au point à l'infini.

L'auteur rappelle ensuite les diverses propriétés du potentiel logarithmique. Il établit ensuite le théorème suivant :

« Quand une masse égale à l'unité est placée en un point P de l'intérieur d'un cercle, si l'on répartit cette masse sur toute la circonférence de manière que la densité en un point quelconque M soit inversement proportionnelle au carré de MP, la couche circulaire ainsi obtenue aura même potentiel que la masse primitive en tout point extérieur, et un potentiel plus petit en tout point intérieur. »

Le théorème subsiste si la masse au point P est égale à $m$, et s'il y a plusieurs masses positives à l'intérieur du cercle. La couche circulaire ainsi obtenue s'appellera la *couche équivalente* aux masses intérieures.

Il est impossible de trouver sur un même cercle deux couches différentes, de densités différentes, équivalentes à un même système de masses intérieures.

L'auteur s'arrête ensuite sur deux théorèmes dus à M. Harnack, savoir :

« 1° Soit une série $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ dont tous les termes sont des fonctions harmoniques positives en tous les points d'une région connexe R : si cette série est convergente en un point de la région, elle sera uniformément convergente dans toute la région R et y représentera une fonction harmonique. »

« 2° Si des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont harmoniques à l'intérieur d'une aire S, et que $u_n(A)$ tende vers $U_n(s)$ quand le point intérieur A tend vers un point $s$ du contour par un chemin quelconque; si de plus la série

$$U=U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$$

est uniformément convergente sur tout le contour, alors la série

$$u=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

sera uniformément convergente dans toute l'aire S et y représentera une fonction harmonique. De plus $u(A)$ tendra vers $U(s)$ quand A tendra vers $s$ par un chemin quelconque.

Comme application, l'auteur résout le problème de Dirichlet pour le cas de l'aire comprise entre deux cercles concentriques. Soient R et R' (R' < R) les

rayons des deux cercles, la fonction cherchée est

$$f(r,\theta)=a_0+b_0\,\mathrm{L}r+\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{r}{\mathrm{R}'}\right)^m \mathrm{X}_m+\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^m \mathrm{Y}_m,$$

où

$$\mathrm{X}_m=a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta,$$

$$\mathrm{Y}_m=a_{-m}\cos m\theta-b_{-m}\sin m\theta,$$

$$\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^m a_m+a_{-m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}\cos m\psi\,d\psi,$$

$$a_m+\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^m a_{-m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}'\cos m\psi\,d\psi,$$

$$\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^m b_m-b_{-m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}\sin m\psi\,d\psi,$$

$$b_m-\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^m b_{-m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}'\sin m\psi\,d\psi.$$

Revenant ensuite au cas général, l'auteur démontre que l'on peut toujours trouver des cercles $\mathrm{C}_i$, tout entiers à l'intérieur de S, formant une suite simplement infinie, à indices entiers positifs,

$$\mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2,\ \ldots,\ \mathrm{C}_n,\ \ldots,$$

et tels que tout point intérieur à S soit intérieur à l'un au moins des cercles $\mathrm{C}_i$.

Traçons une circonférence L ayant son centre dans S, et un rayon supérieur au double de la plus grande dimension de S. Soit T la partie du plan intérieure à L.

Supposons que l'on connaisse une fonction $\mathrm{V}_0(x, y)$, holomorphe à l'intérieur de T, et qui, sur $s$, se réduise à la fonction continue U donnée sur $s$. Supposons $\Delta\mathrm{V}_0$ constamment négatif dans T. Posons

$$\rho=-\frac{\Delta\mathrm{V}_0}{2\pi}.$$

Imaginons une masse répandue d'une manière continue sur T, et dont la densité en chaque point sera $\rho$. Cette masse aura un potentiel $\mathrm{W}_0$; $\theta=\mathrm{W}_0-\mathrm{V}_0$ est harmonique dans T.

Appelons *balayage* du cercle $\mathrm{C}_i$ l'opération qui consiste à remplacer les masses à l'intérieur de $\mathrm{C}_i$ par une couche circulaire équivalente. Balayons successivement tous les cercles dans un ordre tel que chacun d'eux soit balayé un nombre infini de fois. Soit $\mathrm{W}_k$ ce que devient le potentiel après la $k^{\text{ième}}$ opération. En un point quelconque A, on a

$$\mathrm{W}_k\leqq\mathrm{W}_{k-1}.$$

Extérieurement à S, $\mathrm{W}_k=\mathrm{W}_0$.

Lorsque $k$ augmente indéfiniment, $\mathrm{W}_k$ tend vers une limite W, déterminée en chaque point de T et tendant vers $\mathrm{U}(s)+\theta(s)$ quand A tend vers le point $s$ du contour. De plus, cette fonction W est harmonique dans S. La fonction $\mathrm{W}-\theta$ est harmonique dans toute l'étendue de S et tend vers U sur $s$.

Si $\Delta\mathrm{V}_0$ n'avait pas dans T un signe constant, on partagerait T en deux

parties telles que $\Delta V_0$ ait un signe constant dans chacune d'elles. Soient $T_1$ et $T_2$; soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux fonctions telles que

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho \text{ dans } T_1, \\ 0 \text{ dans } T_2, \end{cases} \qquad \rho_2 = \begin{cases} 0 \text{ dans } T_1, \\ -\rho \text{ dans } T_2, \end{cases}$$

alors $\rho = \rho_1 - \rho_2$. Les systèmes de masses ayant pour densités $\rho_1$ et $\rho_2$ engendrent les potentiels $W_0^1$ et $W_0^2$. Soient $\theta = W_0^1 - W_0^2 - V_0$. Soient $W^1$, $W^2$ les limites vers lesquelles tendent $W_0^1$, $W_0^2$, la fonction $W^1 - W^2 - \theta$ résout le problème.

Voici comment on ramène le cas général au cas particulier traité : soit $\psi(x, y)$ une fonction continue définie dans l'aire T et se réduisant à U sur $s$, qu'on pourra supposer positive; $m$, son minimum dans T; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ une suite de nombres positifs, croissants, tendant vers l'unité. Soit $\lambda_{i+1} - \lambda_i = \delta_i$, et supposons $\delta_i > \delta_{i+1}$. Considérons la suite $\lambda_1\psi, \lambda_2\psi, \ldots, \lambda_n\psi, \ldots$. Soit $F_i(x, y)$ le polynome entier qui représente $\lambda_i\psi$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}\delta_i m$. Les $F_i$ forment une suite croissante qui tend uniformément vers $\psi$. Si $U_i$ est la valeur de $F_i$ sur $s$, les $U_i$ forment une suite croissante, tendant uniformément vers U. D'autre part on sait, au moyen de chaque fonction $F_i$, construire une fonction $V_i$ harmonique dans S et se réduisant à $U_i$ sur $s$.

Les fonctions $V_i$ ont une limite V qui est la fonction cherchée.

L'auteur examine ensuite le cas où sur le contour $s$ il y a un nombre limité de points où la direction de la tangente varie brusquement d'un angle fini.

*Chapitre II.* — M. Paraf aborde l'étude de la fonction $\Delta u = f(x, y)$. Il existe une fonction $u$, et une seule, finie et continue dans une aire donnée S, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, vérifiant l'équation proposée, et prenant sur le contour $s$ de S des valeurs données à l'avance. La fonction $f(x, y)$ sera supposée continue dans S, et admettra dans cette région des dérivées partielles du premier ordre continues.

Soient $v$ une intégrale de l'équation s'annulant sur le contour, $\theta$ une fonction harmonique dans S et prenant sur le contour les valeurs données, $u = v + \theta$ sera la solution cherchée. Tout revient à trouver $v$.

On y parvient au moyen de la fonction de Green; cette fonction, harmonique dans S, excepté en un point P, $(a, b)$, où elle devient infinie comme $L\frac{1}{r}$ [$r$ désignant la distance du point mobile $(x, y)$ au point P], s'annule sur $s$.

Soit $\omega$ une fonction harmonique dans S et prenant sur $s$ les mêmes valeurs que $L\frac{1}{r}$.

Alors $G(x, y; a, b) = L\frac{1}{r} - \omega$ sera la fonction cherchée. Il n'y en a qu'une. Elle jouit de la propriété exprimée par l'équation

$$G(a, b; a_1, b_1) = G(a_1, b_1; a, b).$$

Cela posé, en supposant l'existence de $v$ démontrée, on établit que l'on a

$$v(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\iint_S f(x, y)\, G(x, y; a, b)\, dx\, dy,$$

puisque cette fonction est continue dans S, qu'elle y admet des dérivées du

premier ordre, continues $\left[\text{ainsi, on a } \frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S f(x,y)\frac{\partial G}{\partial a}\,dx\,dy\right]$; puis des dérivées partielles du second ordre : pour démontrer ce second point, on met les dérivées partielles du premier ordre sous la forme

$$2\pi\frac{\partial v}{\partial a} = -\int_s f(x,y)\,\mathrm{L}\frac{1}{r}\cos\alpha\,ds$$
$$-\int\int_S \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{L}\frac{1}{r}\,dx\,dy + \int\int_S f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial a}\,dx\,dy,$$
$$2\pi\frac{\partial v}{\partial b} = -\int_s f(x,y)\,\mathrm{L}\frac{1}{r}\sin\alpha\,ds$$
$$-\int\int_S \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{L}\frac{1}{r}\,dx\,dy + \int\int_S f(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial b}\,dx\,dy$$

($\alpha$ désigne l'angle de la normale intérieure à S avec l'axe $Ox$).

On démontre que $\Delta v = f(a, b)$, et enfin que $v$ tend vers zéro quand $x$, $y$ tend vers un point du contour. M. Paraf termine le Chapitre en établissant que les dérivées des deux premiers ordres de $v$ restent continues sur tout arc analytique régulier du contour S.

*Chapitre III.* — Considérons maintenant l'équation générale

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\mathrm{D}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{F}u = 0,$$

dans laquelle A, B, ..., F désignent des fonctions de $x$ et de $y$ qui, dans une région R du plan, sont finies, continues, bien déterminées, et admettent des dérivées partielles également continues des deux premiers ordres.

Par un changement de variables, $\mathrm{X} = \varphi(x, y)$, $\mathrm{Y} = \psi(x, y)$, suivant que $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}$ est positif ou négatif; on peut ramener l'équation à l'un des deux types

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{X}\,\partial \mathrm{Y}} + a\frac{\partial u}{\partial \mathrm{X}} + b\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} + cu = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{Y}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \mathrm{X}} + b\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} + cu = 0.$$

M. Paraf ne s'occupe que du second type.

Supposons d'abord que $c$ soit négatif et ne puisse s'annuler dans S ni sur $s$ : alors, aucune intégrale continue ne peut avoir de maximum positif, ni de limite supérieure positive à l'intérieur de S, ni de minimum négatif ou de limite inférieure négative. Si les valeurs sur le contour sont toutes nulles, l'intégrale sera nulle à l'intérieur de S.

Revenant au cas général, M. Paraf montre que dans le voisinage de tout point $(x_0 y_0)$ de R on peut tracer un domaine D assez petit pour que, un contour quelconque, $s$, étant tracé dans D, l'intégrale de l'équation soit complètement déterminée par ses valeurs sur $s$.

La méthode indiquée par l'auteur donne pour D une bande étroite de direction arbitraire; mais, pour chaque cas particulier, on pourra souvent élargir le domaine D. Ainsi pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + e^b)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4}u\sin(x - y) = 0,$$

pour un contour quelconque il ne peut y avoir deux intégrales prenant les mêmes valeurs sur le contour.

Pour l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$, l'intégrale est encore déterminée par ses valeurs sur tout contour dont aucune dimension n'excède $\frac{4}{k}$.

En général pour toute aire S en tous les points de laquelle $c$ n'est jamais positif (mais peut s'annuler) l'intégrale est encore déterminée par ses valeurs sur le contour.

M. Paraf aborde ensuite, en se plaçant dans le cas où l'intégrale est unique, la démonstration de l'existence de cette intégrale. Supposons le contour circulaire, et écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Partant de la fonction $u_1 = 0$, intégrons l'équation

$$\Delta u = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 = f(u_1) = 0.$$

Soit $u_2$ l'intégrale de cette équation prenant sur le contour des valeurs données.

Intégrons ensuite l'équation $\Delta v_3 = f(u_2)$, en assujettissant $v_3$ à s'annuler sur le contour.

On formera ainsi une suite de fonctions $u_2, v_3, v_4, \ldots$. La série $u_2 + v_3 + v_4 + \ldots$ est uniformément convergente et représente une fonction admettant des dérivées continues des deux premiers ordres. C'est la solution cherchée.

Pour démontrer la convergence de la série, on s'appuie sur les deux lemmes suivants :

« 1° Si une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles est continue dans un cercle, et y admet des dérivées continues des deux premiers ordres, cette fonction est développable dans ce cercle en série absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x, y) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

Les $a_m$ et les $b_m$ sont des fonctions continues de $r$ satisfaisant aux relations

$$|a_m| < \frac{h}{m^2}, \qquad |b_m| < \frac{h}{m^2},$$

$h$ étant une constante ne dépendant que de la fonction et non du rayon du cercle.

» 2° Les sommes des trois séries

$$\sum_{q=1}^{q=m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2}, \quad \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2}, \quad \sum_{q=m+1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2}$$

sont inférieures à $\frac{1}{3}\frac{\theta}{m^2}$, $\theta$ étant une quantité purement numérique.

Cela posé, considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

où nous supposons que $f(x, y)$ est développable en série trigonométrique avec des coefficients $a_m$ et $b_m$ dont les modules sont inférieurs à $\frac{h}{m^2}$. On recherche directement une intégrale de cette équation sous forme trigonométrique, et des résultats trouvés on déduit la convergence de la série $u_1 + v_2 + v_4 + \ldots$.

Revenons à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Si $c \leq 0$, il ne peut y avoir qu'une intégrale prenant sur le contour des valeurs données. D'ailleurs, par un changement de fonction, le cas $c \leq 0$ se ramène au cas $c < 0$. Or, si l'on a $c < 0$, les valeurs positives de l'intégrale sont toutes inférieures à la plus grande valeur positive sur le contour, et les valeurs négatives ont un module inférieur au plus grand module des valeurs négatives sur le contour. De là résulte que le procédé alterné de M. Schwarz est applicable à notre équation. Ainsi on peut montrer que, si l'on sait résoudre le problème pour deux aires empiétant l'une sur l'autre et dont les contours ne sont pas tangents, on saura aussi le résoudre pour l'aire formée par la superposition des deux aires données, la portion commune aux deux aires ne recouvrant le plan qu'une fois.

L'auteur termine par la démonstration de la propriété suivante qui se rapporte à l'équation linéaire, au cas où ses coefficients sont des fonctions analytiques de $x$ et de $y$ : toute intégrale de l'équation est alors elle-même une fonction analytique dans la région où les caractéristiques sont imaginaires.

## *Lafay (A.).* — Note sur la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$.

L'auteur commence par établir la formule ($\alpha$)

$$\sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x)\,dx - \frac{1}{1.2} f(x) + \frac{1}{2} B_1 f'(x) + \ldots + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} f^{(2p-3)}(x)\right]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^{(2p)}(n+1-u)\,\varphi_{2p-1}(u)\,du,$$

où $\varphi_\alpha(u)$ désigne la $\alpha^{\text{ième}}$ polynome bernoullien.

L'application de cette formule exige la convergence absolue des séries qu'on obtient lorsque $q$ devient infini dans l'expression

$$R_\alpha = \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^{(\alpha)}(n+1-u)\,\varphi_{\alpha-1}(u)\,du \qquad [\alpha = 1, 2, \ldots, (2p)].$$

M. Lafay dit qu'il suffit, pour que $R_\alpha$ soit absolument convergente, que l'intégrale

$$\int_r^{\infty} |f^{(\alpha)}(x)|\,dx$$

soit finie et déterminée.

Considérons maintenant la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$, avec $s = a + bi$; on a

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} - R_1;$$

pour $a > 0$, la série $R_1$ est absolument convergente.

La série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est : 1° absolument convergente si $a > 1$; 2° finie, mais indéterminée comme l'expression

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{b}(\sin b\,\mathrm{L}x + i\cos b\,\mathrm{L}x),$$

si $a = 1$ avec $b \neq 0$; 3° divergente si $a = 1$ avec $b = 0$, ou $a < 1$ avec $b$ quelconque. Cette dernière conséquence subsiste pour $a \leqq 0$.

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$, considérée comme fonction de $s$, n'est ainsi analytiquement définie que pour des valeurs de $s$ dont l'affixe est dans la région du plan $a > 1$; mais l'équation

$$\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} = \left(\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}\right) - R_1$$

fournit directement, par la considération de

$$\lim_{q=\infty} \left(\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \frac{q^{1-s}}{1-s}\right),$$

une fonction de $s$ qui, confondue avec $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans la région $(a > 1)$, conserve des propriétés analytiques très définies dans la région plus étendue $a > 0$.

Enfin, l'application de la formule $(\alpha)$ conduit à la fonction de Riemann

$$\begin{aligned}\zeta(s) = {} & \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_1 s - \frac{B_2}{1.2.3.4}s(s+1)(s+2) + \ldots \\ & + (-1)^{p-2}\frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)}s(s+1)\ldots(s+2p-4) \\ & - s(s+1)\ldots(s+2p-1)\sum^{\infty}\int_0^1 \frac{\varphi_{2p-1}(u)\,du}{(n+1-u)^{s+p}}.\end{aligned}$$

De cette formule on déduit :

1° Que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$, ou $(s-1)\zeta(s)$ sont des fonctions holomorphes

2° Que $\zeta(-2n) = 0$;

3° Que $\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

4° Enfin, si l'on pose $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + M_0 + M_1(s-1) + \ldots + M_i(s-1)^i + \ldots$

$$M_i = \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i} \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{L^i(n+1-u) - i L^{i-1}(n+1-u)}{(n+1-u)^2} u\,du \text{ (}^1\text{)}.$$

*Andoyer (H.).* — Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune.

Voici l'énoncé du problème que M. Audoyer se propose de résoudre :

« Étudier le mouvement de la Lune sous l'action de la Terre et du Soleil seuls, en supposant : 1° que l'on néglige les dimensions de ces trois corps; 2° que la masse de la Lune est absolument négligeable, et que celle de la Terre est négligeable en comparaison de celle du Soleil; 3° que le Soleil décrit, d'un mouvement uniforme, une circonférence autour de la Terre; 4° que le mouvement de la Lune s'effectue dans le plan de cette circonférence; 5° que l'on néglige le rapport des dimensions des orbites de la Lune et du Soleil ». Choisissons comme plan du mouvement le plan des $xy$.

Soient $v$ la longitude de la Lune; $N' = n't + v'_0$ la longitude du Soleil, $n'$ et $v'_0$ étant des constantes, $t$ représentant le temps, posons $H = v - N'$. On obtient entre $v$ et ses dérivées $v'$, $v''$, $v'''$, $v^{IV}$ l'équation qui suit :

$$\begin{aligned} 0 = {} & v'^2 v^{IV} + v'^4 v'' - \frac{11}{2} v' v'' v''' - \frac{3}{2} n'^2 v'^2 v'' + \frac{21}{4} v''^3 + \frac{171}{32} n'^4 v'' \\ & + n'^2 \sin 2H \left( -\frac{33}{2} v'^4 + 18 n' v'^3 - \frac{33}{4} n'^2 v'^2 - \frac{21}{4} v' v''' + \frac{111}{8} v''^2 + \frac{243}{128} n'^4 \right) \\ & + n'^2 \cos 2H \left( -15 v'^2 v'' - \frac{27}{2} n' v' v'' \right) - n'^4 \sin 4H \left( -9 v'^2 + \frac{45}{8} n' v' \right) \\ & + n'^4 \cos 4H \left( -\frac{171}{32} v'' \right) - n'^6 \sin 6H \left( -\frac{81}{128} \right). \end{aligned}$$

L'auteur intègre ensuite cette équation par la méthode des coefficients indéterminés qu'il a exposée dans son Mémoire : *Sur les formules générales de la Mécanique céleste* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV).

Les résultats trouvés cessent de concorder avec ceux de Delaunay à partir du huitième ordre inclusivement. L'auteur les a obtenus par deux méthodes; la deuxième est empruntée au Mémoire de M. G.-W. Hill, intitulé : *Researches in the lunar theory*, publié au tome I de l'*American Journal of Mathematics.*

---

(¹) JENSEN, *Comptes rendus*, t. CIV.

*Hermite* (*Ch.*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (L, 1, 13).

Soient

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}}, \qquad L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-l'^2\sin^2\varphi}}, \qquad l^2+l'^2=1.$$

On propose de déterminer le module $l$ et la constante M de telle sorte que $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ admettent pour périodes $2K$ et $2iK'$

$$\left(K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\right).$$

On pose

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$
$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

$a, b, c, d$ étant des entiers quelconques tels que $(ad-bc)$ soit positif.

La recherche des formules de transformation repose en entier sur les propriétés de la fonction

$$\Phi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) e^{\frac{i\pi b x^2}{4KLM}},$$

$$\left[\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma(-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{LM} - \frac{\pi m^2 L'}{L}} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right],$$

propriétés indiquées par les deux relations

$$\Phi(x+2K) = (-1)^{a+b}\Phi(x),$$
$$\Phi(x+2iK') = (-1)^{c+d}\Phi(x) e^{-\frac{n\pi(x+iK')}{K}}.$$

De là résulte que, si l'on pose

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{H(x)}{\Phi(x)}, \qquad \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{H_1(x)}{\Phi(x)}, \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

les quatre quotients

$$P(x) = \frac{H(x)}{\Theta^n(x)}, \qquad Q(x) = \frac{H_1(x)}{\Theta^n(x)}, \qquad R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)}, \qquad S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$$

vérifient les égalités suivantes :

$$P(x+2K) = (-1)^{ab+a+b} P(x),$$
$$P(x+2iK') = (-1)^{cd+c+d+n} P(x),$$
$$Q(x+2K) = (-1)^{ab+a} Q(x),$$
$$Q(x+2iK') = (-1)^{cd+c+n} Q(x),$$
$$R(x+2K) = (-1)^{an} R(x),$$
$$R(x+2iK') = (-1)^{d+n} R(x),$$
$$S(x+2K) = (-1)^{ab+b} S(x),$$
$$S(x+2iK') = (-1)^{cd+d+n} S(x).$$

Ces quantités s'expriment sous la forme entière au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Introduisons les fonctions de M. Weierstrass.

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Al}(x) &= \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}\\
\mathrm{Al}(x)_1 &= \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}'(0)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}\\
\mathrm{Al}(x)_2 &= \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\mathrm{H}_1(0)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}\\
\mathrm{Al}(x)_3 &= \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\mathrm{K}} k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx.$$

Soit

$$\mathrm{J}_1 = \int_0^{\mathrm{L}} l^2 \operatorname{sn}^2(x, l)\, dx, \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{LM}^2} - \frac{n\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \frac{i\pi b}{2\mathrm{KLM}}.$$

Alors

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

Si l'on pose $ad - bc = n$, on a

$$\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{M}} = d\mathrm{J} - ib\mathrm{J}' + (d\mathrm{K} - ib\mathrm{K}')\frac{\mathrm{N}}{n},$$

puis

$$\frac{i\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = -c\mathrm{J} + ia\mathrm{J}' + (-c\mathrm{K} + ia\mathrm{K}')\frac{\mathrm{N}}{n};$$

les relations peuvent s'écrire plus simplement

$$\frac{a\mathrm{J}_1 + ib\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = n\mathrm{J} + \mathrm{KN},$$

$$\frac{c\mathrm{J}_1 + i\,d\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = in\mathrm{J}' + i\mathrm{K}'\mathrm{N};$$

on en conclut

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{M}}\left[a\mathrm{J}'\mathrm{J}_1 - d\mathrm{J}\mathrm{J}'_1 + i(b\mathrm{J}'\mathrm{J}'_1 - c\mathrm{J}\mathrm{J}_1)\right].$$

La quantité N est une fonction algébrique du module, comme le montre la formule

$$\mathrm{N} = nkk'^2 \mathrm{D}_k \log\frac{\mathrm{M}k'}{l'}.$$

Dans le cas de la transformation du second ordre, $N = 2k$. Pour $n = 3$, on a

$$\left(\frac{N}{2}\right)^4 - 6k^2\left(\frac{N}{2}\right)^2 - (4k^2 + 4k^4)\frac{N}{2} - 3k^4 = 0.$$

Alors

$$N = -2k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2mK + 2niK'}{3},$$

$m$ et $n$ étant deux entiers quelconques.

Dans une lettre adressée à M. Hermite, M. Brioschi donne pour N l'expression suivante

$$N = -2k^2 \Sigma \operatorname{sn}^2(2s\omega, k),$$

$$\left(s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right) \qquad (n, \text{ impair}),$$

$$\omega = \frac{mK + im'K'}{n}.$$

## *Kœnigs* (*G.*). — Résumé d'un Mémoire sur les lignes géodésiques. (P, 1, 29).

1. Supposons que deux surfaces S et S′ soient *représentables géodésiquement* l'une sur l'autre (on peut alors faire correspondre à un point M de S un point M′ de S′ de telle sorte que, lorsque M décrit une géodésique sur S, le point M′ décrit une géodésique sur S′), le $ds^2$ de S étant

$$(U - V)(du^2 + dv^2).$$

Celui de S′ a la forme

$$\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right).$$

De là suit que, tous les $ds^2$ compris dans la formule

$$ds^2 = \left(\frac{a'U + b'}{aU + b} - \frac{a'V + b'}{aV + b}\right)\left(\frac{du^2}{aU + b} - \frac{dv^2}{aV + b}\right),$$

où $a$, $b$, $a'$, $b'$ sont des constantes, conviennent à des surfaces géodésiquement représentables les unes sur les autres (M. Dini).

Un cas a échappé à M. Dini, celui où l'on établit entre S et S′ une représentation ponctuelle *demi-conforme*, c'est-à-dire telle qu'*une seule* des familles de lignes de longueur nulle tracées sur S ait pour image sur S′ une famille analogue; alors, au lieu de la forme de Liouville, c'est la forme de M. Lie

$$ds^2 = [y\, f(x) + g(x)]\, dx\, dy,$$

qui intervient.

2. La forme de Liouville et celle de M. Lie interviennent encore dans le problème des géodésiques qui possèdent une intégrale quadratique par rapport aux vitesses.

Soient $\lambda$ une fonction de $x$ et de $y$, X une fonction de $x$, Y une fonction de $y$, et envisageons l'équation

$$\text{(D)} \qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda.$$

Si X et Y ne sont pas nuls, les variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

font prendre au $ds^2 = \lambda\, dx\, dy$ la forme de Liouville ([1]).

Si $X = 0$, par exemple, les variables $x' = x$, $y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ font prendre au $ds^2$ la forme de Lie.

3. M. Darboux a fait la remarque que si $(X, Y)$, $(X^0, Y^0)$ sont deux couples de solutions de $(D)$, il en est de même du couple $(aX + bX^0, aY + bY^0)$, où $a$ et $b$ sont deux constantes arbitraires.

Les couples de solutions $(X, Y)$, $(X^0, Y^0)$, $(X^{00}, Y^{00})$, ... seront dits *indépendants* si l'on ne peut pas trouver de constantes $K$, $K^0$, $K^{00}$, ... donnant lieu simultanément aux identités

$$KX + K^0 X^0 + K^{00} X^{00} + \ldots = 0,$$
$$KY + K^0 Y^0 + K^{00} Y^{00} + \ldots = 0.$$

A des couples de solutions indépendants répondent des intégrales $\varphi$, $\varphi^0$, $\varphi^{00}$, ... linéairement distinctes ([2])

$$\left(\frac{pq}{\lambda} = 1, \qquad \varphi = ap^2 + 2bpq + cq^2\right), \qquad a = X, \qquad b = Y.$$

M. Kœnigs a résolu le problème suivant :

Trouver tous les $ds^2$ qui admettent pour leurs géodésiques plusieurs intégrales quadratiques indépendantes.

Quand un $ds^2$ d'une famille de Dini possède exactement $m$ intégrales quadratiques pour ses géodésiques, il en est de même de tous les autres $ds^2$ de la famille.

4. Si un $ds^2$ admet pour ses géodésiques plus de trois intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives $\left(\frac{pq}{\lambda} = 1\right)$, il en possède exactement cinq, et sa courbure est constante.

Si un $ds^2$ admet pour ses géodésiques trois intégrales quadratiques indépendantes exactement, il convient à des surfaces de révolution (M. Darboux).

Si un $ds^2$ d'une famille de Dini a sa courbure constante, il en est de même de tous les autres, ce qui revient à dire que les surfaces à courbure constante sont représentables géodésiquement les unes sur les autres, à l'exclusion de toute autre surface.

Si un $ds^2$ d'une famille de Dini convient à une surface de révolution, il en est de même de tous les autres.

Les $ds^2$ de révolution de M. Darboux conviennent aussi à des surfaces toutes représentables géodésiquement les unes sur les autres.

---

([1]) Voir *Leçons* de M. Darboux, t. II, p. 209.

([2]) Voir *Leçons* de M. Darboux, 3e Partie, Chapitre II, p. 30.

5. La détermination complète de toutes les formes de révolution

$$g(x-y)\,dx\,dy,$$

qui admettent trois intégrales quadratiques pour leurs géodésiques, revient à la discussion des équations linéaires à coefficients constants

$$aX'' + bX' + cX + d = 0,$$
$$aY'' + bY' + cY + d = 0.$$

6. Si un $ds^2$ admet pour ses géodésiques une *seule* intégrale quadratique, en dehors de celle de ses forces vives, il ne possède pas forcément la forme de Liouville. Mais, si le nombre des intégrales quadratiques est au moins deux, des formes de Liouville sont alors assurées au $ds^2$.

Prenons le $ds^2$ sous la forme

$$ds^2 = [X_1(x_1) - Y_1(y_1)]\,dx\,dy,$$

où

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Soit (X, Y) un couple de solutions de l'équation (D) transformée. M. Kœnigs appelle X, Y des coefficients de transformation du $ds^2$.

Le changement de variables le plus général amenant la forme de Liouville sera défini par les quadratures

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{a + bX + cX^2 + \dots}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{a - bY + cY^2 - \dots}}.$$

M. Kœnigs appelle *type essentiel* le type de Liouville le plus général que l'on obtient de la sorte, *variables essentielles* les variables $x'$, $y'$, et *types singuliers* les types de Liouville différents du type essentiel.

7. La classification la plus rationnelle des $ds^2$ ayant la forme de Liouville est celle qui a pour base la considération des intégrales quadratiques.

8. M. Kœnigs appelle $ds^2$ réciproques les $ds^2$ de la forme $(X_1 - Y_1)\,dx\,dy$ et $(X - Y)\,dx_1\,dy_1$, réciproques aussi les surfaces qui admettent deux $ds^2$ réciproques.

Les géodésiques de l'une des surfaces ont pour images sur l'autre des coniques, au sens que M. Dini a attribué à ce nom [1].

9. Parmi les nouveaux types que donne le principe de réciprocité, M. Kœnigs s'occupe de déterminer quels sont les types essentiels et les types singuliers.

10. M. Kœnigs cherche dans quels cas le $ds^2$ admet des formes de Lie en même temps que des formes de Liouville.

11. M. Kœnigs se propose de démontrer que les Tableaux qu'il a formés contiennent toutes les solutions du problème suivant : Trouver tous les $ds^2$ dont les géodésiques possèdent plusieurs intégrales quadratiques.

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons*, t. III.

12. Pour cela, M. Kœnigs prouve que X, Y, $X_1$, $Y_1$ sont des fonctions uniformes dans tout le plan, n'ayant à distance finie d'autres singularités possibles que des pôles. Tout pôle de l'une de ces fonctions est double, et à résidu nul.

Si $a$ et $b$ sont deux pôles de X, $(a-b)\sqrt{2}$ est une période de $X_1$ et de $Y_1$. Les pôles de Y possèdent des propriétés analogues; les pôles de $X_1$ et de $Y_1$ fournissent des résultats identiques pour les X et les Y.

Si Y a un pôle, on pourra mettre le $ds^2$ sous la forme

$$[F(x+y)-F(x-y)]\,dx\,dy.$$

Si $a$, $b$, $c$ sont trois pôles de l'une quelconque des quatre fonctions et si le rapport $\frac{b-a}{c-a}$ n'est pas un nombre réel commensurable, les fonctions X, Y, $X_1$, $Y_1$ sont doublement périodiques.

13. Tout coefficient de transformation relatif à une forme essentielle possède au moins un pôle, à moins d'être constant; s'il n'en possède qu'un, il a la forme

$$\frac{A}{(x+a)^2}+B.$$

Dans les autres cas, il en possède au moins trois, et a la forme

$$\frac{A\cos\frac{x}{a}+B}{\sin^2\frac{x}{a}}+C.$$

Le $ds^2$ (dans les deux derniers cas) a la forme

$$[F(x+y)-F(x-y)]\,dx\,dy,$$

et la fonction F est paire. Les deux coefficients de transformation sont alors tous les deux

$$\frac{A}{x^2},\quad \frac{A}{y^2}$$

ou bien

$$\frac{A\cos x+B}{\sin^2 x},\quad \frac{A\cos y+B}{\sin^2 y}.$$

Il n'y a pas d'autres formes.

14. Tout $ds^2$ qui admet deux intégrales quadratiques exactement pour ses géodésiques est représentable géodésiquement sur un autre qui est dans le même cas, et qui est réductible au type

$$ds^2=AS_0+BS_1+CS_2+DS_3,$$

où

$$S_0=[p(x+y)-p(x-y)]\,dx\,dy,$$

$$S_i=[p(x+y+\omega_i)-p(x-y+\omega_i)]\,dx\,dy.$$

15. M. Kœnigs appelle *invariants du* $ds^2$ les coefficients A, B, C, D. Le $ds^2$ reste identique à lui-même si l'on permute de toutes les manières les quantités A, B, C, D.

Un $ds^2$ du type considéré est défini par ses invariants, abstraction faite de leur ordre.

Le $ds^2$ étant donné sous la forme

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right];$$

[ $F(u)$, $G(u)$ sont des polynomes du quatrième degré ].

$a$, $b$, $c$, $d$ étant les racines de $G(u) = 0$, les invariants ont pour expressions

$$16\frac{F(a)}{G'^2(a)}, \quad 16\frac{F(b)}{G'^2(b)}, \quad 16\frac{F(c)}{G'^2(c)}, \quad 16\frac{F(d)}{G'^2(d)}.$$

16. Les $ds^2$ du type envisagé peuvent se représenter point par point sur un plan de telle manière que l'image de leurs géodésiques soit un réseau tangentiel de coniques. Si les coniques du réseau touchent deux droites fixes, le $ds^2$ est de révolution, et sa courbure est constante si les coniques du réseau touchent trois droites fixes.

17. Pour qu'un $ds^2$ du type considéré possède une transformation infinitésimale de ses géodésiques, il faut et il suffit qu'un des invariants A, B, C, D, D par exemple, soit nul, et que les trois autres vérifient une équation de la forme

$$\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = 0.$$

18. Si $B = C$, on trouve le $ds^2$

$$\left[-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}} + \frac{2\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right] dx\, dy,$$

qui possède une, et une seule, transformation infinitésimale de ses géodésiques. Sur ce $ds^2$ sont géodésiquement représentables tous les $ds^2$ qui admettent *une* transformation infinitésimale de leurs géodésiques.

Seuls, les $ds^2$ de révolution jouissent de la propriété d'admettre trois transformations infinitésimales de leurs géodésiques; l'une est toujours conforme.

On a par le fait résolu la question suivante :

« Trouver les réseaux tangentiels de coniques qui possèdent une transformation infinitésimale ponctuelle. »

R. Levavasseur.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO. In-8°.

Tome II; 1888 (¹).

*Retali* (*V.*). — Sur les formes binaires cubiques. (25-27).

Construction des éléments du covariant hessien et solution de quelques autres problèmes. Deux éléments imaginaires conjugués de la forme sont déterminés sur la droite par son intersection avec un cercle de rayon nul (point-cercle).

*Giudice* (*F.*). — Sur la détermination de fonctions d'une variable définies au moyen d'une équation à deux variables. Une observation relative à la constante qui se présente dans les développements en série des fonctions circulaires. (28-36).

Résolution, par intégration, des équations fonctionnelles

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y+xy),$$
$$\psi(x)\psi(y) = \psi(x+y),$$
$$\xi(x) + \xi(y) = \xi(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$
$$\eta_1(x)+\eta_1(y) = \eta_1\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Au sujet des fonctions circulaires l'auteur envisage la constante A dans le développement

$$\text{arc}\sin x = \text{A}\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

et sa dépendance du choix de l'unité des arcs.

*Del Re* (*A.*). — Sur une question élémentaire de Géométrie. (37-39).

Étant donnée une polarité quelconque Π (polarité par rapport à une surface de second ordre, ou système focal), chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface S et sa polaire réciproque S′ par rapport à Π se correspondent dans une homographie d'espèce donnée, de telle sorte que le point A′ correspondant d'un point A de S soit le point de contact avec S′ du plan α polaire de A.

La condition cherchée est que la surface S soit du second ordre et que l'homographie résultant de la composition de la polarité par rapport à cette surface avec la polarité donnée soit de l'espèce donnée.

La Note est écrite en français.

---

(¹) Voir *Bulletin*.

*Halphen (G.-H.).* — Sur l'équation d'Euler. (40-44).

Intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = 0,$$

étant

$$X = AC - B^2, \qquad X_1 = A_1C_1 - B_1^2,$$

et A, B, C des polynomes quadratiques en $x$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ des polynomes quadratiques en $x_1$, de telle sorte que l'on ait

$$A x_1^2 + B x_1 + C = A_1 x^2 + B_1 x + C_1.$$

La Note est écrite en français.

*Segre (C.).* — Quelques considérations élémentaires sur l'incidence de droites et de plans dans l'espace de quatre dimensions. (45-52).

*Vivanti (G.).* — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. (53-58).

Généralisation d'un théorème démontré par M. Morera (*Giornale della Società di letture, etc., in Genova,* agosto-settembre, 1887). Voici le théorème généralisé :

« Étant $z$ une fonction des $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les dérivées partielles du premier ordre, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h$$

ait une solution complète de la forme

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n),$$

est que H satisfasse à une équation fonctionnelle de la forme

$$\varphi[\varphi_1(H, x_1, p_1), \ \varphi_2(H, x_2, p_2), \ \ldots, \ \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0.$$

*Jordan (C.).* — Sur la marche du cavalier. (59-68).

Nombre minimum de coups nécessaire pour amener le cavalier d'une case (initiale) à une autre case donnée. On suppose l'échiquier illimité. L'auteur résout cette question et passe ensuite au problème plus général suivant :

« Étant donné un système d'équations indéterminées à coefficients entiers

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = M_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = M_m,$$

déterminer parmi les systèmes de solutions qu'il comporte celle où la somme des variables $x$ est minimum.

La Note est en français.

*Volterra* (*V.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (69-75).

Dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. III° (1887) l'auteur a montré que la théorie des équations différentielles linéaires peut être ramenée au calcul infinitésimal des substitutions, et ce calcul a été développé par lui-même dans un Mémoire publié dans les *Memorie della Società italiana delle Scienze* (*detta dei XL*), (serie III$^a$, vol. VI°), pour le cas où les substitutions sont des fonctions d'une variable réelle. Ici il suppose que les substitutions soient des fonctions d'une variable complexe. Il trouve, par exemple, que :

T étant une substitution holomorphe dans un champ simplement connexe $\sigma$, et $s$ une courbe fermée contenue en $\sigma$, on a

$$\int_s \mathrm{T}\,dz = 1,$$

1 étant le symbole de l'identité.

*Conti* (*J.*). — Sur les congruences engendrées par un couple de plans en correspondance double. Note II. (97-106).

Dans cette seconde Note l'auteur étudie deux congruences particulières. La première est engendrée de la manière suivante :

On prend dans un plan P un faisceau de rayons, projectif à un faisceau de coniques situé dans l'autre plan P′, et une droite arbitraire $\sigma$ non située dans aucun des deux plans. Les droites qui rencontrent à la fois $\sigma$ et deux éléments correspondants des deux faisceaux déterminent sur P, P′ les points correspondants d'une transformation double, et sont les rayons de la congruence.

La génération de la seconde est la suivante :

On prend encore un faisceau de rayons sur P, un faisceau de coniques sur P′, et une surface réglée rationnelle $\mathrm{S}_n$ d'ordre $n$, dont les génératrices correspondent projectivement aux éléments des deux faisceaux. Les droites qui rencontrent à la fois trois éléments correspondants des trois formes projectives rencontrent P et P′ en des points correspondants de la transformation, et engendrent la congruence.

*Murer* (*V.*). — Génération de la surface d'ordre $n$ à droite $(n-2)$-ple. (107-109).

Cette surface peut être toujours engendrée par un faisceau de plans ayant la droite multiple pour axe, et une série rationnelle de quadriques, d'indice $n-2$, en correspondance projective avec le faisceau.

*Lazzeri* (*G.*). — Sur certains systèmes de courbes et de surfaces. (110-115).

Pour les courbes d'ordre $n$ l'auteur démontre un théorème dont on obtient comme cas particulier celui de Clifford :

Les quatre cercles circonscrits aux triangles formés par quatre droites d'un plan ont un point commun.

Voici le théorème généralisé :

Soient sur un plan $n$ points $P_i$ et $n+2$ droites $r_i$, dont trois ne passent par un point et dont aucune ne passe par un des $P_i$. En prenant $n+1$ de ces droites, on a $\binom{n+1}{2}$ points d'intersection. Ces points et les points $P_i$ déterminent une courbe de l'ordre $n$; et l'on a ainsi $n+2$ de ces courbes. Toutes ces courbes ont en commun $\frac{n(n-1)}{2}$ points outre les $P_i$.

Puis il démontre des propriétés analogues dans l'espace et en déduit les cas particuliers de $n = 2$.

*Starkoff* (*A.*). — Sur un problème du calcul des variations. (116-117) (en français).

Étant donnés deux plans parallèles et un point dans l'un d'eux, mener de ce point à l'autre plan une ligne de longueur donnée, telle que l'aire de la surface cylindrique ayant cette ligne pour directrice et pour génératrices des perpendiculaires terminées aux deux plans soit maximum.

La courbe cherchée est une hélice.

*De Jonquières* (*E.*). — Construction géométrique des courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles. (118-123) (en français).

*Del Re* (*A.*). — Sur les systèmes linéaires $n$-ples de sphères dans l'espace de $n$ dimensions.

Prenons pour coordonnées d'une sphère ses puissances $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ par rapport aux sommets $A_i$ d'un polyèdre situé dans l'espace donné, et posons la relation linéaire

$$\sum_1^{n+1} m_i \alpha_i + m_{n+2} = 0.$$

Alors on a que :

Toutes les sphères satisfaisant à cette relation ont même puissance par rapport à un certain point fixe. Ce point est le barycentre des sommets $A_i$ avec les coefficients $m_i$. L'auteur trouve aussi la valeur de la puissance commune de ces sphères par rapport à ce point.

*Del Re* (*A.*). — Un théorème de Géométrie projective synthétique et quelques-uns de ses corollaires. (128-130).

Toutes les homographies planes ayant en commun trois couples de points correspondants qui forment deux triangles homologiques ont leurs triangles

fondamentaux conjugués par rapport à la polarité déterminée par les deux triangles homologiques.

*Montesano* (*D.*). — Sur une famille de surfaces homaloïdiques. (131-134).

Ce sont les surfaces homaloïdiques dont les points peuvent correspondre uni-déternativement et *prospectivement* aux plans d'une étoile ayant son centre en un point simple de la surface.

*Vivanti* (*G.*). — Sur les fonctions ayant un nombre infini de valeurs. (135-138).

La fonction inverse d'une intégrale abélienne de genre $> 1$ reprend la même valeur pour des valeurs de la variable rapprochées autant que l'on veut. On en a tiré la conséquence qu'une intégrale abélienne de genre $> 1$ pour chaque valeur de sa limite supérieure prend toutes les valeurs possibles. L'auteur observe que ceci n'est pas juste, car les valeurs que cette intégrale peut prendre pour une valeur donnée de sa limite supérieure ne forment qu'un *ensemble dénombrable* ou *de la première puissance* (suivant les dénominations de M. Cantor). Il appelle *fonctions de la première classe* celles dont les valeurs correspondant à une valeur de la variable forment un ensemble de la première puissance, et démontre que :

1° Si $y$ est une fonction de $x$ de la première classe, la même chose a lieu pour $x$ considérée comme fonction de $y$;

2° Les fonctions définies par des équations algébrico-différentielles linéaires sont de la première classe;

3° Le théorème de M. Poincaré :

« $y$ étant une fonction analytique quelconque de $x$, on peut toujours déterminer une nouvelle variable $z$ telle que $x$ et $y$ soient des fonctions uniformes de $z$ »

a pour condition nécessaire et suffisante que la fonction $y$ soit de la première classe.

*Del Pezzo* (*P.*). — Extension d'un théorème de Noether. (139-144).

Le théorème de M. Noether est le suivant :

« A toute courbe plane ayant des singularités arbitraires on peut faire correspondre uniponctuellement une autre courbe n'ayant que des points doubles. »

Voici l'extension que l'auteur en donne aux surfaces.

A toute surface douée de singularités supérieures arbitraires, ayant entre elles des relations quelconques, on peut toujours faire correspondre uniponctuellement une autre surface n'ayant que des singularités ordinaires.

Il en donne aussi l'extension aux premières variétés d'un espace de $k$ dimensions.

*Betti* (*E.*). — Sur une extension de la troisième loi de Képler. (145-147).

Les variations du mouvement et de la masse d'un système newtonien en mouvement stable ne changent pas le rapport entre le cube de la distance moyenne et le produit de la masse par le carré du temps périodique moyen.

*Segre* (*C.*). — Une observation sur les systèmes de rayons dans les espaces supérieurs. (148-149).

Extension des propriétés focales aux systèmes $(n-1)$-ples dans un espace de $n$ dimensions.

*Vivanti* (*G.*). — Encore sur les fonctions ayant un nombre infini de valeurs. (150-151).

Toute fonction analytique monogène (dans le sens de Weierstrass) prend pour chaque valeur de la variable un ensemble dénombrable de valeurs, c'est-à-dire qu'elle est de la première classe. [*Voir* ci-dessous : *Poincaré*].

*Pincherle* (*S.*). — Sur le caractère arithmétique des coefficients des séries satisfaisant à des équations linéaires différentielles ou aux différences. (153-164).

L'auteur a étudié ailleurs (*Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. CIII) ces coefficients et donné un théorème, pour le cas où l'équation différentielle a au point $x=0$ une équation déterminante irréductible. Ici il suppose que cette équation ne soit pas irréductible, et en particulier que $x=0$ ne soit pas un point singulier pour toutes les intégrales de l'équation différentielle.

*Torelli* (*G.*). — Sur la transformation cubique d'une forme binaire cubique. (165-171).

La transformation cubique

$$y_1 b_x^3 - y_2 a_x^3 = 0$$

sur la forme binaire cubique $c_x^3$ peut être réduite à la transformation linéaire

$$y_1 \beta_x - y_2 \alpha_x = 0,$$

étant

$$\alpha_x = (aK)^3 (\nabla c)^2 c_x - (cK)^3 (\nabla a)^2 a_x,$$
$$\beta_x = (bK)^3 (\nabla c)^2 c_x - (cK)^3 (\nabla b)^2 b_x,$$

où $\nabla_x^2$, $K_x^3$ sont les covariants quadratique et cubique de la forme

$$\theta_x^3 = (bc)(ca)(ab) a_x b_x c_x.$$

Le module $(\alpha\beta)$ de la transformation linéaire est

$(\alpha\beta)$ [illegible] $(cK)\,P$

P étant le discriminant de $\theta_x^3$. La transformation linéaire mentionnée conduit au même résultat que la transformation cubique à moins du facteur $\frac{2^3}{3^3}(cK)^3P^2$.

*Sforza* (*G.*). — Condition géométrique pour la réalité des points et des tangentes communes à deux coniques. (172-175).

Étant

$$a_x^2 = 0, \qquad a_x'^2 = 0$$

les équations des deux coniques, et $A_1$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, $A_2$ les invariants fondamentaux des deux formes, la condition cherchée est que la conique

$$\Omega = (\Theta_2^2 - \Theta_1 A_2)\, u_\chi^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1 \Theta_2)\, u_\chi^2 + (\Theta_1^2 - \Theta_2 A_1)\, u_{\chi'}^2 = 0,$$

soit imaginaire.

*Brambilla* (*A.*). — Sur une certaine surface algébrique rationnelle. (176-183).

C'est la surface dont le point général a les coordonnées

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta_1^n : \theta_2^n : \theta_3^n : \theta_4^n,$$

étant

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0.$$

L'auteur a déjà étudié cette surface (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, série II, vol. XXI; 1888). Ici il apporte les modifications nécessaires pour le cas où le nombre $n$ est pair.

*Peano* (*G.*). — Théorèmes sur des maxima et minima géométriques et sur des normales à des courbes et à des surfaces. (189-192).

L'auteur donne sans démonstrations quelques propositions à l'aide desquelles on peut résoudre des problèmes de Géométrie infinitésimale par des procédés fondés sur la composition de segments, de barycentres, etc. Ces propositions sont des conséquences de quelques formules obtenues par l'auteur dans son *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, 1888).

*Marcolongo* (*R.*). — Théorème de Mécanique. (193-196).

Tout problème de Mécanique dans lequel la position du système dépend de trois quantités et pour lequel existent : 1° l'intégrale des forces vives; 2° une des intégrales des aires; 3° une des intégrales du centre de gravité, relative à l'un des axes du plan des aires, peut être réduit aux quadratures.

*Poincaré* (*H.*). — Sur une propriété des fonctions analytiques. (197-200).

Il n'existe pas de fonction analytique multiforme d'une puissance (ou classe) supérieure à la première.

L'auteur complète ainsi les résultats obtenus par M. Vivanti (*voir* ci-dessus).

## *Loria* (*G.*). — Sur les courbes rationnelles d'ordre $n$ dans l'espace de $n-1$ dimensions. (201-224).

L'auteur commence par donner quelques propriétés générales de ces courbes, principalement au sujet de leurs points stationnaires et des espaces de $n-2$ dimensions osculateurs en ces points. Il trouve par exemple que ces courbes sont de la classe $2(n-1)$, et donne une représentation paramétrique canonique de la courbe en prenant les espaces stationnaires pour espaces fondamentaux. Puis il étudie en particulier les courbes admettant la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= \lambda^n, \\ \rho x_1 &= \lambda^{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \rho x_{r-1} &= \lambda^{n-r+1}, \\ \rho x_r &= \lambda^{n-r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \rho x_{n-2} &= \lambda, \\ \rho x_{n-1} &= 1, \end{aligned}$$

et, enfin, les collinéations qui transforment une courbe rationnelle en elle-même, en particulier la cubique plane rationnelle, la quartique gauche de première espèce, la quartique gauche harmonique et équianharmonique, la courbe tétraédrique ($n=6$), la courbe octaédrique ($n=8$), et la courbe icosaédrique ($n=12$).

## *Pincherle* (*S.*). — Une transformation de séries. (225-226).

Ayant la série

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n},$$

où $a_n$ est tel que la série

$$F(x) = \sum a_n x^n$$

soit convergente dans un cercle de rayon $> 2$, on aura

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

S. R.

## BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

### Tome XX; 1892 (¹).

### *D'Arone.* — Sur la fonction exponentielle. (2-4).

Soient $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deux fonctions de $n$ variables réelles, finies et continues ainsi que leurs dérivées premières, admettant des dérivées secondes finies et satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial u_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

L'auteur démontre que, si la différence

$$e^{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - e^{N(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

est une constante différente de zéro, les fonctions M et N se réduisent à des constantes.

Il déduit de là que si la différence des deux exponentielles $e^{G(z)} - e^{P(z)}$, où les exposants $G(z)$ et $P(z)$ sont deux polynomes entiers par rapport à la variable complexe $z$, est constante, ces deux polynomes doivent se réduire à deux constantes.

Si l'on parvenait à montrer qu'il en est de même lorsque $G(z)$ et $P(z)$ sont deux fonctions holomorphes, cette propriété permettant d'établir directement et sans recourir aux fonctions modulaires le théorème bien connu de M. Picard : Si une fonction holomorphe ne prend ni la valeur $a$ ni la valeur $b$, elle se réduit à une constante.

### *Fouret.* — Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique. (4-6).

Tout nombre qui, substitué à $x$ dans le polynome entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.

M. Fouret déduit de ce théorème une règle pour trouver une limite inférieure des racines plus avantageuse que la règle usitée qui consiste à ramener cette recherche à celle d'une limite supérieure des racines de $F(-x) = 0$, et qui fournit toujours une limite inférieure négative. La règle de M. Fouret présente les mêmes avantages que celle de Newton pour la recherche d'une limite supérieure des racines.

### *Laisant.* — Transformation d'un polynôme entier. (6-10).

Solution nouvelle de ce problème, déjà résolu par M. d'Ocagne :

---

(¹) Voir *Bulletin*, $XVII_2$, p. 89.

Mettre un polynôme entier de degré $n$

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

sous la forme

$$b + b_1 x + b_2 x(x-1) + \ldots$$
$$+ b_p x(x-1)\ldots(x-p+1) + \ldots + b_n x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

*Lucas* (*F.*). — Note relative aux points centraux. (10-12).

Soit

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = 0$$

l'équation d'un système plan de $p$ points quelconques que l'auteur regarde comme doués de masses égales. En égalant à o les dérivées successives de $f(z)$, on obtient les *points centraux* d'ordres successifs du système.

M. F. Lucas montre que la droite qui joint les deux points centraux d'ordre $p-2$ est dirigée suivant un des axes principaux d'inertie du système.

Il en déduit ce théorème :

« Un système plan de points et les systèmes de ses points centraux successifs admettent les mêmes directions principales d'inertie. »

Pour que l'ellipse d'inertie d'un système plan de points soit une circonférence, il faut et il suffit que la somme des carrés de leurs coordonnées affixes, relativement à deux axes rectangulaires quelconques passant par leur centre de gravité, soit identiquement nulle. Dans ce cas, tous les systèmes de points centraux des divers ordres admettent des circonférences pour ellipses d'inertie.

*Laisant.* — Note relative au symbole $i^i$ et en général à l'opération $p^q$. (12-15).

*Lévy* (*L.*). — Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux. (15-16).

M. L. Lévy fait connaître toutes les surfaces enveloppes de sphères qui, par une translation parallèle à $Oz$, engendrent une famille faisant partie d'un système triplement orthogonal. Ce sont :

1° Les surfaces-canal enveloppées par une sphère dont le centre décrit une courbe plane arbitraire située dans un plan perpendiculaire à $Oz$;

2° Les périsphères symétriques par rapport à un plan passant par $Oz$, la directrice étant encore quelconque;

3° Les enveloppes de sphères, dans lesquelles chaque sphère touche son enveloppe suivant une circonférence de rayon nul. Ces surfaces se réduisent à une courbe.

*Raffy.* — Sur certaines surfaces spirales. (16).

On sait que la détermination des spirales d'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2u}\,\mathrm{U}\,(du^2 + dv^2)$$

revient à l'intégration de l'équation

$$k^2(z_0^2 + z_0'^2) = k^2 U^2 - U'^2.$$

M. Raffy montre que l'on peut trouver explicitement une série simplement infinie de spirales dans l'hypothèse

$$U = \cos^{\frac{3}{2}} \frac{2u}{9}, \qquad k^2 = \frac{1}{27}.$$

*Lucas* (*F.*). — Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse. (17-19).

C'est toujours avec le grand axe de l'ellipse d'inertie que coïncide la droite de jonction des deux points centraux d'ordre $p - 2$.

La différence des carrés des rayons de giration principaux est égale à $p - 1$ fois le carré de la demi-distance des deux points centraux d'ordre $p - 2$.

*Guimaraës.* — Sur trois normales spéciales à l'ellipse. (19-21).

*Appell.* — Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique. (21-22).

Soit un système matériel dont la configuration est définie par $k$ paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Les équations du mouvement de ce système sous l'action de forces arbitraires ne dépendant que de sa position sont

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad q'_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt},$$

$Q_\alpha$ ne dépendant que de $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour un deuxième système dont la configuration est définie par $k$ paramètres $r_1, r_2, \ldots, r_k$, on aura de même, en appelant $t_1$ le temps,

$$(2) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S}{\partial r'_\alpha}\right) - \frac{\partial S}{\partial r_\alpha} = R_\alpha, \qquad r'_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_1}.$$

On transformera l'un des mouvements dans l'autre, si l'on peut trouver des fonctions $\varphi_\alpha$ et $\lambda$ de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, telles qu'en posant

$$r_\alpha = \varphi_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad dt_1 = \lambda\, dt,$$

les équations (1) se transforment en (2).

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation soit possible quelle que soit la loi de forces agissant sur un des systèmes est l'égalité de certains *invariants* qui se rattachent aux recherches de Beltrami.

*Raffy.* — Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles. (22-32).

Tout élément linéaire de spirale à lignes d'égale courbure parallèles, quand on rapporte la surface à ces lignes et aux géodésiques orthogonales, prend l'une

des deux formes

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left[A\left(\frac{u}{v}\right)^n + B\left(\frac{v}{u}\right)^n\right]^2 dv^2,$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left(A \log \frac{u}{v} + B\right)^2 dv^2,$$

dont la seconde peut être considérée comme une dégénérescence de la première.

## *Lucas* (*F.*). — Sur les polygones inscrits dans les coniques. (33-34).

Lorsqu'un polygone de $2p$ côtés est inscrit dans une conique, ses côtés de rang impair coupent ses côtés de rang pair en $p(p-2)$ points qui appartiennent à une courbe du degré $p-2$.

En faisant $p=3$, on obtient le théorème de Pascal relatif à l'hexagone inscrit.

En supposant que les côtés de rang pair d'un polygone de $2p$ côtés inscrit dans une conique deviennent infiniment petits, on a ce théorème :

« Lorsqu'un polygone de $p$ côtés est inscrit dans une conique, les tangentes à la conique menées par les sommets de ce polygone coupent ses côtés en $p(p-2)$ points qui appartiennent à une courbe de degré $p-2$. »

En transformant les figures par la méthode des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes corrélatifs concernant les polygones circonscrits aux coniques.

## *Fouret.* — Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique. (30-38).

Une valeur négative de $x$ est une limite inférieure des racines de l'équation

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

lorsqu'elle fait prendre des valeurs alternativement positives et négatives aux polynomes de la suite

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

$$a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

$$a_0 x + a_1,$$

$$a_0.$$

Cette règle est corrélative de celle due à M. Thibaut qui donne une limite supérieure des racines d'une équation algébrique.

## *Fouret.* — Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate. (38-39).

On sait que la lemniscate est la courbe sur laquelle doit se mouvoir un point pesant dans un plan vertical pour décrire sans vitesse initiale à partir d'un

point fixe un arc quelconque dans l'intervalle de temps qu'il lui faudrait pour parcourir en partant du repos la corde sous-tendant cet arc.

C'est à tort que la découverte de ce théorème est attribuée tantôt à Fuss, tantôt à Saladini. Elle est due en réalité à Euler (*Mécanique*, t. II, p. 166-167; 1736).

*Catalan.* — Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique. (40-43).

*Demoulin.* — Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches. (43-45).

Soient $Ox$, $Oy$, $Oz$ la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche.

L'axe hélicoïdal relatif au mouvement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites coupe à angle droit la normale principale $Oy$ en un point distant de l'origine O de la longueur

$$l = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2+\tau^2};$$

l'angle $\theta$ qu'il fait avec la tangente $Ox$ est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\tau}{\rho}.$$

Si l'on cherche à exprimer la courbure et la torsion en fonction de $l$ et du rapport $k = \frac{V}{\omega}$ de la vitesse V commune à tous les points de l'axe hélicoïdal à la rotation $\omega$ du trièdre $Oxyz$ autour du point O, on trouve ces relations curieuses à cause de leur réciprocité

$$\rho = l + \frac{k^2}{l}, \qquad -\tau = k + \frac{l^2}{k}.$$

Si la courbe gauche est à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit par rapport au trièdre $Oxyz$ un conoïde de Plücker.

*Raffy.* — Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces à courbure moyenne constante. (47).

On sait que les formules de Codazzi sont

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{A} + \frac{q_1}{C} = 0, &\qquad& \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1,\\
&r + \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} = 0, && \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1,\\
&r_1 - \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} = 0, && \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1.
\end{aligned}$$

Introduisant la courbure moyenne $h$ et la courbure totale $g$, et posant

$$h^2 - g = S^2, \qquad \cos\sigma = \frac{p}{AS} = \frac{-q_1}{CS},$$

M. Raffy en déduit les nouvelles formules

$$-\frac{\partial\tau}{\partial u} = \frac{A}{C}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\sin\tau}{S} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\cos\tau}{S} - \frac{A}{C}\frac{\partial}{\partial v}\log A^2 S,$$

$$-\frac{\partial\tau}{\partial v} = \frac{C}{A}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\sin\tau}{S} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\cos\tau}{S} - \frac{C}{A}\frac{\partial}{\partial u}\log C^2 S,$$

qui se prêtent à de nombreuses applications.

Elles montrent notamment que la courbure moyenne $h$ satisfait à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre d'où a disparu l'angle auxiliaire $\tau$.

L'auteur s'en sert encore pour exprimer, au moyen d'invariants seulement, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément linéaire, donné sous une forme quelconque, convienne à des surfaces à courbure moyenne constante $h$. Cette condition est

$$\Delta_2 \log\left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2}\right) - \frac{4}{R_1 R_2} = 0.$$

Il en résulte que l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2}\right)^{-\frac{1}{2}} (du^2 + dv^2).$$

## *D'Ocagne.* — Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane. (49-59).

M. d'Ocagne fait ressortir le rôle que joue, dans l'étude infinitésimale des courbes planes, une courbe *adjointe* ainsi définie :

« Étant donnée une courbe plane (C), on prend arbitrairement deux pôles O et P. On joint le pôle O à un point M pris sur (C), et par P on mène une parallèle à la normale en M à la courbe (C); les deux droites ainsi menées se coupent en un point H dont le lieu est la courbe adjointe. »

L'adjointe permet de construire la normale en tout point de la courbe (C) et aussi de trouver les points de cette courbe où la normale a une direction donnée.

Elle permet en outre d'obtenir simplement le centre de courbure en tout point de (C), de la manière suivante : Par le point M' où la normale en M à la courbe (C) coupe la droite OP, que l'on élève à cette normale une perpendiculaire coupant OM en L. La parallèle menée par L à la tangente en H à l'adjointe passe par le centre de courbure Ω répondant au point M.

On déduit de là que les points d'inflexion de la courbe (C) se trouvent sur les droites joignant le point O au point de contact des tangentes menées de P à l'adjointe.

Les éléments de l'adjointe, dépendant d'infiniment petits d'un certain ordre, permettent d'obtenir les éléments de la courbe (C) dépendant d'infiniment petits de l'ordre immédiatement supérieur. L'auteur examine comment la connaissance du centre de courbure de l'adjointe entraîne celle du centre de courbure de la développée de la courbe (C).

*Fouret.* — Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques. (60-64).

L'auteur établit géométriquement ces deux théorèmes que M. Jamet avait déjà démontrés par l'analyse :

« 1° Le rayon de courbure d'une courbe triangulaire symétrique

$$Ax^n + By^n + Cz^n = 0$$

est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure de la conique tangente au point considéré à la courbe et circonscrite au triangle de symétrie (triangle de référence).

» 2° Le rayon de courbure d'une courbe tétraédrale symétrique, intersection des deux surfaces tétraédrales

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0,$$
$$A'x^n + B'y^n + C'z^n + D't^n = 0,$$

est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure de la cubique gauche tangente au point considéré à la courbe et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie (tétraèdre de référence). »

*Laisant.* — Sur un problème de Géométrie. (65-67).

Solution d'un problème dont l'énoncé a été communiqué à l'auteur par M. Lemoine :

« Trois points $A_1$, $B_1$, $C_1$ ont respectivement pour coordonnées $x, y$; $x', y'$; $x'', y''$ par rapport aux côtés AB, AC; BC, BA; CA, CB d'un triangle pris pour axes coordonnés. Connaissant $A_1$, $B_1$, $C_1$ et les six valeurs $x, y$; $x', y'$; $x'', y''$, trouver le triangle ABC.

*Bioche.* — Sur les singularités des courbes algébriques planes. (67-69).

Les nombres qui entrent dans les formules de Plücker sont deux à deux corrélatifs, sauf le genre $p$, qui est dualistique. Les nombres corrélatifs sont :

1° Le degré $n$ et la classe $k$;
2° Le nombre des points doubles $d$ et celui des tangentes doubles $t$;
3° Le nombre des points de rebroussement $r$ et celui des tangentes d'inflexion $i$.

L'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne en général celle des autres; cependant il n'en est pas toujours ainsi. M. Bioche énumère les cas d'exception.
L'auteur fait observer que, la présence de points multiples abaissant la classe d'une courbe, on pourrait penser que, parmi les courbes d'un degré donné $n$, celles dont la classe a la plus petite valeur sont les courbes unicursales. Mais cela n'est vrai que pour les valeurs $n = 3$, 4 ou 5.

*Frolov.* — Égalités à deux et à trois degrés. (64-84).

*Mangeot.* — Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales. (84-90).

L'extension que M. Mangeot a donnée à l'idée de symétrie dans sa thèse sur la *symétrie courbe* le conduit à rechercher quelles sont les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales.

Un système de plans ne peut offrir la symétrie par rapport à une surface courbe indécomposable que si les plans du système passent par un même point et sont au nombre de 2, 4 ou 6; d'où il résulte que les surfaces polyédrales fermées ne peuvent avoir d'autres surfaces de symétrie que des plans.

Quand un système de plans présente la symétrie relativement à une surface courbe, il admet une infinité d'autres surfaces de symétrie.

Les seuls angles polyèdres convexes symétriques par rapport à des surfaces courbes sont les angles tétraèdres dont les quatre arêtes sont les diagonales d'un même parallélépipède rectangle.

Les systèmes de six plans qui possèdent la symétrie courbe sont ceux formés par les six plans diagonaux de parallélépipèdes rectangles.

Toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales sont données par l'équation

$$x^m y^n z^r = \text{const.}$$

et l'équation

$$f\left(\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{r}, \quad \frac{z^2}{r} - \frac{x^2}{m}, \quad \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}\right) = 0,$$

dans laquelle $f$ est une fonction arbitraire, est l'équation générale des surfaces S qui admettent toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales.

Cherchant celles des surfaces S qui sont réglées et celles qui sont de révolution, l'auteur trouve que ce sont des quadriques.

Enfin les seules surfaces possédant la symétrie plane du cube et la symétrie courbe du système de ses six plans diagonaux sont données par l'équation arbitraire

$$\varphi[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)] = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha = y^2 - z^2, \qquad \beta = z^2 - x^2, \qquad \gamma = x^2 - y^2.$$

*Caronnet.* — Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadrature. (91-92).

Dans le système de coordonnées imaginé par Ossian Bonnet, l'équation du plan tangent est

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0.$$

M. Caronnet montre qu'on obtient par de simples quadratures les lignes de courbure de toute surface pour laquelle $\xi$ satisfait à une équation telle que

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} = f\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right).$$

Si $F(\xi, \alpha, \beta) = 0$ est une intégrale de cette équation et que l'on pose

$$\frac{u}{p} = \frac{\alpha + \beta}{\xi}, \qquad \frac{v}{p} = \frac{i(\beta - \alpha)}{\xi}, \qquad \frac{w}{p} = \frac{\alpha\beta - 1}{\xi},$$

transportant dans l'équation intégrale les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\xi$ tirées de ces formules, on aura, en coordonnées tangentielles, $u$, $v$, $w$, $p$, une surface dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.

## *Blutel*. — Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière. (92-96).

Toute fonction entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ des racines d'une équation

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

à coefficients quelconques peut se mettre sous forme d'une fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation, et par rapport à $m - 1$ racines $x_1$, $x_2$, ..., $x_{m-1}$,

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, \ldots, p_m)}{F_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, p_1, \ldots, p_m)},$$

cette nouvelle fonction étant de degré $p$ par rapport à $x_{m-p}$. Cette transformation n'est possible que d'une seule manière.

Si la fonction rationnelle

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

est une fonction symétrique, les deux polynômes $f_1$ et $F_1$ regardés comme fonctions entières de $x_1$, $x_2$, ..., $x_m$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $p_1$, $p_2$, ..., $p_m$, ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.

De cette proposition, M. Blutel déduit un perfectionnement notable à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.

## *Schlegel*. — Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à $n$ dimensions. (97-103).

## *Transon*. — Lettre. (104-106).

## *Genty* (*M*.). — Sur les involutions d'espèce quelconque.

Une involution de degré $n$ et d'espèce $k$ est, d'après M. Guccia, une série linéaire $k$ fois indéterminée de groupes de $n$ points pris sur une droite ou sur une courbe unicursale donnée.

Analytiquement, une équation de la forme

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_{k+1} V_{k+1} = 0,$$

dans laquelle les $\lambda_i$ sont des paramètres arbitraires, et les V des polynômes de degré $n$ par rapport à la variable $t$, au moyen de laquelle peuvent s'exprimer

rationnellement le coordonnées de la courbe unicursale donnée, représente une involution $I_n^k$ de degré $n$ et d'espèce $k$.

Un point donné considéré comme point multiple d'ordre $k$ détermine un groupe unique de l'involution $I_n^k$. Il existe un nombre fini de groupes d'une involution $I_n^k$ possédant un point multiple d'ordre $k+1$. M. Genty se propose de trouver ce nombre par une voie plus courte que celle qu'a suivie M. Guccia. Le seul lemme analytique auquel il a recours est le principe de correspondance de Chasles qui consiste en ceci :

« Si deux séries de points X et Y se correspondent algébriquement de telle sorte qu'à un point X correspondent $\beta$ points Y et à un point Y $\alpha$ points X, le nombre des coïncidences des points X et Y sera $\alpha+\beta$. »

L'auteur en déduit que dans une involution de degré $n$ et d'espèce $k$ il existe $(k+1)(n-k)$ groupes possédant un point multiple d'ordre $k+1$.

Si de plus $n$ est au moins égal à $2k$ il existe un nombre fini de groupes de l'involution possédant $k$ points doubles. Ce nombre est égal à $\frac{2^k(n-k)!}{k!(n-2k)!}$.

Ce dernier théorème avait déjà été démontré par M. Émile Weyr.

M. Genty montre enfin que toute involution d'ordre $n$ et d'espèce $n-1$ présente $n$ points multiples d'ordre $n$; dans le cas où $n$ est impair, ces points multiples appartiennent à un même groupe de l'involution.

Ce théorème permet de mettre en évidence un grand nombre de propriétés géométriques, par exemple :

Par un point A d'une conique on peut mener à cette courbe trois cercles osculateurs dont les trois points de contact sont différents de A; ces trois points sont situés avec A sur un même cercle.

Les propositions qui précèdent permettent de déterminer immédiatement le nombre des surfaces algébriques de degré donné soumises à des conditions déterminées et ayant, avec une courbe gauche unicursale donnée, un contact d'ordre supérieur.

*Caronnet.* — Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface. (115-117).

En chaque point d'une surface, les centres de courbure géodésique de toutes les familles de trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes sont alignés suivant une droite.

L'auteur fait diverses applications de ce théorème.

*Laisant.* — Remarques sur les fonctions homogènes. (117-121).

Formation de l'équation aux dérivées partielles que vérifie une fonction décomposable en une somme de plusieurs fonctions homogènes.

*Humbert.* — Des involutions sur les courbes algébriques. (121).

Abstraction faite de la surface de Steiner, il n'existe pas de surface algébrique engendrée par des coniques et telle qu'en chacun de ses points passe plus d'une conique.

*D'Ocagne.* — Sur les suites récurrentes. (121-122).

Lorsqu'une suite récurrente est définie, outre les $p$ termes initiaux $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}$, par la relation

$$Y_n + A_1 Y_{n-1} + A_2 Y_{n-2} + \ldots + A_p Y_{n-p} = 0,$$

on dit qu'elle répond à l'échelle d'ordre $p(A_1, A_2, \ldots, A_p)$.

Soit

$$\varphi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \ldots + A_p = 0$$

l'équation génératrice de cette suite. Si l'on pose

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i,$$

$$\psi(x) = Y_{p-1} + Q_1(x) Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(x) Y_0,$$

on a ce théorème :

« Lorsque les équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune $\alpha$, la suite donnée répond à l'échelle d'ordre $p - 1$

$$[Q_1(\alpha), Q_2(\alpha), \ldots, Q_{p-1}(\alpha)].$$

On peut ainsi réduire l'échelle d'une suite donnée à sa plus simple expression.

*Demoulin.* — Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique donnée deux plans tangents rectangulaires. (122-132).

Ce complexe du second ordre a été étudié par M. Painvin. M. Demoulin en fait connaître un certain nombre de propriétés nouvelles.

Un complexe de Painvin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés des distances d'une droite quelconque du complexe à dix points pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Si une congruence est composée des droites communes aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques représentées en coordonnées tangentielles par les équations $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$, elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation $\Sigma + \rho \Sigma' = 0$, dans laquelle $\rho$ est un paramètre variable.

Les coniques, relatives à un plan, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homofocales.

Les cônes, relatifs à un point, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homocycliques.

Le complexe de Painvin relatif à une quadrique Q peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires P′, P″ respectivement tangents à deux quadriques Q′, Q″ homofocales à Q.

Un corps solide étant donné, les droites par rapport auxquelles le moment d'inertie de ce corps est constant engendrent un complexe de Painvin. Ce théorème avait déjà été énoncé par M. Fouret. La méthode de M. Demoulin permet

d'en donner une démonstration simple, ainsi que de la proposition suivante due à Bobillier et qui est la généralisation du théorème de Monge :

Si trois plans rectangulaires $P'$, $P''$, $P'''$ sont respectivement tangents à trois quadriques homofocales $Q'$, $Q''$, $Q'''$, leur point commun O décrira une sphère concentrique à ces quadriques.

M. Demoulin termine son Mémoire par l'établissement des propositions suivantes :

Le complexe des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est aussi celui des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires passant chacun par un point fixe.

Si l'on considère le complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre, le cône du complexe relatif à un point quelconque admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites qui joignent ce point aux deux foyers de la quadrique, et la conique du complexe, relative à un plan quelconque, admet comme foyers les projections orthogonales sur ce plan des deux foyers de la quadrique.

*Lemoine* (*Em.*). — Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème. (132-150).

---

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. IX, 1892 (1).

*Painlevé.* — Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. (9-30, 101-114, 281-308).

Suite et fin de l'important Mémoire dont la première Partie a paru dans le Tome précédent des *Annales*.

*Foussereau.* — Sur la fréquence des nombres premiers. (31-34).

La *fréquence* des nombres premiers entre deux entiers A et A′ est le quotient $\frac{M}{A'-A}$ du nombre M des nombres premiers supérieurs à A et inférieurs à $A'+1$ par la différence $A'-A$ des limites considérées.

Si, A restant constant, et A′ croissant indéfiniment, le quotient $\frac{M}{A'-A}$ tend vers une limite déterminée, cette limite est la *fréquence moyenne* à partir de A.

M. Foussereau démontre que la fréquence des nombres premiers compris

(1) Voir *Bulletin*, XVII, p. [illegible]

entre Q et $A = KQ$ tend vers zéro, lorsqu'on fait croître indéfiniment le dernier facteur premier $q$ contenu dans le produit Q. Il en est de même de la fréquence moyenne des nombres premiers à partir de Q.

*Kapteyn.* — Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation différentielle $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)$. (35-62).

L'auteur indique une méthode nouvelle pour satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + C_4 u^4$$

par une série de la forme

$$u = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \ldots$$

Cette méthode conduit d'une manière très simple aux fonctions Z et, par conséquent, aux fonctions Θ de Jacobi. Elle présente, en outre, l'avantage de s'appliquer également à l'intégration de plusieurs autres équations d'un ordre plus élevé.

*Borel.* — Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles. (63-90).

L'objet de ce travail est d'indiquer quelle est la signification géométrique de l'équation adjointe d'une équation différentielle, ainsi que de ses principales propriétés, et d'étudier, comme application, les équations équivalentes à leur adjointe et certains systèmes d'équations différentielles qui s'y rattachent.

Étant donnée une équation différentielle d'ordre $n$, linéaire et sans second membre, on peut lui faire correspondre une *courbe* dans un espace à $n-1$ dimensions en regardant $n$ intégrales distinctes de l'équation, comme les coordonnées homogènes d'un point de la courbe. La courbe *attachée* à une équation donnée est déterminée, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux courbes transformées l'une de l'autre par une substitution homographique (qui équivaut à un simple changement de coordonnées). Mais à une courbe correspondent une infinité d'équations, car on peut, dans une équation, changer la variable indépendante, ou multiplier la fonction inconnue par une fonction déterminée quelconque, sans que la courbe correspondante soit modifiée. On peut aussi évidemment multiplier le premier membre de l'équation par un facteur quelconque.

Les courbes attachées à deux équations adjointes l'une de l'autre se correspondent dualistiquement (cela résulte des relations connues entre les solutions d'une équation linéaire et celle de l'adjointe). On peut prendre cette propriété comme définition de l'équation adjointe et dire que deux équations sont adjointes lorsque les courbes correspondantes sont corrélatives; cette définition met en évidence le fait que la relation entre les deux équations est réciproque; mais elle n'est pas assez précise, puisque l'équation correspondant à une courbe donnée n'est pas entièrement déterminée. M. Borel la complète en ajoutant qu'il faut que deux points correspondants des deux courbes correspondent à une même valeur du paramètre dont dépendent les coordonnées. Cette restric-

tion étant faite, il suffit de multiplier les premiers membres des équations qui correspondent aux courbes par un facteur convenable, pour que ces équations deviennent adjointes l'une de l'autre.

L'auteur montre comment, de cette définition géométrique, on peut déduire la propriété fondamentale de l'équation adjointe.

Il cherche ensuite à quelle condition une équation d'ordre $n$ est équivalente à son adjointe. Cette question a fait l'objet de recherches approfondies de la part de Jacobi, de O. Hesse et de M. Bertrand, pour les équations d'ordre pair, et de la part de M. Darboux, pour les équations d'ordre impair. M. Borel aborde le même problème par une voie géométrique.

La discussion se scinde en deux cas, suivant qu'une certaine forme $\varphi$ quadratique par rapport aux intégrales $x_1, x_2, x_3, \ldots$ n'est pas ou est identiquement nulle. Dans le premier cas, la recherche des équations correspondantes se ramène à celle des lignes asymptotiques de la surface du second degré $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = 0$ dans l'espace à $n$ dimensions. Les équations que l'on détermine ainsi sont nécessairement d'ordre impair, et l'auteur montre géométriquement comment leurs solutions s'expriment complètement *sans signe de quadrature*. C'est toujours par des considérations géométriques que M. Borel retrouve le résultat énoncé par M. Darboux, que la relation quadratique vérifiée par les intégrales subsiste quand on les remplace par leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé. De plus, la méthode suivie par M. Borel lui permet de démontrer la réciproque et surtout de la généraliser : *Si* $2n+3$ *fonctions et leurs dérivées, jusqu'à l'ordre n inclusivement, vérifient une même relation quadratique homogène, à coefficients constants, ce sont les solutions d'une équation d'ordre* $2n+3$ *équivalente à son adjointe.*

Généralisant la question, l'auteur montre comment on peut intégrer sans quadratures un système d'équations de la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots\right) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{d^k x_1}{dt^k}, \frac{d^k x_2}{dt^k}, \ldots\right) = 0,$$

où $\varphi$ est une forme quadratique à coefficients constants de $n$ variables $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ (à discriminant différent de zéro); il s'introduit dans la solution une fonction arbitraire.

Revenant aux équations équivalentes à leurs adjointes, M. Borel étudie le cas provisoirement laissé de côté, où la forme $\varphi$ est toujours identiquement nulle. La méthode qu'il emploie dans ce cas a pour base la transformation corrélative, non plus par rapport à une surface du second degré, comme dans le cas précédent, mais par rapport à ce que l'on peut appeler un *complexe linéaire.* Mais cette méthode géométrique ne donne plus, cette fois, la solution du problème sans quadrature; elle fournit, du moins, une idée précise de son degré de difficulté et permet d'obtenir, tout au moins pour le sixième ordre, des expressions renfermant un seul signe de quadrature et relativement assez simples.

Chemin faisant, M. Borel est conduit à des digressions intéressantes sur les surfaces de l'hyperespace (notamment celles du second degré), sur les plans, les développables et les cônes. Il fait remarquer que, dans l'espace à $n$ dimensions, un cône n'est pas, en général, une surface développable, c'est-à-dire dont les plans tangents ne dépendent que d'un paramètre.

*Stouff.* — Sur la valeur de la courbure totale d'une surface aux points d'une arête de rebroussement (91-100).

En général, quand une surface possède une arête de rebroussement, en tout point de cette arête, la courbure totale est infinie. Il y a, toutefois, un cas *principal* d'exception; c'est celui où le plan tangent à la surface, le long de l'arête de rebroussement, est le plan osculateur à cette arête. Dans ce cas, la courbure totale a, en tout point de l'arête, une valeur finie et bien déterminée.

Parmi les surfaces les plus intéressantes qui présentent une arête de rebroussement sont les surfaces des centres de courbure des surfaces minima; les deux nappes de la surface qui aboutissent à cette arête sont applicables l'une sur l'autre. On sait, d'ailleurs, que ces surfaces sont applicables sur la surface de révolution engendrée par la développée d'une chaînette. Tout le long de l'arête de rebroussement, la courbure totale reste finie, de sorte que ces surfaces présentent le cas d'exception principal dont il vient d'être parlé, et le plan osculateur de l'arête de rebroussement est aussi le plan tangent de rebroussement.

## *Raffy*. — Sur la déformation des surfaces spirales. (145-166).

Pour reconnaître si un élément linéaire donné $ds^2 = \lambda\, dx\, dy$ convient à des surfaces spirales, on calculera la courbure totale $-2e^{\theta}$ (qui ne peut être constante sans être nulle), et l'on formera l'invariant $e^{-\theta}\,\Delta\theta$, en désignant, suivant l'usage, par $\Delta\theta$ le premier paramètre différentiel de la fonction $\theta$.

Si cet invariant ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\,\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\,\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-\theta}\,\Delta\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\,\Delta\theta)},$$

le symbole $\Delta_2$ désignant le second paramètre différentiel et le symbole $\Theta(e^{-\theta}\,\Delta\theta, \theta)$ représentant l'expression $-\dfrac{2i}{\lambda}\,\dfrac{\partial(e^{-\theta}\,\Delta\theta, \theta)}{\partial(x, y)}$. Chacun d'eux devra être fonction de $e^{-\theta}\,\Delta\theta$.

Si l'invariant $e^{-\theta}\,\Delta\theta$ est constant, on calculera l'invariant $e^{-\theta}\,\Delta_2\theta$. Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire convient à des spirales en même temps qu'à des surfaces de révolution. Si l'invariant $e^{-\theta}\,\Delta_2\theta$ n'est pas constant, on formera

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\,\Delta_2\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\,\Delta_2\theta)},$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta}\,\Delta_2\theta$.

## *Fabry*. — Sur les courbes algébriques à torsion constante. (177-196).

Une courbe à torsion constante $t$, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par les équations

$$x = t\int\frac{l\,dk - k\,dl}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$y = t\int\frac{h\,dl - l\,dh}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$z = t\int\frac{k\,dh - h\,dk}{h^2 + k^2 + l^2},$$

où $h$, $k$, $l$ sont des fonctions arbitraires d'une même variable.

Pour obtenir des courbes algébriques réelles à torsion constante, M. Fabry prend pour $h$, $k$, $l$ trois fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples d'un même angle $\theta$

$$h = a + b\cos\lambda\theta + c\sin\lambda\theta + d\cos\mu\theta + e\sin\mu\theta,$$
$$k = a' + b'\cos\lambda'\theta + c'\sin\lambda'\theta + d'\cos\mu'\theta + e'\sin\mu'\theta,$$
$$l = a'' + b''\cos\lambda''\theta + c''\sin\lambda''\theta + d''\cos\mu''\theta + e''\sin\mu''\theta,$$

et il détermine les coefficients $a$, $a'$, $a''$, $b$, ... de façon : 1° que $h^2+k^2+l^2$ soit constant; 2° que dans les trois expressions

$$l\frac{dk}{d\theta} - k\frac{dl}{d\theta}, \quad h\frac{dl}{d\theta} - l\frac{dh}{d\theta}, \quad k\frac{dh}{d\theta} - h\frac{dk}{d\theta},$$

exprimées en fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de $\theta$, les termes constants disparaissent. Les expressions de $x$, $y$, $z$ prennent alors les mêmes formes que $h$, $k$, $l$, et la courbe sera algébrique si les multiples de $\theta$ qui y entrent ont des rapports commensurables.

On obtient ainsi, pour le problème proposé, quatre espèces de solutions, dont la première a déjà été signalée par l'auteur (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 25 janvier 1892).

La méthode employée par M. Fabry donnerait un assez grand nombre de solutions imaginaires. L'auteur se borne à examiner le cas le plus simple, où les fonctions $h$, $k$, $l$ ne contiennent chacune qu'un angle, c'est-à-dire où les coefficients $d$, $e$, $d'$, $e'$, $d''$, $e''$ sont nuls. Il retrouve ainsi une cubique gauche rectifiable déjà connue.

L'auteur montre en terminant que la méthode indiquée par M. Lyon (*Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble*) peut aisément conduire aux courbes réelles obtenues ci-dessus.

*Vessiot.* — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires. (197-282).

L'auteur expose une théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires, qui est analogue à la théorie de Galois relative à la résolution des équations algébriques.

La théorie des groupes de transformations, due à M. Sophus Lie, sert de fondement à ce travail.

*Première Partie.* — On sait qu'un groupe continu fini de transformations à $n$ indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ et à $r$ paramètres (essentiels) $a_1, a_2, \ldots, a_r$, groupe défini par le système d'équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est entièrement déterminé par $r$ transformations infinitésimales.

Il y a d'autres groupes qui ne peuvent pas être définis par un seul système d'équations : ce sont les groupes *complexes.* Tout groupe complexe est défini par un groupe G engendré par des transformations infinitésimales et par un certain nombre de transformations finies laissant le groupe G invariant.

On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *invariant* dans G, si, quelle que soit la transformation T appartenant au groupe G, le groupe $T^{-1}HT$ est

identique au groupe H. Un groupe de transformations est *simple* s'il ne contient pas de sous-groupe invariant; dans le cas contraire, il est *composé*.

L'auteur se sert de ces notions pour démontrer un théorème fondamental sur les fonctions qu'on déduit d'une fonction donnée en y effectuant toutes les transformations d'un groupe. Voici en quoi consiste ce théorème :

« Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction quelconque des arbitraires $x_1, \ldots, x_n$. Si l'on y effectue la transformation générale

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un groupe à $r$ paramètres, on obtient une fonction

$$F(x'_1, \ldots, x'_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r)$$

des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ et des paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Or, pour que $\Phi$ dépende exactement de $r - \rho$ paramètres essentiels, il faut et il suffit que F admette précisément $\rho$ transformations infinitésimales du groupe, c'est-à-dire un sous-groupe à $\rho$ paramètres du groupe donné. »

*Deuxième Partie.* — La deuxième Partie contient l'exposition de la théorie générale de l'intégration des équations linéaires.

Le point de départ de l'auteur est l'étude des fonctions rationnelles des intégrales (formant un système fondamental) d'une équation linéaire et des dérivées de ces intégrales.

$n$ fonctions indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'une variable $t$ peuvent toujours être considérées comme un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire

$$f(x) = \frac{d^n x}{dt^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{dx}{dt} + \lambda_n x = 0.$$

A l'égard de cette équation, le groupe linéaire homogène général à $n$ indéterminées

$$(1) \qquad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

joue le même rôle que le groupe de substitutions de $n$ lettres dans la théorie des équations algébriques de degré $n$.

Ici s'introduisent immédiatement les fonctions rationnelles $R(x_1, x_2, \ldots)$ de $x_1, \ldots, x_n$, de leurs dérivées successives prises par rapport à $t$, et de la variable $t$. Les plus importantes de ces fonctions R sont les *fonctions invariantes*, celles qui admettent toutes les transformations du groupe (1). Elles jouent, dans la théorie des équations linéaires, le même rôle que les fonctions symétriques des racines dans la théorie des équations algébriques. Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des fonctions invariantes de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées, et toute fonction R s'exprime rationnellement au moyen de $t$, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et leurs dérivées.

La considération des fonctions rationnelles R conduit M. Vessiot à une théorie de la transformation des équations linéaires analogue à la théorie bien connue de la transformation des équations algébriques. Les transformations du groupe (1) qu'admet la fonction rationnelle $R(x_1, \ldots, x_n)$ forment elles-mêmes un *sous-*

*groupe* que l'auteur appelle le *groupe de la fonction* R. Ce groupe peut, d'ailleurs, se réduire à la seule transformation identique.

Voici maintenant comment s'introduit la transformation d'une équation linéaire. Soit toujours $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle des intégrales et de leurs dérivées et soit $n^2 - s$ le nombre des paramètres de son groupe, c'est-à-dire le nombre des transformations infinitésimales linéaires homogènes distinctes qu'elle admet. R considérée comme une fonction de $t$ est intégrale d'une équation différentielle algébrique d'ordre $s$ à coefficients rationnels en $t$, en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et leurs dérivées. Cette équation est une *transformée* de l'équation linéaire $f(x) = 0$.

Pour obtenir cette transformée, M. Vessiot indique deux procédés, dont l'un rappelle l'emploi des fonctions symétriques, et dont l'autre correspond à la méthode par élimination employée dans la transformation des équations algébriques. Ce dernier procédé permet de préciser la nature des intégrales de la transformée en montrant que ces intégrales sont précisément toutes les fonctions que l'on déduit de R en y remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par $n$ autres intégrales de l'équation linéaire donnée formant un système fondamental.

M. Vessiot est ainsi amené à s'occuper de l'expression des fonctions rationnelles des intégrales (et de leurs dérivées) les unes au moyen des autres. Il établit à ce sujet deux théorèmes dont voici le premier :

« Si une fonction rationnelle des intégrales $x_1, \ldots, x_n$ d'une équation linéaire d'ordre $n$ n'admet aucune transformation linéaire homogène en $x_1, \ldots, x_n$, ces intégrales s'expriment rationnellement au moyen de cette fonction, des coefficients de l'équation, de leurs dérivées et de la variable indépendante $t$. »

Telle est la fonction

$$V = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n,$$

où les $u$ sont des fonctions indéterminées de $t$. Elle dépend d'une équation linéaire d'ordre $n^2$ qui est analogue à la résolvante de Galois pour les équations algébriques.

Voici maintenant le second théorème annoncé :

« Si la fonction rationnelle $S(x_1, \ldots, x_n)$ admet toutes les transformations linéaires homogènes qui constituent le groupe de la fonction rationnelle $R(x_1, \ldots, x_n)$, elle s'exprime rationnellement au moyen de R, de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de leurs dérivées par rapport à $t$. » Cette proposition correspond au théorème de Lagrange sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation algébrique.

De là se déduisent et l'existence du *groupe de transformations* d'une équation linéaire donnée et les propriétés de ce groupe :

*A toute équation linéaire correspond un groupe* Γ *de transformations homogènes qui jouit des deux propriétés suivantes :*

1° *Toute fonction rationnelle des intégrales qui a une expression rationnelle admet toutes les transformations de ce groupe;*

2° *Toute fonction rationnelle des intégrales, invariante pour toutes les transformations de ce groupe, a une expression rationnelle.*

Cette proposition capitale, qui est le pivot de la théorie de M. Vessiot, est l'analogue du célèbre théorème de Galois. M. Picard en avait déjà énoncé et démontré la première partie.

Si le système fondamental d'intégrales n'est pas particularisé, il y a une infinité de groupes Γ appartenant au même *type*, c'est-à-dire qu'on déduit de l'un d'entre eux en effectuant, dans les deux membres des équations qui le définissent, la transformation linéaire homogène la plus générale. Les groupes à considérer sont nécessairement algébriques.

La détermination du groupe de transformations d'une équation linéaire donnée de l'ordre $n$ sera possible dès qu'on saura résoudre les trois problèmes suivants :

« 1° Déterminer les différents types de groupes linéaires homogènes algébriques à $n$ variables; 2° calculer, pour chacun des types trouvés, un invariant rationnel caractéristique, c'est-à-dire qui n'admette pas un groupe plus grand, et forme la transformée dont il dépend (la solution de ce deuxième problème ne dépend que d'éliminations algébriques); 3° reconnaître si une de ces transformées a une intégrale rationnelle en $t$; le type cherché sera, en effet, le plus petit groupe correspondant à une transformée possédant une intégrale rationnelle en $t$. »

La considération du groupe Γ est capitale, parce que l'intégration de l'équation donnée au moyen d'équations auxiliaires est liée à la réduction progressive de ce groupe. Sans insister sur la définition de ces équations auxiliaires et le moyen de les obtenir, signalons leur propriété principale; elle se trouve énoncée dans le théorème suivant qui fournit la méthode générale d'intégration des équations linéaires :

« Par l'interprétation de l'équation auxiliaire dont dépend une fonction rationnelle R des intégrales de la proposée et des dérivées de ces intégrales, le groupe de transformations de l'équation donnée se réduit à son plus grand sous-groupe invariant dont R admette toutes les transformations. »

Il reste à étudier dans quelles circonstances l'intégration d'une équation auxiliaire peut réduire le groupe de transformations données. C'est ce que fait l'auteur dans le cas particulier où l'équation auxiliaire est elle-même linéaire.

Il est bon de remarquer que la méthode de réduction à laquelle arrive M. Vessiot par la voie qu'il a suivie est la seule possible, si l'on s'astreint à n'employer comme équations auxiliaires que des équations jouissant de propriétés caractéristiques.

Elle donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures :

*Pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures, il faut et il suffit que le groupe de transformations de cette équation soit un groupe intégrable.* (Un groupe de transformations composé est dit *intégrable* s'il contient un sous-groupe invariant ayant un paramètre de moins que lui, celui-ci de même, et ainsi de suite.)

De là résulte cette remarquable conséquence que *l'équation différentielle linéaire* (*d'ordre* $n > 1$) *n'est pas en général intégrable par quadratures.*

Lorsque exceptionnellement il en est ainsi, la dérivée logarithmique de l'une des intégrales s'exprime rationnellement. De cette propriété l'auteur tire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadratures.

*Troisième Partie.* — La troisième et dernière Partie est consacrée aux applications.

M. Vessiot commence par approfondir, autant qu'il est possible de le faire en restant dans les généralités, le triple problème énoncé plus haut et qui se pose à propos de l'intégration d'une équation linéaire. Il montre comment une des parties de ce problème est simplifiée par la considération des *groupes dualistiques*. On sait que M. Lie appelle ainsi deux groupes qui se déduisent l'un de l'autre par la transformation de contact homogène, définie par la relation

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n + 1 = 0.$$

L'auteur fait ressortir l'importance, au point de vue de sa théorie, de l'adjointe de Lagrange de l'équation linéaire proposée. Cette importance tient à ce fait que les groupes de transformations de deux équations adjointes sont deux groupes dualistiques.

Enfin, il étudie complètement le cas des équations linéaires du second et du troisième ordre. L'application à ces deux cas particuliers de sa théorie générale lui permet de retrouver facilement tous les résultats connus et l'amène en outre à cette conclusion qu'il ne peut pas se présenter dans l'intégration de ces équations de particularités intéressantes autres que celles qui ont déjà été signalées, notamment par Laguerre et Halphen.

*Beaupain.* — Sur l'intégrale eulérienne de première espèce. (309-328).

Ce travail a pour objet principal le développement en série convergente des fonctions $B(a, x)$ et $\frac{1}{B(a, x)}$. Le point de départ de l'auteur est le théorème suivant :

« Si $z$ est l'affixe d'un point du plan situé à droite d'une parallèle à l'axe des $y$ menée à la distance $-1$ de l'origine, la série

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{1}{q - z - 2k},$$

où $\binom{z}{k}$ désigne le coefficient binomial

$$\frac{z(z-1)\ldots(z-k+1)}{1.2\ldots k},$$

est absolument convergente dans cet espace, $q$ étant une quantité réelle ou imaginaire quelconque. »

D'où résulte ce corollaire :

« $\theta$ étant un angle réel arbitraire, les séries

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{\cos(q - z - 2k)\theta}{q - z - 2k},$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{\sin(q - z - 2k)\theta}{q - z - 2k},$$

sont absolument convergentes dans tout l'espace à droite de la parallèle à l'axe des $y$ menée à la distance $-1$. »

C'est de là que l'auteur déduit les développements suivants pour l'intégrale eulérienne de première espèce et pour son inverse.

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} \\ &\quad = \frac{(a+x)(a+x+1)\ldots(a+x+m)}{a(a+1)\ldots(a+m)} \frac{(a+2x+m)\sin(a+x)\pi}{\sin(a+2x+m)\theta \sin a\pi} \\ &\quad\quad \times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+m}{k} \frac{\sin(2k-a-m)\theta}{(k+x)(k-a-x-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x)} \\ &\quad = -\frac{a(a+1)\ldots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\ldots(a+x+m)} \frac{x(x-a-m)\sin\pi x \sin a\pi}{\pi\sin(a+x)\pi \sin(x-a-m)\theta} \\ &\quad\quad \times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a_1+x+m}{k} \frac{\sin(2k-a-x-m)\theta}{(k-x)(k-a-m)}. \end{aligned} \right.$$

Ces développements convergent pour les valeurs de $\theta$ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; le nombre $m$ est un entier indéterminé, mais tel cependant que dans la seconde formule $a+x+m$ représente l'affixe d'un point situé à droite de la parallèle à l'axe des $y$ menée à la distance $-1$, et que dans la première $a+m$ ait sa partie réelle supérieure à $-1$.

M. Beaupain fait connaître d'autres développements analogues des fonctions $B(a,x)$ et $\frac{1}{B(a,x)}$, qui conduisent à des expressions plus ou moins intéressantes de ces fonctions lorsqu'on y particularise d'une manière convenable la valeur de $\theta$.

Il en tire divers modes des développements des fonctions $\frac{\pi\cos(2x-m)\theta}{\sin\pi x}$, $\frac{\pi\sin(2x-m)\theta}{\sin\pi x}$, où $m$ est un nombre entier.

Il montre en terminant comment la formule (2) peut servir à sommer à l'aide de symboles élémentaires une infinité de séries. Si, en effet, on pose $a=\alpha+i\beta$, $x=\alpha-i\beta$, $m=0$, la formule en question devient

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha+i\beta)\Gamma(\alpha-i\beta)} \\ &\quad = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)2i\beta\sin\pi(\alpha+i\beta)\sin\pi(\alpha-i\beta)}{2\alpha\pi\sin 2\alpha\pi \sin 2i\beta\theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{2\alpha}{k} \frac{\sin 2(k-\alpha)\theta}{(k-\alpha)^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Elle fournit la somme d'une infinité de séries trigonométriques si $\alpha=n$ ou si $\alpha=n+\frac{1}{2}$, $n$ étant un entier, positif ou nul.

Par exemple, si l'on y fait $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$, elle donne

$$(3)\quad \pi\theta+2\theta\cos\theta = 5\sin\theta + \frac{1}{1.2}\frac{\sin 3\theta}{3^2} - \frac{1}{2.3}\frac{1}{5^2} + \frac{1}{3.4}\frac{\sin 7\theta}{7^2} - \ldots,$$

d'où, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{2} = 5 - \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2.3}\,\frac{1}{5^2} - \frac{1}{3.4}\,\frac{1}{7^2}.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres de l'égalité (3) et qu'on fasse ensuite $\theta = 0$, on obtient cette valeur assez remarquable de $\pi$

$$\pi = 3 + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.7} - \frac{1}{4.5.9} + \ldots.$$

## *Elliot.* — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. (329-374).

M. Elliot étudie des transformations très générales qui peuvent être utiles pour l'intégration des équations du premier ordre et du second degré.

Soit

$$(1) \qquad ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0$$

une telle équation, où $a$, $b$, ..., $f$ désignent des fonctions quelconques des deux variables $x$ et $y$.

Cette équation a la propriété de conserver la même forme quand on fait un changement quelconque des variables indépendantes

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y),$$

et un changement de fonction

$$z = z_1 + t,$$

$t$ désignant une fonction quelconque de $x$ et $y$.

Certaines fonctions des coefficients $a$, $b$, ..., $f$ présentent le caractère d'invariants par rapport aux transformations qui viennent d'être définies.

Il y a d'abord la fonction invariante $b^2 - ac$. Les équations (1) où les termes du second degré forment un carré parfait constituent une classe distincte, indépendante des changements de la fonction et des variables.

Puis il y a l'invariant

$$J = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

La condition $J = 0$ est encore indépendante d'un changement de variables et de fonctions. Il y a donc une seconde classe d'équations qui ont la propriété invariante de se décomposer en deux équations linéaires.

Une troisième classe est constituée par les équations qu'on rencontre dans la recherche des lignes géodésiques et qui n'ont pas de termes du premier degré en $p$ et $q$.

Laissant de côté toutes ces classes particulières, l'auteur se propose ensuite de simplifier l'équation générale. On peut profiter des deux fonctions arbitraires qui entrent dans le changement de variables pour faire disparaître les coefficients des termes carrés par rapport aux dérivées partielles. Si l'on sait

intégrer les deux équations linéaires

$$cq + (b - \sqrt{b^2 - ac})p = 0$$
$$cq + (b + \sqrt{b^2 - ac})p = 0,$$

on prendra pour $\Phi$ une solution de la première, pour $\Psi$ une solution de la seconde, et l'équation (1) se trouvera ramenée, par le changement de variables

$$X = \Phi(x, y), \qquad Y = \Psi(x, y),$$

à la forme

$$(2) \qquad 2B_1P_1Q_1 + 2D_1P_1 + 2E_1Q_1 + F_1 = 0.$$

Si maintenant on effectue sur l'équation (2) le changement de fonction

$$z = Z + T,$$

et qu'on détermine T par la condition

$$\frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{E_1}{B_1},$$

l'équation transformée prend la forme *canonique*

$$(3) \qquad PQ = MP + N.$$

M. Elliot démontre l'invariabilité de cette réduction par rapport à un changement quelconque de variables et de fonction

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y), \qquad z = z' + t,$$

auquel on aurait d'abord soumis l'équation proposée (1). Le résultat de cette opération préalable n'a aucune influence sur les coefficients de l'équation canonique correspondante.

La réduction à la forme canonique est impossible dans le cas spécial où $b^2 - ac$ est nul, mais elle peut encore se faire quand l'équation appartient à la catégorie des équations géodésiques.

Voici maintenant comment ce mode de réduction peut être appliqué à la recherche de certains cas d'intégrabilité.

Étant donnée une fonction $z$ de $x$ et $y$ définie par une équation telle que

$$(4) \qquad F(x, y, z, C) = 0,$$

qui contient une constante C, si l'on forme les équations qui fournissent les valeurs des dérivées premières, on aura un système de trois équations entre lesquelles on pourra éliminer $z$ et C. Le résultat de l'élimination n'est pas altéré si l'on remplace $z$ par $z + C_1$, en désignant par $C_1$ une nouvelle constante. L'équation

$$F(x, y, z + C_1, C) = 0$$

définira donc une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles obtenue par l'élimination. Quel que soit le degré de l'équation obtenue, ce degré n'est pas altéré par un changement de fonction tel que $z = z_1 + t$.

M. Elliot indique quelques équations telles que (4) qui donnent naissance à des équations aux dérivées partielles et pour lesquelles on connaîtra par conséquent une intégrale complète.

L'un des exemples qu'il indique l'amène à s'occuper du système

$$\alpha \frac{\lambda}{\frac{d\lambda}{dX}} + \beta \frac{\mu}{\frac{d\mu}{dX}} + \gamma \frac{\nu}{\frac{d\nu}{dX}} = 0,$$

$$\alpha \frac{\lambda}{\frac{d\lambda}{dX}} + \beta \frac{\mu}{\frac{d\mu}{dY}} + \gamma \frac{\nu}{\frac{d\nu}{dY}} = 0,$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois constantes. L'intégration de ce système revient à trouver le changement de variable qui fait disparaître les carrés des dérivées partielles dans une équation de la forme

$$nxp^2 + [(n+1)x - (m+1)y]pq - myq^2 - nxp + myq = 0,$$

où $m$ et $n$ sont des constantes : le problème peut se résoudre par des quadratures.

La dernière Partie du Mémoire est consacrée à l'étude des équations (1) qui admettent des intégrales du premier ou du second degré.

## Supplément.

### *Padé.* — Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. (3-93).

L'objet principal de ce travail est l'introduction de la forme de fraction continue algébrique qui joue un rôle analogue à celui des séries entières dans la théorie des séries : l'auteur donne à ce type particulier de fractions le nom de *fraction continue simple*.

Le Mémoire de M. Padé se compose de deux parties :

Dans la première, il n'est pas question des fractions continues; M. Padé y étudie l'ensemble des fractions rationnelles approchées auxquelles donne naissance une série entière, fractions qu'il dispose dans un Tableau qui joue un grand rôle dans l'exposition de sa théorie.

Il est important de savoir obtenir une fonction qui représente une fonction donnée avec une approximation d'ordre fixé à l'avance. Le développement des fonctions en séries entières offre l'exemple d'une telle recherche; une série entière, quand elle est convergente, est une expression analytique qui met en évidence une suite de polynomes de plus en plus approchés de la fonction qu'elle définit. Mais la représentation d'une fonction donnée par un polynome n'est évidemment qu'un cas particulier de la représentation par une fonction algébrique et en particulier par une fraction rationnelle, seul cas auquel s'attache M. Padé.

L'auteur démontre deux théorèmes fondamentaux sur l'expression approchée, au moyen d'une fraction rationnelle, d'une fonction développable en série entière pour les valeurs infiniment petites de la variable. Voici le premier :

« Parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à $p$ pour le numérateur, à $q$ pour le dénominateur, $p$

et $q$ étant deux nombres, égaux ou inégaux, pris dans la suite 0, 1, 2, 3, ..., il y en a une $\frac{u}{v}$ qui fournit une approximation dont l'ordre est supérieur à celui de l'approximation fournie par une quelconque des autres fractions. »

Ce théorème correspond à cette proposition bien connue dans la théorie des polynomes : « Il y a un polynome de degré $n$ au plus, et un seul, qui, dans le voisinage de la valeur zéro de la variable, puisse représenter une fonction avec une erreur infiniment petite d'ordre au moins égal à $n+1$ ».

Le second théorème établi par M. Padé serait assez difficile à énoncer si l'on ne faisait intervenir la disposition du Tableau dont il a été question; bornons-nous à dire qu'il correspond à cette autre proposition de la théorie des polynomes : « Les approximations obtenues avec les polynomes approchés qui correspondent à des valeurs croissantes du degré $n$ ne sauraient diminuer; elles conservent la même valeur ou bien elles vont en croissant ».

Dans la deuxième Partie, l'auteur étudie les rapports qui existent entre la théorie de l'approximation par les fractions rationnelles et la théorie des fractions continues. Ces rapports ont été pour la première fois remarqués par Lagrange. Euler, Lagrange, Gauss ont donné les premiers exemples de représentation d'une fonction par les fractions continues. Tous les développements auxquels on a eu affaire jusqu'ici se ramènent (si l'on fait abstraction des irrégularités du début) aux quatre formes différentes que voici :

$$\mathcal{A} = 1 + ax + \cfrac{\alpha x}{1 + bx + \cfrac{\beta x}{1 + cx + \cfrac{\gamma x}{1 + \ldots}}} \qquad \mathcal{B} = 1 + \cfrac{ax}{1 + \cfrac{\beta x^2}{1 + \cfrac{\gamma x}{1 + \ldots}}}$$

$$\mathcal{C} = 1 + ax + \cfrac{\alpha x^2}{1 + bx + \cfrac{\beta x^2}{1 + cx + \cfrac{\gamma x^2}{1 + \ldots}}} \qquad [\mathcal{C}] = 1 + \cfrac{ax^2}{1 + \cfrac{\beta x^2}{1 + \cfrac{\gamma x}{1 + \ldots}}}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ designant des constantes.

Sont-ce là les seules formes qu'il y ait lieu de considérer et pour une fonction quelconque peuvent-elles toutes quatre être obtenues? Pour une fonction donnée combien y a-t-il de fractions ayant une forme donnée? Telles sont les questions que se pose M. Padé.

Il montre que les irrégularités qu'on observe au début des développements sont soumis à une loi fort simple au fond; que, dans le cas général, trois types de fractions régulières, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, sont seuls à considérer; que la forme $[\mathcal{C}]$ n'est qu'un cas d'exception et doit être regardée comme rentrant dans le type général $\mathcal{C}$; que, dans le cas général, il existe une infinité de développements de chacune des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et aucun des autres formes.

Tous ces résultats sont obtenus comme cas particuliers de la méthode générale indiquée par l'auteur pour obtenir le développement d'une fonction quelconque en fraction continue non plus *régulière,* mais seulement *simple.* L'auteur entend par là une fraction où les numérateurs partiels sont des monomes de degré entier positif et les dénominateurs partiels des polynomes de degré quelconque ayant un terme constant différent de zéro. Une fraction continue *régulière* est une fraction simple dans laquelle (sauf des irrégularités possibles

au début) tous les numérateurs partiels ont le même degré ainsi que tous les dénominateurs partiels.

Ce sont ces fractions simples qui, dans la théorie des fractions continues, jouent un rôle analogue à celui des séries entières dans la théorie générale des séries. Comme les séries entières, elles possèdent un cercle de convergence. A l'intérieur de ce cercle, la fraction continue simple est convergente, sauf peut-être en chaque point $x$ tel que, en supprimant de la suite formée par les valeurs absolues en ce point des dénominateurs des réduites successives un nombre limité ou illimité de termes, on puisse obtenir une suite illimitée ayant zéro pour limite. A l'intérieur du cercle, la fraction définit une fonction analytique continue de $x$.

Une fraction continue simple est divergente à l'extérieur de son cercle de convergence, sauf peut-être en chaque point $x$ tel que, en procédant comme il vient d'être dit, on puisse obtenir une suite illimitée ayant l'infini pour limite.

En ce qui concerne la formation et les propriétés des réduites successives d'une fraction continue simple ainsi que la représentation approchée d'une fraction au moyen de ces réduites, l'auteur donne un grand nombre de résultats qu'on ne pourrait énoncer avec quelque précision qu'en faisant intervenir le Tableau qui joue un rôle si important dans toute cette théorie. Bornons-nous à citer la proposition suivante :

« Les réduites d'une fraction continue simple sont des fractions rationnelles irréductibles toutes différentes entre elles ».

---

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Treizième année. 1888-1889. Bruxelles. F. Hayez. 1889 (A, Ire Partie; B, 2e Partie) [1].

*Mansion* (*P.*). — Sur l'extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations algébriques. (A, 42-45).

Démonstration du théorème suivant, dû probablement à M. Félix Lucas :

« Si l'on divise, par une droite, le plan en deux régions dont l'une contient tous les points racines d'une équation algébrique, cette même région contient aussi tous les points racines de l'équation dérivée. »

Le procédé de démonstration consiste à représenter géométriquement la dérivée logarithmique du premier membre de l'équation donnée.

*Mansion* (*P.*). — 1. Sur la fonction $p(u)$. 2. Sur une interprétation géométrique de la première intégrale elliptique. (A, 46-48).

La fonction rationnelle la plus simple de $\mathrm{sn}^2(u, k)$ qui, par le changement

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XVI$_2$, p. 49-52.

de $u$ en $Ui$, garde au signe près la même forme, est la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass. L'interprétation géométrique de $F(k, \varphi)$ donnée par Halphen est contenue dans celle que Jacobi a donnée pour le théorème de l'addition.

*Mansion* (*P.*). — Sur l'emploi du signe E dans la théorie des fonctions. (A, 55-57).

Le symbole $E(x)$, qui désigne le plus grand entier contenu dans $x$, peut servir à exprimer analytiquement la valeur de fonctions discontinues. Ainsi

$$xy : \left[x^2 + y^2 + E\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)\right]$$

est une fonction continue de $x$, même si $y$ est nul, une fonction continue de $y$, même si $x$ est nul, mais elle est discontinue considérée comme fonction de $x$ et de $y$.

*Mansion* (*P.*). — Sur la Géométrie non euclidienne. (A, 57-61).

Remarques de Reid et de Ampère sur le postulat de la parallèle unique, de Fourier sur les définitions de la droite et du plan. Indication de la manière dont M. de Tilly caractérise un système de géométrie, au moyen d'une relation entre les dix distances de cinq points (M. Mansion a reconnu, depuis lors, que M. Schering a exprimé une idée équivalente dans les *Nachrichten* de Göttingen, en 1870, puis en 1873).

*Mansion* (*P.*). — Sur une formule de M. Darboux. (B, 108-115).

Démonstration, au moyen du théorème de Taylor, de la formule

$$\begin{aligned} Fz - Fa = \frac{1}{C_{2n}^n} \Big\{ & (z-a)\, C_{2n-1}^n (F'a + F'z) \\ & + \frac{(z-a)^2}{1.2} C_{2n-1}^n (F''a - F''z) \\ & + \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n} C_n^n \left[F^n a - (-1)^n F^n z\right] \Big\} \\ & + \int_0^z \frac{(z-t)^n (a-t)^n}{1.2.3\ldots 2n} F^{2n+1} t \, dt, \end{aligned}$$

due à M. Darboux [*Journal de Liouville* (3), t. II, 296-297].

*De Salvert.* — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Première Partie : Préliminaires et cas particuliers remarquables. (B, 117-260).

*Mansion* (*P.*). — Rapport sur les Chapitres I et II de ce Mémoire. (A, 50-55).

Dans le Chapitre I, l'auteur établit : 1° les propriétés fondamentales des in-

variants différentiels de Lamé

$$\sqrt{\left(\frac{d\omega^2}{dx^2}+\frac{d\omega^2}{dy^2}+\frac{d\omega^2}{dz^2}\right)},\quad \frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dy^2}+\frac{d^2\omega}{dz^2},$$

exprimés en coordonnées curvilignes; 2° les équations du mouvement de la chaleur, d'abord en coordonnées rectilignes, puis en coordonnées curvilignes, soit par transformation de coordonnées, soit directement.

Le second Chapitre, ainsi que l'appendice, est consacré principalement à la recherche des familles isothermes de surfaces du premier et du second ordre, en partant de la remarque suivante : On peut ramener la recherche des solutions algébriques de forme donnée d'une certaine équation aux dérivées partielles à celle des solutions d'équations différentielles ordinaires, que l'on obtient en exprimant que l'équation aux dérivées partielles est vérifiée quelle que soit la valeur des variables. L'auteur parvient à prouver rigoureusement qu'il n'existe pas d'autres familles de surfaces isothermes que celles qui ont été découvertes par Lamé et complète divers théorèmes de ce géomètre.

## *Gilbert (Ph.).* — Recherches sur les accélérations en général. (B, 261-315).

Étude des accélérations du premier ordre dans le mouvement d'un corps solide où l'auteur, par un habile emploi de l'analyse et en même temps des représentations géométriques, arrive simplement à un grand nombre de théorèmes anciens ou nouveaux.

*Sommaire.* — 1. Accélération angulaire. 2. Propriétés générales des accélérations d'un point d'un solide dont un des points est fixe. 3. Groupement et construction géométrique des accélérations dans un solide qui a un point fixe. 4. Composante tangentielle et normale de l'accélération. 5. Accélération des points d'un solide libre. 6. Étude géométrique des accélérations des points d'un solide libre.

Voici les théorèmes les plus remarquables auxquels est arrivé M. Gilbert dans ce travail :

« 1. Dans le mouvement d'un solide libre autour d'un point fixe, à chaque instant : 1° le produit géométrique de la résultante des forces motrices par l'axe instantané de rotation, et le produit géométrique de l'accélération angulaire par la quantité totale de mouvement donnent une somme égale à zéro; 2° le produit géométrique de l'axe instantané par l'axe du couple moteur est égal au produit géométrique de l'accélération angulaire par l'axe du moment des quantités de mouvement, le centre de réduction étant au point fixe. »

« 2. Si le solide est libre, la somme indiquée ci-dessous sous le 1° est égale à la masse du corps multipliée par la dérivée, par rapport au temps, du produit des vitesses de rotation et de glissement. Le 2° subsiste, si le centre de réduction est au centre de gravité du corps; ou au point central de l'axe de Mozzi, le centre de gravité étant dans le plan principal (plan mené par l'axe instantané et l'accélération angulaire). »

« 3. Les *directions principales* étant : 1° l'axe instantané OZ; 2° la projection OX de l'accélération angulaire sur le plan normal à OZ; 3° la droite OY

perpendiculaire à OX, OZ, ces directions forment un système rectangulaire. Soient $j_x$, $j_y$, $j_z$ les composantes de l'accélération d'un point quelconque M du corps parallèlement à OX, OY, OZ. »

Les directions OX′ de l'accélération angulaire, OY′ de l'axe instantané, OZ′ de la droite, lieu des points dont l'accélération est parallèle à l'axe instantané, forment un système de diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$ de l'ellipsoïde d'égale accélération (W. Schell). Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées de M par rapport à OX′, OY′, OZ′. On a les relations

$$j_x = -\frac{x'}{a'}, \qquad j_y = -\frac{y'}{b'}, \qquad j_z = -\frac{z'}{c'}.$$

On en déduit une construction simple de l'accélération du point M.

« 4. Soient $\omega$ la vitesse angulaire de la rotation instantanée, $\lambda_N$ la composante de l'accélération angulaire normale à l'axe instantané. Construisons un cylindre tangent au plan principal le long de l'axe, et ayant pour section droite un cercle de diamètre $\lambda_N$. Le rayon mené du point fixe O à un point quelconque M du corps perce ce cylindre en un point E. On porte à partir de E, sur la génératrice du cylindre dans le sens positif de la rotation, une longueur constante $EF = \omega^2$. La droite OF est l'axe de courbure pour la trajectoire d'un point quelconque M de OE; MC perpendiculaire sur OF est la normale principale, C le centre de courbure de cette trajectoire. »

---

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 59e année, 3e série (¹).

Tome XVII : janvier à juin 1889.

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Sur les propriétés physiques de la couche superficielle libre d'un liquide et de la couche de contact d'un liquide et d'un solide. (151-167, 518-537).

*Conclusions.* — Les théories capillaires de Laplace et de Poisson sont en contradiction avec de nombreux résultats de l'expérience; la théorie de Gauss et celle de la tension superficielle sont étroitement liées entre elles, et s'impliquent réciproquement. La force, soit contractile, soit extensive, de la surface de contact d'un solide et d'un liquide dont l'existence peut se déduire de la théorie de Gauss, découle également de l'application du principe de l'attraction moléculaire et se trouve pleinement confirmée par l'expérience.

*De Heen* (*P.*). — Détermination de la formule théorique exprimant les variations de volume que le mercure éprouve avec la chaleur. (168-173).

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. $XVI_2$, p. 45-48.

*Lagrange* (*Ch.*). — Note sur une théorie de la variation séculaire du magnétisme terrestre déduite de données expérimentales. (173-207).

Exposé préliminaire des déductions qui ont conduit l'auteur à une hypothèse nouvelle : le magnétisme séculaire de la Terre provient d'un potentiel magnétique intérieur et non extérieur à la surface terrestre; le globe terrestre doit être regardé comme un aimant ou un solénoïde en rotation, etc.

*Deruyts* (*F.*). — Sur la représentation de l'homographie de seconde espèce sur la cubique gauche. (312-329).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (306-309).

Le but de l'auteur est de résoudre les problèmes fondamentaux relatifs à l'homographie du troisième ordre et de seconde espèce. L'auteur y parvient, par des réductions successives de la question à traiter, en prouvant que l'homographie $H_3^3$ la plus générale, dont les trois séries d'éléments sont figurées sur un support unique, peut être regardée comme résultant de trois involutions $I_2^3$ marquées sur ce même support.

*Servais* (*Cl.*). — Sur les ombilics des quadriques. (366-384).

*Mansion* (*P.*). — Rapport. (353-356).

Applications intéressantes et nouvelles de la théorie des transformations birationnelles, sous forme géométrique le plus souvent, à la construction des quadriques, quand on en connaît un ombilic et d'autres éléments en nombre suffisant.

*Deruyts* (*F.*). — Sur une propriété commune aux courbes normales des espaces linéaires. (545-554).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (496-497).

Extension à un espace à $n$ dimensions des propriétés connues dans l'espace à trois dimensions, par exemple, de celle-ci : « Les bisécantes d'une cubique gauche passant par un même point de celle-ci forment un cône du second degré. »

*Le Paige* (*C.*). — Rapports sur trois Mémoires de M. Deruyts. (493-495).

Ces Mémoires, qui ont été publiés dans le Tome XLI des *Mémoires couronnés* et *Mémoires des Savants étrangers* de l'Académie de Belgique, forment la suite des recherches de l'auteur sur les semi-invariants. M. Deruyts, dit M. Le Paige, considère des fonctions nouvelles auxquelles il donne le nom de *semi-invariants de première espèce*, et les caractérise, soit par leur mode même de formation, soit par les équations aux dérivées partielles auxquelles elles satisfont.

Il fait ensuite connaître leur expression symbolique et la manière de les déduire d'un certain semi-invariant de première espèce. Il définit ensuite d'autres expressions qu'il appelle des *covariants identiques de seconde espèce* et démontre le théorème suivant :

« Tout convariant à un nombre quelconque de séries de variables est une somme de produits de covariants identiques, par des polaires de covariants primaires. »

La détermination des covariants primaires forme l'objet du troisième Mémoire. L'auteur parvient à démontrer le théorème vraiment fondamental :

« Tout covariant primaire de degré $t$, par rapport à une forme $f$, est une somme de covariants dérivés de la forme $f$ et de covariants primaires $c$, de degré $t-1$ par rapport à la forme $f$. »

Ce théorème permet de construire, de proche en proche, tous les covariants primaires d'un système de forme à $n$ variables.

Tome XVIII (juillet à décembre 1889).

*Folie* (*F*.). — Rapport sur un Mémoire de M. Ch. Lagrange. (7-9).

L'idée fondamentale de ce Mémoire est celle-ci : La chaleur peut être considérée, non comme un mouvement de la matière, mais comme une force proprement dite, fonction de la distance des éléments et de leur température absolue. D'après l'auteur, cette force émane de la surface des atomes et son intensité est mesurée par la température absolue.

*Mansion* (*P*.). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Les fonctions pseudo- et hyperbernoulliennes et leurs premières applications*, par M. G. de Longchamps. (9-14).

*Catalan* (*E*.). — Remarques sur un Mémoire de M. G. de Longchamps. (41-49).

Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, ... une suite indéfinie de coefficients liés entre eux, à partir de l'un d'eux, par une loi de récurrence

$$(1)\qquad A_n\varphi(n) = A_1A_{n-1} + A_2A_{n-2} + \ldots + A_{n-2}A_2 + A_{n-1}A_1 = (A)_n.$$

Dans la première Partie de son Mémoire, l'auteur montre comment, au moyen de l'algorithme *isobare* (1), on peut exprimer la loi de récurrence d'un grand nombre de séries célèbres, celles qui représentent $e^x$, $\cos x$, $\sin x$; même en généralisant la loi (1), il parvient au développement de $\operatorname{sn} x$.

Dans la deuxième Partie, il trouve les développements de $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{tangh} x$, $x\cot x$, $x\coth x$, $x\cos x$, $\operatorname{séc} x$, appelées par lui *fonctions pseudo-bernoulliennes*.

Dans la troisième Partie, il parvient à intégrer, par une série, l'équation de

Riccati, $y' + Ay^2 = Bx^m$, en partant des relations

$$(an+b)\alpha_n = (\alpha)_n, \qquad y = \alpha_1 x^{a+b} + \alpha_2 x^{2a+b} + \alpha_3 x^{3a+b} + \ldots.$$

La Note de M. Catalan contient quelques remarques critiques sur divers points du Mémoire de M. de Longchamps.

*Le Paige* (*C.*), *Catalan* (*E.*), *Mansion* (*P.*). — Rapports sur le Mémoire intitulé : *Sur les projections et contre-projections d'un triangle donné,* par M. Neuberg. (15-20).

Le Mémoire de M. Neuberg renferme d'innombrables propriétés qu'il est difficile de résumer et qui sont relatives : 1° au problème de Simon Lhuilier :

« Trouver un plan sur lequel un triangle donné A se projette suivant un triangle B, semblable à un triangle donné C; trouver un second plan sur lequel la contre-projection D de A est semblable à C. »

2° A la théorie de trois figures directement semblables.

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Sur un genre particulier d'expériences capillaires. (64-80).

*De Heen* (*P.*). — Détermination à l'aide d'une méthode nouvelle, du coefficient de conductibilité calorifique de quelques liquides homologues organiques. (192-208).

*De Heen* (*P.*). — Détermination de la loi générale qui régit la dilatabilité des liquides en partant de la considération des mouvements moléculaires. (208-215).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Détermination des fonctions invariantes de formes à plusieurs séries de variables,* par M. Deruyts. (377-379).

Le résultat principal du travail de M. J. Deruyts est celui-ci : Il est possible d'obtenir, par un procédé uniforme, tous les covariants de formes à un nombre quelconque de séries de variables.

*Catalan* (*E.*). — Sur une formule de M. Bachwitz. (666-669).

*Catalan* (*E.*). — Sur une nouvelle formule de M. Bachwitz. (770).

1° Cas particulier de la transformation d'Euler

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots = u_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right) u_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \Delta u_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \Delta^2 u_1 + \ldots;$$

2° Pour des valeurs considérables de $x$ et de $y$,

$$\log(1+x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{y^n - (y-x)^n}{n(1+y)^n}.$$

*Ronkar* (*E.*). — Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestres, en vertu du frottement intérieur. (798-813).

*Folie* (*F.*). — Rapport. (768-769).

M. Ronkar a démontré que, dans le mouvement relatif d'un sphéroïde plus ou moins liquide à sa surface et d'une écorce solide qui la recouvre, on a les deux théorèmes suivants :

« 1° Dans les mouvements à très courte période, le mouvement de l'écorce est indépendant de celui du noyau. »

« 2° Dans les mouvements à très longue période, l'écorce et le noyau se meuvent comme s'ils étaient solidaires. »

Dans la Note actuelle, l'auteur montre qu'il est facile d'assigner un coefficient de frottement qui permet d'expliquer la nutation diurne et la précession; pour la nutation annuelle, il n'arrive pas à des résultats aussi nets.

---

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Tome XLVII, 1889 (¹).

*Catalan* (*E.*). — Seconde Note sur les fonctions $X_n$. (12 pages).

*Catalan* (*E.*). — Nouvelles propriétés des fonctions $X_n$. (12 pages).

*Catalan* (*E.*). — Nouvelles propriétés des fonctions $X_n$ (supplément). (24 pages).

Ces Mémoires, peu susceptibles d'analyse, renferment d'innombrables relations anciennes ou nouvelles sur les fonctions $X_n$. Beaucoup sont obtenues au moyen de la formule

$$\pi X_n = 2^n \int_0^{\pi} \sin^n \varphi \left(x \sin\varphi - \sqrt{-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi$$

probablement nouvelle.

(¹) Voir *Bulletin*, $XIII_2$, p. 28-29.

*Catalan* (*E.*). — Remarques sur certaines intégrales définies. (8 pages).

Sur les intégrales frullaniennes. Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique,* (3), t. XIII, p. 474-477.

*Catalan* (*E.*). — Sur un tableau numérique et sur son application à certaines transcendantes. (26 pages).

Sur des séries doubles. Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique,* (3), t. XIII, p. 477-481.

---

MÉMOIRES couronnés et Mémoires des Savants étrangers publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique [1].

Tome L; 1890.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques.

Tome LI; 1889.

*Ronkar* (*E.*). — Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système. Application au sphéroïde terrestre (55 pages).

Ce Mémoire a été analysé, en 1888, dans le Tome XV, p. 489-500, du *Bulletin de l'Académie de Belgique.*

*Beaupain* (*J.*). — Mémoire sur quelques formules de Calcul intégral. (60 pages).

*Beaupain* (*J.*). — Nouvelles recherches sur quelques formules de Calcul intégral. (40 pages).

Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique,* t. XVI, p. 15-19, 843-549; 1888.

*Derüyts* (*J.*). — Sur la généralisation des semi-invariants. (20 pages).

(1) Voir *Bulletin,* $XIII_2$, p. 27-28.

*Deruyts* (*J.*). — Sur la transformation linéaire de la théorie des covariants (22 pages).

*Deruyts* (*J.*). — Sur la loi de formation des fonctions invariantes. (16 pages).

Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique,* (3), t. XVII, p. 493-395, une analyse de ces Mémoires par M. Le Paige. M. J. Deruyts a réuni en 1891, l'ensemble de ses recherches en un Ouvrage spécial dont il sera rendu compte ultérieurement.

Ouvrages séparés.

*Gilbert* (*Ph.*). — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à deux problèmes de mouvement relatif. Paris, Gauthier-Villars, in-8, 200 pages.

Nouvelle édition d'un Mémoire publié dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. VI, p. 270-374; t. VII, p. 11-110. L'introduction a reçu quelques développements dans la nouvelle édition.

*Houzeau* et *Lancaster*. — Bibliographie générale de l'Astronomie. T. I, 2e Partie. Paris, Gauthier-Villars.

La première Partie du Tome I a paru en 1882, le tome II en 1885. La seconde Partie du Tome I contient : biographies, commerce épistolaire, ouvrages didactiques, Astronomie sphérique. Astronomie théorique (cxx-765 pages avec portrait de Houzeau). *Voir* une notice sur cette seconde Partie dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique,* t. XVIII, p. 516-517.

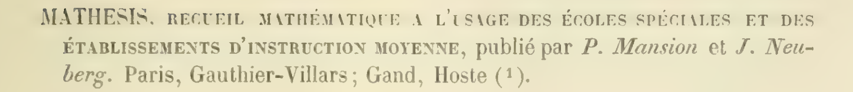
*Massau* (*J.*). — Appendice au Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Gand, Hoste. In-4° de 264 pages avec 2 planches.

Suite d'un Ouvrage analysé antérieurement dans le *Bulletin*. I. Sur la construction des fonctions entières données par un nombre suffisant de valeurs et de valeurs de leurs dérivées. II. Théorème sur l'influence d'une charge mobile. Charge quelconque. Charge parabolique; train de charges uniformes; train de forces isolées sur une poutre à deux appuis; poutres prismatiques; poutres à sections variables; poutres en arc. III. Sur les moments des divers ordres. IV. Accords de surfaces et de systèmes concentrés. V. Calcul d'une intégrale d'ordre $n$ par une quadrature. VI. Interpolation parabolique. VII. Compléments d'intégration graphique. VIII. Intégrations approchées. IX. Interpolation par la méthode des moindres carrés. X. Les accords et les poutres droites. XI. Historique. Supériorité des méthodes naturelles d'intégration graphique sur les méthodes souvent artificielles de la Statique graphique. Les Chapitres IV à IX contiennent sur l'intégration approchée des recherches importantes.

*Massau* (*J.*). — Note sur la résolution graphique des équations du premier degré. Gand, Hoste. In-8° de 22 pages.

*Carnoy* (*J.*). — Cours de Géométrie analytique. Géométrie de l'espace. 4ᵉ édition, revue et augmentée. Louvain, Peeters. Paris, Gauthier-Villars, in-8° de XII-535 pages.

*Voir* un compte rendu, *Mathesis*, t. IX, p. 223-224; 1889.



MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion* et *J. Neuberg*. Paris, Gauthier-Villars; Gand, Hoste (¹).

*Casey* (*J.*). — Géométrie élémentaire récente. (5-70).

Exposé systématique élémentaire des théories qui se groupent autour des propriétés du point de Lemoine (ou de Grebe) et des points de Brocard. C'est la traduction du Chapitre supplémentaire de l'Ouvrage : *A sequel to the First six books of the Elements of Euclid*. Ce travail est divisé en huit sections :

1. Points isogonaux et isotomiques, antiparallèles, symédianes. 2. Théorie de deux figures directement semblables. 3. Cercle de Lemoine, de Tucker et de Taylor. 4. Théorie générale de trois figures semblables. 5. Application spéciale de la théorie des figures directement semblables. 6. Théorie des polygones harmoniques. 7. Théorie générale des figures associées. 8. Exercices divers.

*Breton* (*Ph.*). — Sur une épure de Géométrie descriptive. (73-75).

Étude des normales communes à deux cônes de révolution donnés.

*Peano* (*G.*). — Sur le déterminant wronskien. (75-76; 110-112).

Soient $X = t^2$, $Y = t \bmod t$; on aura

$$XY'_t - X'_t Y = 0$$

et cependant entre X et Y il n'y a pas de relation linéaire homogène. Donc le théorème fondamental sur les wronskiens comporte des restrictions dans son énoncé.

(¹) Voir *Bulletin*, $XVI_2$, p. 52-55.

*Malet* (*J.-C.*). — Quelques propriétés d'une quartique plane trinodale. (89-93).

Théorèmes divers sur ces courbes, avec les théorèmes correspondants relatifs à la sextique plane ayant six points de rebroussement et quatre points doubles.

*Exemple.* — 1° Les six points où les tangentes nodales rencontrent une quartique trinodale sont sur une conique; 2° Les tangentes à une quartique trinodale, menées par les nœuds et distinctes des tangentes nodales, touchent la courbe en six points qui sont sur une conique.

On peut aussi déduire, de la considération d'une quartique trinodale, des théorèmes relatifs à un système de deux coniques.

*Mansion* (*P.*). — Solution de la question 243 (B. Peirce). (97-98).

A un certain jeu, le joueur A gagne un point chaque fois qu'il tire une boule blanche d'une urne qui contient 3 boules blanches et 2 boules noires; chaque fois qu'il tire une boule noire, il perd tous ses points et B en gagne un; B d'ailleurs ne fait jamais de tirage. Quelle est la probabilité pour A de faire $n$ point le premier?

La probabilité que A fasse $n$ points consécutifs est $\left(\frac{3}{5}\right)^n$; celle que B gagne un point, $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$; la probabilité de B de gagner $\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^n$, celle de A, $1-\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^n$. Pour $n=3$, cette dernière probabilité est 0,518.

*Servais* (*Cl.*). — Sur un certain cercle analogue au cercle de courbure. (105-106). — Sur le cercle osculateur. (136-137).

La limite du cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une courbe, lorsque deux des points de contact se rapprochent indéfiniment du troisième M, est un cercle tangent à la courbe au point M et dont le rayon est le quart du rayon de courbure de la courbe en ce point. Le cercle osculateur est la limite de l'un des cercles ex-inscrits au même triangle.

*Mansion* (*P.*). — L'arc de grand cercle est le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère. (112-116; 213-214).

Critique des démonstrations de Legendre, Blanchet, J. Delaunay, Hoüel. Démonstration élémentaire du théorème suivant :

« On peut inscrire, d'une infinité de manières, dans une courbe quelconque tracée sur la sphère, un polygone dont le périmètre surpasse l'arc de grand cercle qui joint les extrémités de la courbe.

*Lucas* (*Ed.*). — Sur les coordonnées tripolaires. (129-134; 173-181).

Cette étude a pour but de montrer l'utilité du système des coordonnées tripolaires dans la recherche des propriétés de systèmes formés par des points, des droites et des cercles. L'auteur appelle coordonnées d'un point P les carrés de ses distances aux trois sommets du triangle. Voici les sujets traités : Équations du cercle, de la droite, du triangle circonscrit au triangle de référence, des côtés de ce triangle. Distance de deux points. Relation fondamentale entre les trois coordonnées d'un point et les éléments du triangle. Segments capables. Hauteurs du triangle. Inversion par rapport au cercle circonscrit. Cercles isotomiques. Bissectrices et cercles tangents. Points de Brocard. Cercles de Lucas.

*Demoulin* (*A.*). — Remarque sur une propriété fondamentale des wronskiens. (136).

Si l'on pose

$$W(y, z, u, v) = \begin{vmatrix} y & z & u & v \\ y' & z' & u' & v' \\ y'' & z'' & u'' & v'' \\ y''' & z''' & u''' & v''' \end{vmatrix},$$

on a

$$W(y, z, u, v) = y^4 W\left(1, \frac{z}{y}, \frac{u}{y}, \frac{v}{y}\right).$$

*Fourier* et *Monge*. — Une discussion sur la ligne droite. (137-141).

Fourier propose de définir la droite, le lieu des points situés à la même distance de trois points donnés ; le plan, le lieu des points à égale distance de deux points donnés; la circonférence, le lieu des points dont les distances à deux points fixes sont données; la sphère, le lieu des points dont la distance à un point fixe est donnée.

*Cesáro* (*E.*). — Solution de la question 394 (Weill). (142-143).

Le seul triangle dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, et où en même temps les côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs, est celui dont les côtés sont entre eux comme les nombres 4, 5, 6.

*De Longchamps* (*G.*). — Sur le cercle de Joachimsthal. (153-156).

Soient A, B, C, D les pieds des quatre normales menées d'un point M à une conique E de centre O. La perpendiculaire abaissée du centre ABC sur la corde commune à E et au cercle osculateur en A et les trois droites analogues concourent au milieu O′ de OM. Le cercle ABC passe par D′ symétrique de D, par rapport à O; par la projection de M sur la corde supplémentaire de la normale en D, relativement au diamètre DD′; enfin par D″, second point d'intersection du cercle ayant pour centre O′, et pour rayon O′D′, avec la corde commune à E et au cercle osculateur en D′.

*Brocard* (*H.*) et *Mansion* (*P.*). — La Trigonométrie rectiligne réduite à une seule formule d'après J. Ozanam. (161-164).

*Mansion* (*P.*). — Sur la formule d'Ozanam. (181-182).

*Mansion* (*P.*). — Encore la formule d'Ozanam. (265-267).

Dans un triangle rectangle scalène ABC, le nombre de degrés du plus petit angle B, divisé par 172, est à peu près égal au rapport du plus petit côté à la somme de l'autre côté et du double de l'hypoténuse.

Exemples. Démonstration par le Calcul différentiel ou par la Trigonométrie élémentaire. Table des valeurs de la fonction $\frac{x(2+\cos x)}{\sin x}$, toujours à peu près égale à 3, d'après le théorème d'Ozanam (ou plutôt de Snell, d'après Le Paige, *Mathesis*, t. X, p. 34).

*Peano* (*G.*). — Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor. (182-183).

Si $fx$ est une fonction ayant des dérivées d'ordre 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ pour les valeurs de $x_0$ à $x_0+h$, et une dérivée d'ordre $n$ pour $x = x_0$, on a

$$f(x_0+h) = fx_0 + \frac{h}{1}f'x_0 + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}x_0 + h^n\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{f^{n-1}(x_0+h_1) - f^{n-1}x_0}{h_1} - f^n x_0,$$

$h_1$ étant une partie de $h$; $\varepsilon$ a pour limite zéro, si $\lim h = 0$.

*Cesáro* (*E.*). — Étude intrinsèque de quelques courbes planes. (209-212).

Étude de quelques courbes dont les rayons de courbure partagent harmoniquement les segments interceptés sur les normales par une conique invariable.

*Mantel* (*W.*). — Sur une projection imaginaire. (217-219).

Étude de la transformation $y = u$, $x = v\sqrt{-1}$.

*Fauquembergue* (*E.*). — Note sur l'équation indéterminée $u^4 + v^4 = s^4 + w^4$. (241-242).

La solution de Desboves est identique au fond à l'une des solutions d'Euler.

*Jamet* (*V.*). — Sur une équation différentielle linéaire. (250-251).

Intégration par les séries de l'équation $ny = xy' + by'$.

*Servais* (*Cl.*). — Sur la réversibilité de la transformation linéaire. (267-268).

Complément d'un article antérieur (*Mathesis*, t. VII, p. 90-91).

*Article divers, questions résolues, questions d'examen, questions proposées, bibliographie* (*passim*).

*Table des matières.* — (281-288).

Suppléments.

I. *Gob* (*A.*). — Notes de Géométrie récente. (16 pages).

1. Sur la droite et le cercle d'Euler. 2. Sur les cercles de Neuberg. Contributions à la Géométrie récente, difficiles à résumer. Ce travail est extrait du t. XVI, 2e série des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*.

II. *Clasen* (*B.-I.*). — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. (40).

Ce Mémoire est extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XII.

III. *Vigarié* (*Em.*). — Premier inventaire de la Géométrie du triangle.

Résumé extrêmement bien fait des principaux résultats relatifs à la Géométrie du triangle (104 définitions ou théorèmes).

---

ANNUAIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 1890. 56e année. Bruxelles, Hayez, MDCCCXC.

*Liagre* (*J.*). — Notice sur Jean-Charles Houzeau. (207-310).

Biographie de l'astronome J.-Ch. Houzeau de Lehaye, né à Mons le 7 octobre 1820, mort à Bruxelles, le 12 juillet 1888. Ses principaux Ouvrages sont les suivants : 1. Physique du globe. 2. Règles de Climatologie. 3. Géographie physique de la Belgique. 4. Histoire du sol de l'Europe. 5. Études sur les facultés mentales des animaux. 6. Le ciel mis à la portée de tout le monde. 7. L'étude de la nature, ses charmes et ses dangers. 8. Uranométrie générale. 9. Répertoire des constantes de l'Astronomie ou Vade-mecum de l'Astronome. 10. Traité élémentaire de Météorologie. 11. Bibliographie générale de l'Astronomie (en collaboration avec A. Lancaster).

---

BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 3e série.

Tome XIX, janvier à juin 1890.

*Liagre* (*J.*). — Quelques mots à propos de la Notice de M. E. Ronkar : *Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestres en vertu du frottement intérieur.* (54-60).

*Folie* (*F.*). — Réponse à la Note du Général Liagre. (353-361).

*Ronkar* (*E.*). — Sur l'entraînement mutuel du noyau et de l'écorce terrestres en vertu du frottement (431-444).

*Ronkar* (*E.*). — Sur l'épaisseur de l'écorce terrestre déduite de la nutation diurne. (399-431).

*Folie* (*F.*), *Lagrange* et *de Tilly*. — Rapports sur ces Mémoires. (328-338).

1. M. Liagre tâche d'énoncer explicitement les hypothèses sur lesquelles s'appuie M. Ronkar dans un Travail antérieur. Il estime d'ailleurs que le noyau et l'écorce terrestres engrenés l'un dans l'autre tournent simultanément ensemble.

2. M. Folie fait observer que les observations des étoiles voisines du pôle semblent prouver l'existence de la nutation diurne. Pour qu'elle soit possible et que M. Ronkar ait raison, il suffit de prendre pour noyau du globe la partie non engrenée dans l'écorce.

3. M. Ronkar reprend, dans le troisième Travail cité, d'une manière approfondie, la question de l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestres.

4. Dans le suivant, admettant comme postulat une faible nutation diurne, il en déduit, au moyen d'hypothèses complémentaires, l'épaisseur de l'écorce terrestre.

5. Les rapporteurs font ressortir les résultats obtenus par M. Ronkar, sans dissimuler les objections que l'on peut encore y faire.

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Sur la condensation de la vapeur d'eau dans les espaces capillaires. (101-110).

La vapeur d'eau se condense plus facilement sur les corps présentant une infinité d'espaces capillaires concaves, d'après une formule de Sir William Thomson. Ce principe explique une foule de phénomènes, en particulier la formation des brouillards et des nuages quand il y a dans l'atmosphère des particules solides servant de noyaux de condensation.

*Folie* (*F.*). Gustave-Adolphe Hirn. (175-179).

*Folie* (*F.*). Chr.-H. Buys-Ballot. (180-181).

*De Heen* (*P.*). — Détermination des variations que le coefficient de diffusion éprouve avec la température pour des liquides différents de l'eau. (197-206).

*Servais* (*Cl.*). — Quelques propriétés des coniques. (231-241).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (160-161).

*Servais* (*Cl.*). — Sur les centres de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane dans son plan. (241-245).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (161-162).

*Servais* (*Cl.*). — Sur l'hyperbole équilatère. (759-763).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (736-737).

Nouvelles applications d'une transformation quadratique birationnelle spéciale, principalement à la théorie de la courbure des coniques.

*Deruyts* (*J.*). — Sur les fonctions semi-invariantes. (255-272).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (165-166).

Propriétés principales et modes divers de formation de certaines fonctions qui déterminent d'une manière simple des semi-invariants.

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Discours prononcé aux funérailles de Ch. Montigny. (308-312).

*De Caligny* (*A.*). — Recherches d'Hydraulique. (313-317), (503-509), (728-734).

*Schoentjes* (*H.*). — Projet d'expériences destinées à vérifier si la lumière polarisée, dont le plan de polarisation oscille, exerce une influence sur le champ magnétique. (444-468).

*De Heen* (*P.*), *Lagrange* (*C.*). — Rapports. (319-321; 321-328).

Le second rapporteur fait connaître les raisons qui permettent de conserver la théorie de la lumière de Cauchy, même si les expériences proposées réussissent.

*Servais* (*Cl.*). — 1. Sur les points caractéristiques de quelques droites remarquables dans les coniques. (519-528). 2. Sur la courbure des courbes du second degré. (529-540).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (510-512).

Généralisation de recherches antérieures qu'il est difficile de résumer.

*Demoulin* (*A.*). — Note sur le développement en série des fonctions sinus, cosinus et de la fonction exponentielle. (541-542).

On obtient ces séries en intégrant un nombre suffisant de fois les inégalités $\cos x < 1$, $e^{-x} < 1$.

*Catalan* (*E.*). — Conséquences d'un théorème d'Algèbre. (742-746).

Si $a$, $b$, ..., $l$ sont des quantités inégales, la somme

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\ldots+\frac{1}{a-l}\right)\frac{1}{(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-l)^2} \\ +&\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\ldots+\frac{1}{b-l}\right)\frac{1}{(b-a)^2(b-c)^2\ldots(b-l)^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ +&\left(\frac{1}{l-a}+\frac{1}{l-b}+\ldots+\frac{1}{l-k}\right)\frac{1}{(l-a)^2(l-c)^2\ldots(l-k)^2} \end{aligned}$$

est égale à zéro.

*Ronkar* (*E.*). — Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestres en vertu du frottement intérieur. Réponse à la Notice de M. Liagre. (746-758).

*Lagrange* (*C.*). — Rapport. (734-736).

M. Ronkar défend son théorème, en précisant les hypothèses sur lesquelles il repose, mais par là même il semble en diminuer la portée.

Tome XX, juillet à décembre 1890.

*De Caligny* (*A.*). — Recherches d'Hydraulique. (6-10).

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. (32-37; 253-264).

Si l'affinité des deux liquides surpasse la somme de leurs tensions superfi-

cielles, la résultante des actions existant à la surface de contact tend à augmenter cette surface. Cette résultante peut être appelée force *d'extension*.

Nombreuses expériences ou observations pour confirmer cette loi.

*Deruyts* (*J.*). — Sur les covariants primaires. (116-132). — Sur la réduction des formes invariantes. (265-271).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (16-17; 231).

*Dwelshauvers-Dery*. — Sur une Notice biographique relative à G.-H. Hirn. (132-137).

*Maus*. — Rapport. (14-16).

Dans un Travail de M. Hirn, publié en 1854, ce physicien affirme avoir trouvé le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail, dans un cas particulier, avant d'avoir connaissance des résultats obtenus par Mayer.

*Servais* (*Cl.*). — Sur les involutions cubiques conjuguées. (272-280).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (232-233).

Démonstration simple de propriétés de ces involutions établies par MM. Ém. Weyr et C. Le Paige, et propriétés nouvelles.

*Cesáro* (*E.*). — Sur les démonstrations du théorème de Staudt et de Clausen. (280-289).

*Mansion* (*P.*). — Rapport. (233-236).

L'auteur établit l'identité substantielle des démonstrations de Catalan, Radicke, Lucas et donne une interprétation de certains déterminants qui se rencontrent dans la dernière. Cela équivaut au fond à une démonstration partielle nouvelle.

*Schoentjes* (*H.*). — Sur les déformations que font naître, dans un hémisphère creux métallique, le choc et la pression d'un corps dur. (295-305).

*Van der Mensbrugghe* (*G.*). — Rapport. (237).

Les déformations ont une régularité plus grande qu'on ne l'eût conjecturé *a priori*.

*Servais* (*Cl.*). — Sur les points d'inflexion dans les cubiques. (453-462).

*Le Paige* (*C.*). — Rapport. (431-433).

Démonstration très simple d'un grand nombre de propriétés des points d'inflexion des cubiques, dont quelques-unes sont nouvelles.

*Le Paige* (*C.*). — Un astronome belge du XVIIe siècle. (709-727).

Godefroid Wendelin, né à Herck, le 6 juin 1580, mort après 1660, a le premier trouvé la variation de la durée des oscillations du pendule; il a constaté et établi la diminution continue de l'obliquité de l'écliptique; il a calculé, avec une exactitude plus grande que ses prédécesseurs, la parallaxe du Soleil; enfin il a contribué à établir le système de Képler.

---

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE. — 2e série. Tome XVI. Paris, Roret; Bruxelles, Hayez. Avril 1890 (1).

*Graindorge* (*J.*). — Intégration des équations de la Dynamique. (V, 290 pages).

Développement de la dissertation inaugurale de l'auteur (1871), contenant le résumé des Travaux de Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Donkin, Bertrand, Liouville, Bour, Darboux, Mayer, avec des applications à la théorie des perturbations.

*Gob.* — Sur la droite et le cercle d'Euler. (1-7). — Sur les cercles de Neuberg. (1-14).

Contributions à la Géométrie récente du triangle qu'il est difficile de résumer.

*Neuberg* (*J.*). — Sur les figures affinement variables. (1-12).

Euler et Möbius appellent *affine* à elle-même la figure formée par trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ de masse $m_1$, $m_2$, $m_3$ et par leur centre de gravité. L'auteur étudie les propriétés d'une pareille figure mobile. Voici l'un des théorèmes auxquels il arrive : « Lorsqu'une figure plane se meut en restant toujours semblable à elle-même, l'aire engendrée par le rayon vecteur de l'un de ses points est proportionnelle à la puissance de ce point par rapport à une circonférence fixe; tous les points dont les rayons vecteurs décrivent la même aire appartiennent à une même circonférence. »

*D'Ocagne.* — Remarques sur une transformation quadratique réciproque. (1-10).

---

(1) *Bulletin*, XVI2, p. 55-57.

*Neuberg* (*J.*). — Remarque sur une transformation quadratique. (1-12).

La transformation, dans le plan et dans l'espace, étudiée dans ces deux Notes, peut se définir comme il suit, dans le plan : $a$ et $a'$ sont les côtés d'un angle constant, $b$ et $b'$ d'un autre angle constant. Quand les deux angles se meuvent autour de leurs sommets, les côtés $a$, $b$ se coupent en M, $a'$ et $b'$ en M'. Les points M et M' sont les points correspondants. Les deux auteurs étudient cette transformation avec soin, par l'Analyse et la Géométrie, et la rattachent à la théorie générale des transformations quadratiques.

---

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, publiée par la Société scientifique de Bruxelles.

Tome XXVII, 1er semestre 1890.

*Thirion* (*J.*). — L'Astronomie sidérale. (83-136).

Exposé à la fois systématique et historique de ce que nous savons sur l'éclat, la couleur, la variabilité, le mouvement propre et la distance des étoiles.

*Thirion* (*J.*). — Le R. P. Perry. (201-208).

Notice biographique et bibliographique sur Stephen John Perry, né à Londres le 26 août 1833, mort en janvier 1890, l'un des meilleurs astronomes observateurs de l'Angleterre. Il fut chargé, par le gouvernement anglais, d'observer le passage de Vénus, en 1874 à Kerguelen, en 1882 à Madagascar, les éclipses de Soleil de 1870 en Espagne, de 1886 aux Antilles, de 1887 en Russie, de 1889 à la Guyane française.

*Folie* (*F.*). — R. Clausius : sa vie et ses travaux. (419-487).

Biographie de Clausius, né à Köstlin, le 2 janvier 1822, mort à Bonn, le 24 août 1888. Il fut successivement professeur à l'École royale des ingénieurs et de l'artillerie à Berlin (1850), à l'École Polytechnique (1855) et à l'Université (1857) de Zurich, à celle de Wurzbourg (1867) et enfin à celle de Bonn (1869). Analyse de ses principaux travaux. Conséquences métaphysiques de la loi de la dissipation de l'énergie.

Recensions des Ouvrages suivants :

*Borchardt's* (*C.-W.*) gesammelte Werke (Berlin, Reimer, 1888); par M. d'Ocagne. (243-251).

*Boussinesq* (*J.*). — Leçons synthétiques de Mécanique générale (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889) par M. Ph. Gilbert. (257-264).

*Houzeau* (*J.-C.*) et *Lancaster* (*A.*). — Bibliographie générale de l'Astronomie, Tome premier, seconde Partie (Bruxelles, Hayez, 1889) : par M. J. Thirion.

Tome XXVIII; 1890.

*Delsaulx* (*J.*). — Quelques applications du Calcul des probabilités à la démonstration de vérités de certitude morale. (5-36).

*Delsaulx* (*J.*). — La probabilité philosophique et la nature cinétique de la chaleur. (484-516).

Considérations sur la portée objective du Calcul des probabilités avec diverses applications; considérations analogues sur le degré de certitude de la théorie cinétique de la chaleur.

*Lucas* (*J.-D.*). — L'Astronomie à Babylone. (450-483).

Exposé des recherches des PP. Srassmaier et Epping. 1. Calcul de la nouvelle Lune chez les Chaldéens. 2. Éphémérides lunaires des Chaldéens.

Recensions des Ouvrages suivants :

*Lancaster* (*A.*). — Liste générale des Observatoires et des Astronomes, des Sociétés et des Revues astronomiques (Bruxelles, Hayez, 1890); par M. R. Jacopssen. (600-607).

Œuvres de Fourier, publiées par G. Darboux. Tome second (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890); par M. Ph. Gilbert (250-253).

*Riccardi* (*P.*). — Saggio di una bibliografia euclidea (Bologne, 1887, 1888, 1890); par M. J. Thirion.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVIII.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

## TOME XVIII; 1894. — SECONDE PARTIE.

---

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES MATIÈRES.

### RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. T. IV, 1890. — T. V, 1891. — T. VI, 1892. — 5-38; 131-185.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3ᵉ série, T. IX, 1892. — 205-219.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. 13ᵉ année, 1888-1889. — 219-222.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 56ᵉ année, 1890. — 223.

Association française pour l'avancement des Sciences. 16ᵉ session (Toulouse), 1887. — 17ᵉ session (Oran), 1888. — 18ᵉ session (Paris), 1889. — 19ᵉ session (Limoges), 1890. — 38-53.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. 4ᵉ série, T. VI, 1890; 1ᵉʳ semestre. — 2ᵉ semestre. — T. VII, 1891; 1ᵉʳ semestre. — 2ᵉ semestre. — 96-114.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XX, 1892. — 194-205.

Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XVII. — T. XVIII, 1889. — T. XIX. — T. XX, 1890. — 222-226. — 234-238.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXIV, 1892. — T. CXV, 1892. — 71-96; 114-131.

Mathesis. — 229-233.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XLVII, 1889. — 226-227.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. L, LI (et ouvrages séparés), 1890. — 227-229.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. 2e série, T. XVI, 1890. — 238-239.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. — T. II. 1888. — 186-194.

Revue des questions scientifiques. T. XXVII. — T. XXVIII, 1890. — 239-240.

The Messenger of Mathematics. T. XVII, 1887-88. — T. XVIII, 1888-89. — T. XIX, 1889-90. — 53-67.

The Quarterly journal of pures and applied Mathematics. T. XXIII, 1889. — 67-71.

243

# TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVIII.

20549 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 29

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY